UNIVERZITET U TUZLI
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Nermin Okičić

NELINEARNI OPERATOR SUPERPOZICIJE NA TEŽINSKIM BANACHOVIM PROSTORIMA FUNKCIJA PRIRODNOG ARGUMENTA

- Doktorska disertacija -

Tuzla, 2005

Doktorska disertacija je izradjena u .... primjeraka,

broj UDK Narodne i/ili Univerzitetske biblioteke: ....

mentor rada: Dr **Fehim Dedagić**, vanredni profesor,

doktorska disertacija ima **108** stranica.

Da ne bi *svjetlost* i da ne bi *riječ* ne bi bilo ni Nas niti ovog teksta. Njemu hvala.

Posebnu zahvalnost dugujem Prof. Dr. Fehimu Dedagiću kao mentoru i čovjeku koji me je pratio i pomagao kako u izradi ovog rada, tako i u kompletnom mom radu.

Hvala svima zaposlenim na PMF-u Tuzla i na JU Univerzitetu Tuzla za podršku i sve druge oblike pomoći.

Najveće hvala mojoj porodici i roditeljima za razumjevanje, podršku i odricanja kojih je bilo i za koja sada nalazimo opravdanje.

BIOGRAFIJA

Nermin Okičić rodjen je u Tuzli 29.08.1964. godine. Osnovnu školu završio je u Lukavcu, a srednju Elektro-tehničku školu u Tuzli. Studij Matematika na PMF Beograd, odsjek *Numerička matematika, kibernetika i optimizacija*, završio je 1990. godine sa prosjekom 8,07 i stekao zvanje Diplomirani matematičar. Poslije diplomski studij upisao je u Sarajevu 1998. a odbranio magistarski rad na temu: **"Nelinearni superpozicioni operatori u Banachovim i Orliczevim prostorima težinskih funkcija prirodnog argumenta i primjena na rješavanje nekih beskonačnih sistema Hammersteinovog tipa"** u januaru 2003. godine na istom Fakultetu i stekao zvanje Magistar matematičkih nauka. Od 1990. g. do 1993. g. radio je kao asistent na Poljoprivrednom fakultetu u Zemunu, a od 1996. g. na Univerzitetu u Tuzli na PMF-u, odsjek Matematika.

Nermin Okičić objavio je pet naučnih radova iz oblasti Matematička analiza, od toga četiri iz uže i jedan iz šire naučne oblasti. Imao je jedno izlaganje na matematičkoj konferenciji u Kragujevcu i učestvovao u jednom naučnom projektu finansiranom od strane Federalnog Ministarstva za nauku.

Vrlo dobro se služi njemačkim jezikom, a dobro engleskim i ruskim.

Otac je dvoje djece i hobiji su mu muzika i šah.

KRATAK SADRŽAJ

Prezentovani rad razmatra temu iz nelinearne funkcionalne analize, oblast, teorija operatora. Rad je podjeljen u deset glava u kojima su razmatrane osnovne osobine nelinearnog operatora superpozicije F, definisanog na težinskom Banachovom prostoru $l_{p,\sigma}$ $(1 \leq p \leq +\infty)$, funkcija prirodnog argumenta, generisanog realnom funkcijom $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdje je $\Omega = \mathbb{N}$.

U prvoj glavi date su osnovne definicije i napomene u vezi sa težinskim Banachovim prostorima i operatorom superpozicije kao i za $\mathcal{L}$-karakteristiku operatora.

U glavama od **2** do **8** obradjene su osobine djelovanja, ograničenosti, neprekidnosti i uniformne neprekidnosti, Lipschitzovog uslova, kompaktnosti, kondenziranja, diferencijabilnosti i analitičnosti nelinearnog operatora superpozicije. U glavi **9** opisan je slučaj kada $F : l_{p,\sigma} \to l_{q,\tau}$ i kada je $p = \infty$ ili $q = \infty$.

U glavi **10** razmatrana je jednačina Hammersteinovog tipa

$$x = KFx \ ,$$

gdje je K linearan operator, a F nelinearni operator superpozicije. Primjenjen je varijacioni princip rješavanja date jednačine, pri čemu su korišteni rezultati o operatoru superpozicije dobijeni u prethodnim glavama.

Ključne riječi: Nelinearna funkcionalna analiza, operator superpozicije, Banachovi prostori.

SHORT CONTENTS

The presented thesis discusses an area of nonlinear functional analysis, subarea of theory of operators. This work contains 10 chapters which consider main properties of nonlinear superposition operator F, defined on the weighted Banach space $l_{p,\sigma}$ $(1 \leq p \leq +\infty)$, functions of natural argument, generated with real function $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, where $\Omega = \mathbb{N}$.

In the first chapter are given main definitions and remarks related to weighted Banach spaces and the superposition operator, as well as for $\mathcal{L}$-characteristic of operator.

Chapters **2** to **8** consider properties of acting, boundedness, continuity and uniform continuity, Lipschitz condition, compactness, condensation, differentiability and analyticity of nonlinear superposition operator. Chapter **9** describes the case when $F : l_{p,\sigma} \to l_{q,\tau}$ and when $p = \infty$ or $q = \infty$.

Hammerstein's equation

$$x = KFx\ ,$$

is solved in Chapter **10**, where K is linear operator, and F nonlinear superposition operator. To solve this equation we used variational principal, while using the results on superposition operator acquired in previous chapters.

Key words: Nonlinear functional analysis, superposition operator, Banach spaces.

Sadržaj

Glava 1

Uvod

1.1 Osnovni pojmovi, prostor S

Neka je Ω proizvoljan skup, $\mathcal{M}$ σ-algebra podskupova od Ω (koje ćemo u daljem zvati mjerljivim), i μ prebrojivo aditivna i σ-konačna mjera na $\mathcal{M}$. Sa λ označimo neku normalizovanu ("vjerovatnosnu") mjeru na $\mathcal{M}$ koja je ekvivalentna sa μ (imaju iste skupove mjere nula); jedan od načina njenog izbora je na primjer

$$\lambda(D) = \int_D n(s) d\mu \ ,$$

gdje je n neka pozitivna funkcija na Ω sa osobinom

$$\int_\Omega n(s) d\mu = 1 \ .$$

U najvećem broju slučajeva mi radimo ili sa ograničenim perfektnim skupom Ω, sa nepraznom unutrašnjošću u nekom konačno dimenzionalnom prostoru, zajedno sa algebrom $\mathcal{M}$, Borel- ili Lebesgue-mjerljivih podskupova i Lebesgueovom mjerom μ, ili sa skupom prirodnih brojeva, zajedno sa algebrom svih podskupova sa mjerom brojanja. Naravno, komplikovanije situacije su moguće bilo da radimo sa Borelovim ili Lebesgueovim podskupovima, Borelovom, Lebesgueovom ili proizvoljnom drugom mjerom.
Pozivajući se na Saksovu lemu([15], *Theorem 19.57*), skup Ω možemo podjeliti na jedinstven način, do na skup mjere nula, u dva dijela Ω_c i Ω_d tako da je mjera μ *bez atoma* ("neprekidna") na Ω_c (tj. svaki podskup od Ω_c može se podjeliti na dva dijela jednakih mjera) i mjera μ je *čisto atomska*

("diskretna") na Ω_d, tj. Ω_d je konačna ili prebrojiva unija atoma pozitivne mjere. U "prirodnim" situacijama, jedan od ova dva skupa je prazan i tada radimo ili sa "prostorima funkcija" ili sa "prostorima nizova".

Označimo sa $S = S(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ skup svih skoro svuda konačnih μ-mjerljivih funkcija na Ω, preciznije, S se sastoji od ekvivalentnih klasa mjerljivih funkcija, gdje za dvije funkcije x i y kažemo da su ekvivalentne ako se poklapaju skoro svuda na Ω. U skup S na uobičajen način možemo uvesti algebarske operacije, gdje ćemo pod nula elementom podrazumijevati funkciju $\theta(s)$ koja je nula, skoro svuda na Ω. Uvodjenjem odgovarajuće metrike, S možemo učiniti kompletnim metričkim prostorom. Parcijalno uredjenje na S možemo uvesti na slijedeći način: kažemo da je $x \leq y$ $(x, y \in S)$ ako je $x(s) \leq y(s)$ za skoro svako $s \in \Omega$. Sa ovim, S postaje uredjen linearni prostor, tj. iz $x \leq y$, za proizvoljan $z \in S$ je $x + z \leq y + z$, i za $\alpha \geq 0$ je $\alpha x \leq \alpha y$; šta više, ako su (x_n) i (y_n) dva niza u S koji konvergiraju respektivno ka $x \in S$ i $y \in S$, za koje je $x_n \leq y_n$ $(n \in \mathbb{N})$, onda je $x \leq y$. Na kraju, S je K-prostor, tj. svaki odozgo ograničen podskup od S ima supremum.

Osim konvergencije po mjeri, u uredjenom linearnom prostoru možemo posmatrati i konvergenciju u odnosu na uredjenje; kažemo da niz (x_n) konvergira ka $x \in S$ u odnosu na uredjenje u S ako je $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = x$, gdje su

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \inf_k \sup_{n\geq k} x_n \quad , \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \sup_k \inf_{n\geq k} x_n \ .$$

U prostoru S ovaj tip konvergencije koincidira sa konvergencijom skoro svuda. Na osnovu Lebesgueove teoreme, konvergencija skoro svuda implicira konvergenciju po mjeri, obrat važi samo u prostorima sa diskretnom mjerom $(\Omega_c = \emptyset)$.

U daljem ćemo često koristiti *karakterističnu funkciju* χ_D skupa $D \in \mathcal{M}$ koja je data sa

$$\chi_D(s) = \begin{cases} 0 & ; \quad s \notin D, \\ 1 & ; \quad s \in D, \end{cases}$$

i pomoću nje konstruisan *operator projektovanja* ili *operator množenja* karakterističnom funkcijom skupa D

$$P_D x(s) = \chi_D(s) x(s) \ . \tag{1.1.1}$$

Kao što smo napomenuli, prostor S možemo učiniti kompletnim ali na žalost on nije normiran prostor pa čak ni lokalno konveksan. Otuda i ispitivanje operatora superpozicije sprovodimo na konkretnijim prostorima kao što su Lebesgueovi, Orliczevi, Lorentzovi itd. Uvedimo na ovom mjestu jednu važnu klasu prostora kojoj pripadaju gore spomenuti, kao i prostori neprekidnih i neprekidno diferencijabilnih funkcija.

Definicija 1.1.1. Banachov prostor X mjerljivih funkcija nad Ω nazivamo *idealnim prostorom* ako iz relacije $|x| \leq |y|$, $x \in S$ i $y \in X$ slijedi da $x \in X$ i $||x||_X \leq ||y||_X$.

Važna osobina idealnih prostora je ta da svaki niz koji konvergira po normi u X je konvergentan i po mjeri, ili ekvivalentno rečeno, svaka kugla u X je ograničen skup u S.

Pod nosačem *supp* x funkcije $x \in X$ podrazumijevamo skup svih $s \in \Omega$ za koje je $x(s) \neq 0$ (koji je jedinstveno definisan do na skup mjere nula). Za proizvoljan $N \subset X$ definišemo nosač skupa N sa

$$supp\ N = supp\ [\sup\{\chi_{supp\ x} :\ x \in N\}]\ .$$

Svaka funkcija $x \in N$ iščezava, tj. ona je nula van *supp* N, i za proizvoljan $D \subset supp\ N$ pozitivne mjere postoji, $D_0 \subset D$, pozitivne mjere, i funkcija $x_0 \in N$ takvi da je $D_0 \subset supp\ x_0$. U svakom idealnom prostoru X postoji nenegativna funkcija u_0 takva da je $supp\ u_0 = supp\ X$. Takvu funkciju nazivamo *jedinica* prostora X.

Za element $x \in X$ kažemo da ima *apsolutno neprekidnu normu* ako važi:

$$\lim_{\lambda(D)\to 0} ||P_D x|| = 0\ , \tag{1.1.2}$$

gdje je P_D definisan sa (1.1.1). Skup X^0 svih elemenata $x \in X$ koji imaju apsolutno neprekidnu normu je zatvoren idealan potprostor od X i nazivamo ga *regularni dio* od X. Regularni dio prostora X može biti znatno uži od samog prostora, a prostore kod kojih je $X = X^0$ nazivamo *regularnim* prostorima. Ukoliko je X^0 gust u X onda prostor X zovemo *kvazi-regularnim.* Jedna karakterizacija regularnog prostora X, bitna u daljem radu, je

Teorem 1.1.1. *[33] Neka je X idealan prostor i u_0 proizvoljna nenegativna funkcija iz X. Neka je $x \in X$ takav da je $supp\ x \subset supp\ u_0$. Funkcija x pripada X^0 ako i samo ako postoji monotono rastuća funkcija $\Phi(u)$ ($0 < u < \infty$) za koju je*

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty\ ,$$

takva da važi:

$$\Phi\left(\frac{|x(s)|}{u_0(s)}\right)u_0(s)\in X\ .$$

Idealan prostor X nazivamo *skoro perfektnim* ako norma zadovoljava *Fatouovu* osobinu, tj. ako za dati niz $(x_n)\subset X$ koji konvergira ka $x\in X$ važi:

$$||x||\leq \underline{\lim}_{n\to\infty}||x_n||\ .$$

Prostor X nazivamo *perfektnim* ako iz činjenice da niz (x_n) konvergira ka $x\in S$ slijedi da $x\in X$ i da važi Fatouova osobina. Prostor X je skoro perfektan (perfektan) ako i samo ako je jedinična kugla zatvoren skup u X (u S).

Svaki regularni prostor je skoro perfektan, obrat ne mora da važi. Prostor koji je i regularan i perfektan nazivamo *kompletno regularnim.*

Kuglu sa centrom x_0 poluprečnika r ćemo označavati sa $B(x_0,r)$, specijalno $B(\theta,r)=B_r(X)$.

Neka su X i Y idealni prostori. Skup Y/X^n ($n\in\mathbb{N}$), koji se sastoji od svih $z\in S$ takvih da je $zx^n\in Y$, za svako $x\in X$, snabdjeven normom

$$||z||_{Y/X^n}=\sup\{||zx^n||_Y:\ ||x||_X\leq 1\}\ ,$$

nazivamo *n-ti prostor multiplikatora* od X u odnosu na Y. Specijalno za $n=1$, prostor Y/X nazivamo prostor multiplikatora od X u odnosu na Y. Prostori multiplikatora igraju važnu ulogu u ispitivanju mnogih osobina operatora, kao naprimjer diferencijabilnosti operatora.

1.2 Težinski Banachovi prostori funkcija prirodnog argumenta

Kao što smo već napomenuli u **1.1**, skup Ω se može podjeliti na dva dijela Ω_c i Ω_d, i u "prirodnim" situacijama jedan od ova dva skupa je prazan.

Neka je sada $\Omega=\mathbb{N}$ i $\mathcal{M}$ σ-algebra svih podskupova skupa $\mathbb{N}$. Neka je μ mjera na $\mathbb{N}$ sa svojstvom

$$(\forall s\in\mathbb{N})\ \ \mu(s)\geq\mu_0>0\ , \tag{1.2.1}$$

gdje je μ_0 unaprijed zadato. Ukoliko posljednji uslov posmatramo u obliku

$$(\forall s\in\mathbb{N})\ \frac{\mu(s)}{\mu_0}\geq 1\ ,$$

neće se umanjiti opštost ako za mjeru μ uzmemo mjeru brojanja. Slijedeći oznake iz **1.1**, sada je $S = S(\mathbb{N}, \mathcal{M}, \mu)$ i pri tome je jasno, $\Omega_c = \emptyset$.

Neka je $\sigma = (\sigma(s))_{s\in\mathbb{N}}$, proizvoljan niz nenegativnih realnih brojeva. Za $0 < p \leq \infty$, definišimo skup $l_{p,\sigma}$ kao skup svih funkcija $x = (x(s))_{s\in\mathbb{N}}$, sa osobinom da je

$$\sum_{s\in\mathbb{N}} |x(s)|^p \sigma(s) < \infty \quad , \quad 0 < p < \infty \ ,$$

odnosno

$$\sup_{s\in\mathbb{N}} |x(s)|\sigma(s) < \infty \quad , \quad p = \infty \ .$$

Ako u $l_{p,\sigma}$ algebarske operacije uvedemo kao i u l_p i uvedemo normu na slijedeći način:

$$\|x\|_{l_{p,\sigma}} = \left(\sum_{s\in\mathbb{N}} |x(s)|^p \sigma(s) \right)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad 1 \leq p < \infty \ , \tag{1.2.2}$$

odnosno za $p = \infty$

$$||x||_{l_{\infty,\sigma}} = \sup_{s\in\mathbb{N}} |x(s)|\sigma(s) \ , \tag{1.2.3}$$

$l_{p,\sigma}$ postaje kompletan linearan vektorski prostor, tj. Banachov prostor, koga nazivamo *težinski Banachov prostor* funkcija prirodnog argumenta. Treba primjetiti da za $0 < p < 1$, $l_{p,\sigma}$ nije normiran prostor, ali funkcional

$$[x] = \sum_{s\in\mathbb{N}} |x(s)|^p \sigma(s) \ ,$$

definiše jednu k-normu (nejednakost $||a + b|| \leq k(||a|| + ||b||)$ se naziva k-nejednakost trougla, i pri tome funkcional $||\cdot||$ nazivamo k-norma) na $l_{p,\sigma}$ sa $k = 2^{\frac{1-p}{p}}$ i čini ga kompletnim k-normiranim prostorom. Iako ćemo u ovom radu uglavnom raditi uz pretpostavku da je $1 \leq p \leq \infty$, ipak treba primjetiti da se većina rezultata može prenijeti i na slučaj $0 < p < 1$.

Da bi prostor $l_{p,\sigma}$ bio opštiji od odgovarajućeg prostora l_p u smislu, da specijalnim izborom težinske funkcije dobijemo prostor l_p, i da pri tome, bez obzira na izbor težinske funkcije ostanu u važnosti osnovne osobine prostora l_p, moramo postaviti odredjene uslove na funkciju σ. Tako, ako bi smo uzeli da je $\sigma \in l_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$, zbog ograničenosti datog niza, imali bi smo da

$l_p \subset l_{p,\sigma}$. Kako nam to nije u interesu, nećemo uslovljavati da je σ ograničen niz, dakle u opštem slučaju je

$$\sup_{s\in\mathbb{N}} \sigma(s) = \infty \ .$$

Osim toga, da bi sačuvali poredak prostora $l_{p,\sigma}$ (po inkluziji), tj. da iz $p < q$ slijedi $l_{p,\sigma} \subset l_{q,\sigma}$, pored navedenog uslova zahtjevamo i slijedeći uslov:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ \sigma(n) \geq 1 \ , \tag{1.2.4}$$

tj. važi

Lema 1.2.1. *Neka je $1 \leq p < q \leq \infty$. Da bi za proizvoljan x važilo $||x||_{l_{q,\sigma}} \leq \|x\|_{l_{p,\sigma}}$, neophodno je i dovoljno da funkcija σ zadovoljava uslov (1.2.4).*

Dokaz : Neka je $1 \leq p < q \leq \infty$ i neka je za svako x, $||x||_{l_{q,\sigma}} \leq \|x\|_{l_{p,\sigma}}$. Izaberimo funkciju x tako da je $x_k = 1$ i $x_n = 0$ za $k \neq n \in \mathbb{N}$. Zbog izbora funkcije x, to bi značilo

$$(\sigma(k))^{\frac{1}{p}} \geq (\sigma(k))^{\frac{1}{q}} \qquad , \ k \in \mathbb{N} \ .$$

Kako je $p < q$, odnosno $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$, zaključujemo da mora biti $\sigma(k) \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$. Neka je sada zadovoljen uslov (1.2.4), i neka je $\beta > 1$ takav da je $q = p\beta$. Ne umanjujući opštost, neka je $x \in l_{p,\sigma}$ takav da je $\sum_{s\in\mathbb{N}} |x(s)|^p \sigma(s) = 1$. Tada je za svako $s \in \mathbb{N}$, $|x(s)|\sigma(s) \leq 1$ pa je onda

$$\sum_{s\in\mathbb{N}} |x(s)|^q \sigma(s) = \sum_{s\in\mathbb{N}} (|x(s)|^p \sigma(s))^\beta (\sigma(s))^{1-\beta}$$

$$\leq \sum_{s\in\mathbb{N}} (|x(s)|^p \sigma(s))^\beta \leq \sum_{s\in\mathbb{N}} |x(s)|^p \sigma(s) \ .$$

Dakle $||x||_{l_{q,\sigma}} \leq ||x||_{l_{p,\sigma}}$, što dodatno znači $l_{p,\sigma} \subset l_{q,\sigma}$. ♣

Ovako uvedenu funkciju σ nazivamo *težinska funkcija*. Njenim specijalnim izborom, $\sigma(s) = 1$ $(s \in \mathbb{N})$, dobijamo Banachove prostore l_p, prema tome, rezultati dobijeni u ovom radu predstavljaju u tom smislu, uopštenje poznatih rezultata za prostore l_p.

Pokažimo sada dvije važne osobine prostora $l_{p,\sigma}$.

Lema 1.2.2. *Neka je $(\sigma(s))_{s\in\mathbb{N}}$ težinska funkcija sa osobinom (1.2.4) i neka je $1 \leq p < \infty$. Prostor $l_{p,\sigma}$ je idealan prostor.*

Dokaz : Neka je $y \in l_{p,\sigma}$ i neka je x takav da je $|x| \leq |y|$. Odavde je zbog nenegativnosti težinske funkcije

$$(\forall s \in \mathbb{N})|x(s)|\sigma(s) \leq |y(s)|\sigma(s) \ ,$$

odnosno vrijedi

$$\left(\sum_{s\in\mathbb{N}} |x(s)|^p\sigma(s)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{s\in\mathbb{N}} |y(s)|^p\sigma(s)\right)^{\frac{1}{p}} \ .$$

Iz ovoga je jasno da je $x \in l_{p,\sigma}$, i osim toga imamo $||x||_{l_{p,\sigma}} \leq ||y||_{l_{p,\sigma}}$, te je na osnovu definicije 1.1.1, $l_{p,\sigma}$ idealan prostor. ♣

Uslov (1.1.2), za apsolutnu neprekidnost norme u prostorima $l_{p,\sigma}$, svodi se na uslov

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n x\|_{l_{p,\sigma}} = 0 \ ,$$

gdje sa P_n označavamo operator projektovanja

$$P_n = P_{\{n+1,n+2,\dots\}} \ .$$

Lema 1.2.3. *Neka je $(\sigma(s))_{s\in\mathbb{N}}$ težinska funkcija sa osobinom (1.2.4), i neka je $1 \leq p < \infty$. Prostor $l_{p,\sigma}$ je regularan prostor.*

Dokaz : Neka je $x \in l_{p,\sigma}$ proizvoljan. To znači da je

$$||x||^p_{l_{p,\sigma}} = \sum_{s\in\mathbb{N}} |x(s)|^p\sigma(s) < \infty \ .$$

Tada

$$R_n = \sum_{s=n+1}^{\infty} |x(s)|^p\sigma(s) = \sum_{s\in\mathbb{N}} |P_n x(s)|^p\sigma(s) \longrightarrow 0 \ , \ n \to \infty \ .$$

Ovo je opet ekvivalentno činjenici da je $\lim_{s\to\infty} ||P_s x||_{l_{p,\sigma}} = 0$ iz čega zaključujemo da je $x \in l^0_{p,\sigma}$. Kako je $l^0_{p,\sigma} \subset l_{p,\sigma}$, to je onda $l^0_{p,\sigma} = l_{p,\sigma}$, odnosno prostor $l_{p,\sigma}$ je regularan. ♣

Kako je svaki regularan prostor skoro perfektan, zbog zatvorenosti, zaključujemo da je $l_{p,\sigma}$ perfektan prostor. Na osnovu svega rečenog imamo da je $l_{p,\sigma}$ kompletno regularan prostor.

Neka su $l_{p,\sigma}$ i $l_{q,\tau}$ dva težinska Banachova prostora. Prostor multiplikatora od $l_{p,\sigma}$ u odnosu na $l_{q,\tau}$, saglasno definiciji prostora multiplikatora, pokazuje se da je

$$l_{q,\tau}/l_{p,\sigma} = \begin{cases} l_{\frac{pq}{p-q},\tau^{\frac{p}{p-q}}\sigma^{-\frac{q}{p-q}}} & ; \quad p > q, \\ l_{\infty,\tau^{\frac{1}{q}}\sigma^{-\frac{1}{q}}} & ; \quad p \leq q. \end{cases} \tag{1.2.5}$$

Zaista, za proizvoljan $x \in l_{p,\sigma}$ neka je y proizvoljan. Neka je $p > q$. Tada na osnovu Hölderove nejednakosti imamo

$$\begin{aligned} \sum_{s\in\mathbb{N}} |x(s)y(s)|^q \tau(s) &= \sum_{s\in\mathbb{N}} |x(s)|^q \sigma^{\frac{q}{p}}(s)|y(s)|^q \tau(s)\sigma^{-\frac{q}{p}}(s) \\ &\leq \|x\|_{l_{p,\sigma}} \left[\sum_{s\in\mathbb{N}} \left(|y(s)|^{\frac{pq}{p-q}} \tau^{\frac{p}{p-q}}(s)\sigma^{-\frac{q}{p-q}}(s)\right)\right]^{\frac{p-q}{p}} . \end{aligned}$$

Da bi desna strana bila konačna, očigledno je da mora $y \in l_{\frac{pq}{p-q},\tau^{\frac{p}{p-q}}\sigma^{-\frac{q}{p-q}}}$. Ovo opet znači da je i lijeva strana konačna, tj. $y \in l_{q,\tau}/l_{p,\sigma}$.
Sa druge strane, ako je $p \leq q$, konačnost desne strane će se obezbjediti ako je y proizvoljna ograničena funkcija.

1.3 Operator superpozicije

Neka je $f = f(s,u)$ funkcija dvije varijable definisana na $\Omega \times \mathbb{R}$, čije su vrijednosti u $\mathbb{R}$. Datoj funkciji $x = x(s)$, definisanoj na Ω, primjenjujući funkciju f, dodjeljujemo funkciju $y = y(s)$, definisanu takodje na Ω, koja je data sa

$$y(s) = f(s, x(s)) \ , \ s \in \Omega \ .$$

Na ovaj način je definisan nelinearni operator F,

$$Fx = f(s,x) \tag{1.3.1}$$

za koga kažemo da je *generisan* funkcijom f. Ovako definisan operator naziva se *operator superpozicije, "unutrašnji" operator superpozicije, operator kompozicije, operator zamjene ili operator Nemytskij-og.*

Pored operatora (1.3.1), u literaturi susrećemo i operatore oblika $Fx(s) = x(\phi(s))$ (gdje je ϕ bijekcija sa Ω u Ω), koga nazivamo *"spoljašnji"* operator superpozicije, a takodje su izučavani i *"operatori množenja"*, $Fx(s) = a(s)x(s)$.

Njihova bitna razlika u odnosu na operatora (1.3.1) je ta što su oni linearni operatori. U ovom radu mi ćemo se isključivo baviti operatorom oblika (1.3.1).

Od opštih osobina operatora superpozicije (1.3.1), istaknimo kao prvo jednu "algebarsku" osobinu koju nazivamo *lokalna odredjenost* operatora F.

Lema 1.3.1. *Operator superpozicije F ima slijedeće osobine koje su ekvivalentne:*

(a) Za $D \subseteq \Omega$ važi

$$FP_D - P_D F = P_{\Omega \setminus D} F\theta \ ,$$

gdje je sa θ označena funkcija jednaka nuli skoro svuda na Ω.

(b) Za $D \subseteq \Omega$ važi:

$$P_D F P_D x = P_D F x \quad , \quad P_{\Omega \setminus D} F P_D x = P_{\Omega \setminus D} F\theta \ .$$

(c) Ako se funkcije x_1 i x_2 poklapaju na $D \subseteq \Omega$, onda se i funkcije Fx_1 i Fx_2 poklapaju na D.

Dokaz :

(a) Neka je x proizvoljna funkcija definisana na D. Tada je

$$\begin{aligned} FP_D x(s) - P_D F x(s) &= F(\chi_D(s)x(s)) - \chi_D(s)Fx(s) \\ &= \begin{cases} 0 & , \ s \in D \\ F\theta & , \ s \notin D \end{cases} \\ &= \chi_{\Omega \setminus D}(s) F\theta(s) \\ &= P_{\Omega \setminus D} F\theta(s) \ . \end{aligned}$$

(b) Neka je x definisan na D.

$$\begin{aligned} P_D F P_D x(s) = \chi_D(s) F\left(\chi_D(s)x(s)\right) &= \begin{cases} Fx(s) & , \ s \in D \\ 0 & , \ s \notin D \end{cases} \\ &= \chi_D(s) Fx(s) \\ &= P_D F x(s) \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{\Omega \setminus D} F P_D x(s) = \chi_{\Omega \setminus D}(s) F\left(\chi_D(s)x(s)\right) &= \begin{cases} 0 & , \ s \in D \\ F\theta & , \ s \notin D \end{cases} \\ &= P_{\Omega \setminus D} F\theta(s) \ . \end{aligned}$$

(c) Neka su x_1, x_2 dvije funkcije definisane na D, takve da je za svako $s \in D$ $x_1(s) = x_2(s)$. Odavde je za svako $s \in D$, $f(s, x_1(s)) = f(s, x_2(s))$, tj. važi $(\forall s \in D) F x_1(s) = F x_2(s)$. Dakle Fx_1 i Fx_2 se poklapaju na D.

Dokažimo sada ekvivalentnost ovih osobina.
Ekvivalentnost (a) i (b) slijedi direktno iz činjenice da je $FP_D x = P_D F P_D x + P_{\Omega \setminus D} F P_D x$.
Neka sada važi (a), i neka se x_1 i x_2 poklapaju na D. To znači da je $P_D x_1 = P_D x_2$. Tada zbog osobine (a) imamo

$$P_D F x_1 - F P_D x_1 = P_{\Omega \setminus D} F \theta$$

$$P_D F x_2 - F P_D x_2 = P_{\Omega \setminus D} F \theta \; .$$

Oduzimajući ove dvije jednakosti imamo

$$P_D F x_1 - P_D F x_2 = F P_D x_1 - F P_D x_2 = \theta \; ,$$

odnosno Fx_1 i Fx_2 se poklapaju na D. Dakle (a)$\Rightarrow$(c).
Neka sada važi (c) i neka je x proizvoljan, definisan na D. Tada se x i $P_D x$ poklapaju na D pa se zbog (c) i Fx i $FP_D x$ poklapaju na D, tj $Fx = P_D F x$ na D. Ali odavde onda ponovo imamo da je $P_D F x = P_D F P_D x$. Na isti način kao prethodno, možemo rezonovati za $P_D x$ i θ na $\Omega \setminus D$, i zaključiti da važi

$$P_{\Omega \setminus D} F P_D x = P_{\Omega \setminus D} F \theta \; .$$

Dakle (c)$\Rightarrow$(b). ♣

Pretpostavka da operator superpozicije zadovoljava

$$F\theta = \theta \; , \tag{1.3.2}$$

što znači da funkcija koja generiše dati operator zadovoljava jednakost

$$f(s, 0) = 0 \;\; , \; s.s. \text{ na } \mathbb{R} \; , \tag{1.3.3}$$

ne predstavlja ograničenje opštosti, jer uvijek možemo preći na posmatranje operatora $\widetilde{F}$, generisanog funkcijom

$$\tilde{f}(s, u) = f(s, x_0(s) + u) - f(s, x_0(s)) \; , \tag{1.3.4}$$

za neku fiksiranu funkciju x_0, definisanu na Ω. Operator $\widetilde{F}$ ima iste osobine kao i operator F, i zadovoljava osobinu (1.3.2). Ako operator F zadovoljava osobinu (1.3.2), svaka od navedenih osobina u Lemmi 1.3.1 je ekvivalentna činjenici da operator F komutira sa operatorom projektovanja tj., da važi $FP_D = P_D F$.

Definicija 1.3.1. Za dvije funkcije x_1 i x_2 kažemo da su *disjunktne* ako važi $supp\ x_1 \cap supp\ x_2 = \emptyset$.

Definicija 1.3.2. Za operator F kažemo da je *parcijalno aditivan*, ako za proizvoljne disjunktne funkcije x i y važi $F(x+y) = Fx + Fy$

Lema 1.3.2. *Ako operator superpozicije F zadovoljava* (1.3.2) *onda je on parcijalno aditivan.*

Dokaz : Neka su x_1 i x_2 proizvoljne disjunktne funkcije i označimo sa $D_i = supp\ x_i$ $(i = 1,2)$. Tada imamo

$$\begin{aligned} F(x_1 + x_2) &= F(P_{D_1 \cup D_2}(x_1 + x_2)) \\ &= P_{D_1 \cup D_2} F(x_1 + x_2) \\ &= P_{D_1} F(x_1 + x_2) + P_{D_2} F(x_1 + x_2) \\ &= P_{D_1} F x_1 + P_{D_2} F x_2 \\ &= F P_{D_1} x_1 + F P_{D_2} x_2 \\ &= F x_1 + F x_2 \ , \end{aligned}$$

što predstavlja parcijalnu aditivnost operatora F. ♣

Lema 1.3.1 nam izmedju ostalog garantuje da operator superpozicije preslikava ekvivalentne funkcije u ekvivalentne funkcije, tj. da on djeluje na klasama. Uslovi na funkciju f koja generiše dati operator sa takvom osobinom, zahtjevaju uvodjenje novog pojma.

Definicija 1.3.3. Funkciju f nazivamo *superpoziciono mjerljivom* ili kraće *sup-mjerljivom* ako odgovarajući operator superpozicije F preslikava prostor S u samog sebe.

Okarakterisati sup-mjerljivost pomoću osobina funkcije f, pokazalo se ni malo lakim, jer dvije funkcije f_1 i f_2 koje generišu isti operator superpozicije F mogu biti bitno različite. Pokazuje se da vrijedi:

Lema 1.3.3. *[13] Neka je $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz sup-mjerljivih funkcija koji konvergira za skoro svako $s \in \Omega$ i za sve $u \in \mathbb{R}$ ka funkciji $f(s,u)$, tada je i f sup-mjerljiva funkcija.*

Lema 1.3.3 omogućava nam proširiti klasu sup-mjerljivih funkcija, ali to još ne daje karakterizaciju sup-mjerljivosti. U tom cilju, definišimo na ovom mjestu pojam bitan za sup-mjerljivost. Neka su f_1 i f_2 definisane na $\Omega \times \mathbb{R}$ i neka je $\Delta \subset \Omega \times \mathbb{R}$. Pisat ćemo

$$f_1(s,u) \preceq f_2(s,u) \qquad ((s,u) \in \Delta) \ ,$$

ako za proizvoljno $x \in S$ čiji je graf u Δ važi

$$f_1(s,x(s)) \leq f_2(s,x(s)) \ ,$$

za skoro svako $s \in \Omega$. Ako važi

$$f_1(s,u) \preceq f_2(s,u) \qquad \text{i} \qquad f_1(s,u) \succeq f_2(s,u) \ ,$$

kažemo da su funkcije f_1 i f_2 *superpoziciono ekvivalentne* ili kraće *sup-ekvivalentne* na Δ i pišemo

$$f_1(s,u) \simeq f_2(s,u) \ .$$

Ako je neka funkcija $\tilde{f}$ sup-ekvivalentna sup-mjerljivoj funkciji f, tada je i ona sup-mjerljiva.

Caratheodory je početkom prošlog stoljeća dao dovoljne uslove za sup-mjerljivost neke funkcije,

Teorem 1.3.4. *[13] Funkcija $f = f(s,u)$ je sup-mjerljiva ukoliko je funkcija $f(s,\cdot)$ neprekidna na $\mathbb{R}$ za skoro svako $s \in \Omega$ i ako je $f(\cdot,u)$ mjerljiva na Ω za svako $u \in \mathbb{R}$.*

Navedeni uslov nazivamo *Caratheodoryjev uslov*, a funkciju f koja zadovoljava taj uslov nazivamo *Caratheodoryjevom funkcijom*.

Pored ovih, definisane su ([3]) Baire-Caratheodoryjeve kao i Shraginove funkcije koje sve daju dovoljne uslove za sup-mjerljivost. Pri tome je svaka Caratheodoryjeva funkcija i Baire-Caratheodoryjeva, a ova je opet Shraginova funkcija i na kraju, svaka Shraginova je sup-mjerljiva funkcija. Pri tome vrijedi

Lema 1.3.5. *[13] Ako su f_1 i f_2 Shraginove funkcije, tada su uslovi $f_1 \preceq f_2$ i $f_1 \leq f_2$ ekvivalentni.*

U prostorima koji se sastoje samo iz atoma ($\Omega_c = \emptyset$), data lema je trivijalna, jer su relacije $\preceq$ i $\leq$ ekvivalentne na Ω_d. Ova činjenica i Lema 1.3.3 obezbjedjuju da će konvergentan niz Shraginovih (samim tim i niz

Caratheodoryjevih) funkcija konvergirati Shraginovoj (Caratheodoryjevoj) funkciji.

Napomenimo da su Krasnosel'skij i Pokrovskij, kao i Grande i Lipinski, konstruisali primjere funkcija koje jesu sup-mjerljive ali nisu mjerljive funkcije ([3]). Detaljnije o sup-mjerljivosti može se naći npr. u [13].

Navedimo još jedno pomoćno tvrdjenje koje ćemo koristiti u narednim poglavljima,

Lema 1.3.6. *[3] Neka je a nenegativna Caratheodoryjeva funkcija na $\Omega \times \mathbb{R}$, μ mjera koja zadovoljava (1.2.1) i neka je*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a(n, x(n))\mu(n) \leq c < \infty$$

za svako $x \in S$. Tada postoji funkcija $\overline{a} \in l_1$, takva da je

$$a(n, x(n)) \leq \overline{a}(n)$$

i da važi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{a}(n)\mu(n) \leq c\ .$$

1.4 $\mathcal{L}$-karakteristika operatora

Neka je F operator i $\mathcal{P}$ neka njegova osobina, kao što je na primjer osobina da on djeluje u nekom prostoru, osobina da je neprekidan, osobina da je ograničen u nekom smislu, osobina da je kompaktan, osobina da je diferencijabilan i sl. Postavlja se pitanje, za koje prostore X i Y će operator F, posmatran kao operator izmedju X i Y, imati posmatranu osobinu $\mathcal{P}$? Dakle, za razliku od uobičajenog ispitivanja odredjene osobine operatora izmedju konkretnih prostora, ovdje želimo naći prostore izmedju kojih će operator imati odredjenu osobinu. Ovakav način razmišljana itekako ima smisla. U ispitivanju linearnih i nelinearnih operatorskih jednačina na Banachovim prostorima, problemu izbora "odgovarajućih" funkcionalnih prostora se ne posvećuje mnogo pažnje, iako je znano da za egzistenciju i jednoznačnost rješenja ovo igra bitnu ulogu. Tako je egzistencija rješenja poželjna u što je moguće "užem" prostoru, a jednoznačnost u što "širem" prostoru. Zadovoljenje ovih zahtjeva, tj. izbor ovakvih prostora je kud i kamo teži od ispitivanja konkretnih analitičkih osobina operatora u unaprijed zadatom prostoru.

Definicija 1.4.1. Skup svih uredjenih parova (X, Y) prostora, takvih da operator F, posmatran kao operator izmedju prostora X i Y, ima osobinu $\mathcal{P}$, označavamo sa $\mathcal{L}(F;\mathcal{P})$ i nazivamo ga $\mathcal{L}$-*karakteristika* operatora F za osobinu $\mathcal{P}$.

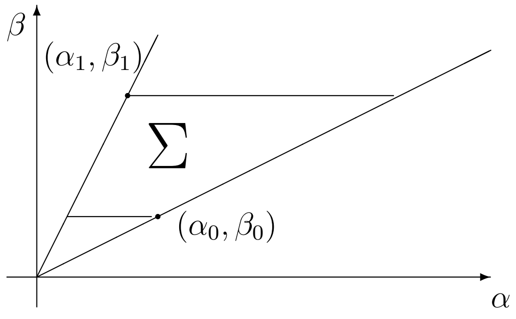
Opisati $\mathcal{L}$-karakteristiku operatora za neku osobinu, zajedno sa neophodnim i dovoljnim uslovima za tu osobinu, znači imati potpunu informaciju o toj osobini operatora na odredjenoj klasi prostora. Kao primjer navedimo *Risz-Thorinov interpolacioni teorem* i *Marcinkiewiczev interpolacioni teorem*, koji daju opis $\mathcal{L}$-karakteristike djelovanja linearnog operatora izmedju Lebesgueovih, odnosno Lorentzovih prostora ([9]).

U ovom radu mi razmatramo nelinearni operator superpozicije F na prostorima $l_{p,\sigma}$, $(1 \leq p \leq \infty)$. Kako ovu klasu prostora karakteriše broj p, definiciju $\mathcal{L}$-karakteristike ćemo izmjeniti utoliko što ćemo reći da $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}) \in \mathcal{L}(F;\mathcal{P})$ ako operator F, djelujući iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$, ima osobinu $\mathcal{P}$. Zbog $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}) \in \mathbb{R}^2_+$, jasno je da $\mathcal{L}(F;\mathcal{P}) \subset \mathbb{R}^2_+$, sa čime $\mathcal{L}$-karakteristika postaje geometrijska interpretacija osobina operatora F. Zbog $1 \leq p \leq \infty$ je $0 \leq \frac{1}{p} \leq 1$, pa ćemo često iz praktičnih razloga pisati $(\alpha, \beta) \in \mathcal{L}(F;\mathcal{P})$ gdje su $\alpha = \frac{1}{p}$ i $\beta = \frac{1}{q}$. Spomenuti primjeri (Risz-Thorinov i Marcinkijewiczev teorem), geometrijski gledano znače da su $\mathcal{L}$-karakteristike djelovanja linearnog operatora izmedju Lebesgueovih (L_p), odnosno Lorentzovih prostora (L_{pr}), konveksni skupovi ([9]). Kako je konveksnost $\mathcal{L}$-karakteristike mnogih linearnih i nelinearnih operatora jako dobra osobina tog skupa, ali u isto vrijeme ne baš lahka za dokaz za mnoge osobine $\mathcal{P}$, to se definišu i nešto "slabije" osobine $\mathcal{L}$-karakteristike.

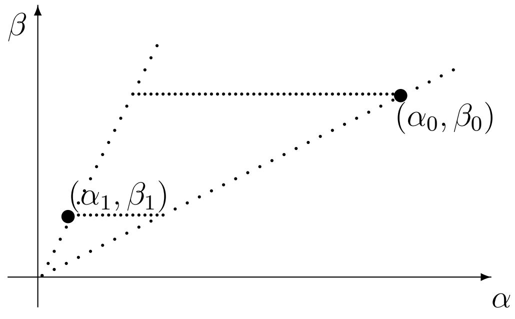
Neka su (α_0, β_0), $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathbb{R}^2_+$, $\alpha_1 \leq \alpha_0$. Označimo sa

$$\Sigma(\alpha_0, \beta_0; \alpha_1, \beta_1) = \begin{cases} \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2_+ : \ \beta_0 \leq \beta \leq \beta_1 \ , \ \frac{\beta_0}{\alpha_0} \leq \frac{\beta}{\alpha} \leq \frac{\beta_1}{\alpha_1}\} & ; \ \beta_0 \leq \beta_1, \\ \{(\alpha_0, \beta_0), (\alpha_1, \beta_1)\} & ; \ \beta_0 > \beta_1 \ . \end{cases} \tag{1.4.1}$$

Za ova dva slučaja skup $\Sigma(\alpha_0, \beta_0; \alpha_1, \beta_1)$ predstavljen je na slikama 1 i 2 .



Slika 1. $\beta_0 \leq \beta_1$



Slika 2. $\beta_0 > \beta_1$

Definicija 1.4.2. Za skup $M \subset \mathbb{R}^2_+$ kažemo da je Σ-konveksan, ako za proizvoljne $(\alpha_0, \beta_0), (\alpha_1, \beta_1) \in M$, vrijedi $\Sigma(\alpha_0, \beta_0; \alpha_1, \beta_1) \subseteq M$.

Primjetimo da je Σ-konveksnost $\mathcal{L}$-karakteristike nelinearnog operatora superpozicije, jako korisna i prikladna u izučavanju različitih svojstava $\mathcal{P}$, tog operatora (vidjeti npr. [5]).

Glava 2

Uslov djelovanja

2.1 Opšti pojmovi vezani za djelovanje operatora superpozicije

U ovom odjeljku ispitat ćemo oblast definisanosti kao i uslove djelovanja operatora superpozicije F izmedju težinskih Banachovih prostora $l_{p,\sigma}$ i $l_{q,\tau}$, koje smo definisali u **1.2**.

Najprije uvedimo novi pojam, važan za operator superpozicije koji djeluje na proizvoljnom idealnom prostoru. Neka je A proizvoljan podskup idealnog prostora X. Sa $\Sigma(A)$ označavat ćemo skup svih $x \in X$ za koje postoji konačna particija $\{D_1, D_2, \ldots, D_m\}$ od Ω i funkcije $x_j \in A$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$ takve da je $x(s) = x_j(s)$ za $s \in D_j$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Drugačije rečeno, $\Sigma(A)$ je skup svih funkcija koje imaju formu

$$x = \sum_{j=1}^{m} P_{D_j} x_j \ ,$$

gdje je $x_j \in A$ i $D_j \in \mathcal{M}$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$, a $\mathcal{M}$ je σ-algebra mjerljivih skupova. Skup $\Sigma(A)$ nazivamo Σ-*omotač skupa* A. Važnost Σ-omotača je u tome da mnoge osobine koje operator ima na skupu A, takodje su u važnosti i na $\Sigma(A)$. Tako, vrijedi:

Lema 2.1.1. *Ako operator F preslikava skup $A \subset X$ u Y, tada F preslikava $\Sigma(A)$ u Y.*

U opisivanju Σ-omotača nerijetko se koristi takozvani *funkcional razdvajanja*

$$H(x) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{m} \|P_{D_i} x\| : \ \|P_{D_i} x\| \leq 1 \right\} , \tag{2.1.1}$$

gdje se infimum uzima po svim particijama $\{D_1, D_2, \ldots, D_m\}$ skupa Ω. Funkcional H je nenegativan (moguće beskonačan) i ima slijedeće osobine:

Lema 2.1.2. *Za funkcional razdvajanja važi:*

1. $H(x) = \|x\|$ *za* $\|x\| \leq 1$ *i* $H(x) \geq \|x\|$ *za* $\|x\| > 1$.
2. *Za* $x, y \in X$ *iz* $|x| \leq |y|$ *slijedi* $H(x) \leq H(y)$.
3. $H((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)H(x) + \lambda H(y) + 2H(x)H(y)$, $x, y \in X$, $\lambda \in (0,1)$.
4. $H(x+y) \leq H(x) + H(y)$ *za* $x, y \in X$ *disjunktni.*

Dokaz ove leme se izvodi ne koristeći eksplicitno formule za funkcional H, medjutim samo izračunavanje funkcionala H je veoma teško, čak teže i od opisivanja Σ-omotača. Tako u slučaju Lebesgueovih prostora L_p $(1 \leq p < \infty)$ imamo

$$H(x) = \|x\|_p \lceil \|x\|_p \rceil^{p-1} ,$$

(gdje $\lceil x \rceil$ označava najmanji prirodni broj veći ili jednak od x), ali u slučaju $l_{p,\sigma}$ nije moguće dati eksplicitni oblik funkcionala H već samo njegovu procjenu

$$\|x\|_{l_{p,\sigma}}^p \leq H(x) \leq 1 + 2 \|x\|_{l_{p,\sigma}}^p ,$$

za $x \in \{\phi \in l_{p,\sigma} : \ |\phi(s)|^p \sigma(s) \leq 1\} = \Delta$, dok za x izvan Δ, H uzima beskonačnu vrijednost.

Vezu izmedju Σ-omotača i funkcionala H opisuje

Lema 2.1.3. *Σ-omotač skupa $B_1(X)$ sastoji se od svih onih $x \in X$ za koje je $H(x)$ konačan.*

Jasno je da funkcional H omogućava opisivanje ne samo skupa $\Sigma = \Sigma(B_1(X))$, nego i skupova oblika $\Sigma(x_0 + B_r(X))$. Zaista

$$\Sigma(x_0 + B_r(X)) = \left\{ x \in X : \ H\left(\frac{x - x_0}{r}\right) < \infty \right\} .$$

Definicija 2.1.1. Skup $A \subset X$ nazivamo Σ-*stabilnim* ako važi $\Sigma(A) = A$.

U terminologiji prethodne definicije možemo iskazati slijedeću lemu kao posljedicu Leme 2.1.1:

Lema 2.1.4. *Oblast definisanosti ($\mathcal{D}(F)$) operatora superpozicije F generisanog funkcijom f i posmatranog izmedju $l_{p,\sigma}$ i $l_{q,\tau}$ je Σ-stabilan, tj.*

$$\Sigma(\mathcal{D}(F)) = \mathcal{D}(F)$$

Za nas će od posebnog značaja u ovom radu biti slijedeća karakterizacija Σ-omotača jedinične kugle u $l_{p,\sigma}$ ($\Sigma(B_1(l_{p,\sigma})) = \Sigma$):

Lema 2.1.5. *Neka je $x \in l_{p,\sigma}$. Tada važi:*
$x \in \Sigma$ ako i samo ako se može predstaviti u obliku

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_m \ , \tag{2.1.2}$$

gdje su x_i medjusobno disjunktne funkcije iz jedinične lopte u $l_{p,\sigma}$.
Pri tome, ako $x \in \Sigma$, on se može predstaviti u obliku (2.1.2), pri čemu je $m \leq 2||x||^p_{l_{p,\sigma}} + 1$.

Dokaz : ($\Longleftarrow$)

Neka je $x \in l_{p,\sigma}$ proizvoljan za koga postoje funkcije $x_1, x_2, \ldots, x_m \in B_1(l_{p,\sigma})$, medjusobno disjunktne, takve da je

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_m \ .$$

Iz disjunktnosti, za $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $i \neq j$, imamo $supp\ x_i \cap supp\ x_j = \emptyset$. Označimoli sa $D_i = supp\ x_i$ ($i \in \{1, 2, \ldots, m\}$), tada zbog činjenice

$$(\forall s \in \mathbb{N})\ x_i(s)x_j(s) = 0\ ,\ i \neq j\ , i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}\ ,$$

skupovi D_i ($i \in \{1, 2, \ldots, m\}$) čine particiju od $\mathbb{N}$ i pri tome je $P_{D_i}x_i = x_i$. Ovo onda znači da je

$$x = \sum_{i=1}^{m} P_{D_i}x$$

tj., $x \in \Sigma$.
($\Longrightarrow$)

Neka je sada $x \in \Sigma$. Neka je $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$ neka konačna particija skupa $\mathbb{N}$ (tj. neka važi $\cup_{i=1}^m \omega_i = \mathbb{N}$ i za $i \neq j$, $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset$) koja zadovoljava osobinu

$$(\forall i = 1, 2, \dots, m) \ ||P_{\omega_i} x||_{l_{p,\sigma}} \leq 1 \ .$$

Konačnost particije je moguća, jer je $x \in l_{p,\sigma}$ tj. vrijedi,

$$\sum_{s \geq k} |x(s)|^p \sigma(s) \to 0, \ k \to \infty \ .$$

Naime, ako uzmemo dovoljno veliko $m \in \mathbb{N}$, onda će biti $\sum_{s \geq k} |x(s)|^p \sigma(s) \leq 1$ za sve $k \geq m$. U tom slučaju možemo izabrati particiju od $\mathbb{N}$ na slijedeći način:

$$\omega_1 = \{1\}, \ \omega_2 = \{2\}, \dots, \omega_{m-1} = \{m-1\}, \ \omega_m = \{m, m+1, \dots\}$$

za koju je

$$\|P_{\omega_i} x\|_{l_{p,\sigma}} \leq 1 \ , \ i = 1, 2, \dots, m \ .$$

Označimo sada sa $x_i = P_{\omega_i} x$ $(i = 1, 2, \dots, m)$. Zbog disjunktnosti skupova ω_i jasno je da važi

$$(\forall s \in \mathbb{N}) \ x_i(s) x_j(s) = 0 \ , \ i \neq j \ , \ i, j \in \{1, 2, \dots m\} \ .$$

Osim toga je $||x_i||_{l_{p,\sigma}} = ||P_{\omega_i} x||_{l_{p,\sigma}} \leq 1$, tj. $x_i \in B_1(l_{p,\sigma})$, $i = 1, 2, \dots, m$. Neka je sada $s \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Tada postoji $j_0 \in \{1, 2, \dots, m\}$ takav da $s \in \omega_{j_0}$, a zbog disjunktnosti skupova ω_i, j_0 je jedinstven. S druge strane, disjunktnost funkcija nam daje

$$x(s) = x_{j_0}(s) = x_1(s) + x_2(s) + \cdots + x_m(s) \ ,$$

a budući da je $s \in \mathbb{N}$ bilo koji, važi

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_m \ .$$

Možemo pretpostaviti da je za sve $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, osim eventualno jednog, zadovoljen uslov $||x_j||_{l_{p,\sigma}} > \frac{1}{2}$. Zaista, u suprotnom, ako bi imali više takvih za koje je $\|x_i\|_{l_{p,\sigma}} \leq \frac{1}{2}$, napravili bi njihovo grupisanje od po dva uz eventualno jedan viška. Na ovim grupama od po dva primjenili bi slijedeći postupak: neka su x_{i_1} i x_{i_2} $(i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, m\})$ za koje je $||x_{i_1}||_{l_{p,\sigma}} \leq \frac{1}{2}$ i $||x_{i_2}||_{l_{p,\sigma}} \leq \frac{1}{2}$.

Tada bi posmatrali jednu funkciju $x_i = x_{i_1} + x_{i_2}$ umjesto dvije, x_{i_1} i x_{i_2}, za koju imamo, da je za proizvoljan $j \in \{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{i_1, i_2\}$

$$x_i x_j = x_{i_1} x_j + x_{i_2} x_j = 0$$

i $||x_i||_{l_{p,\sigma}} \leq ||x_{i_1}||_{l_{p,\sigma}} + ||x_{i_2}||_{l_{p,\sigma}} \leq 1$. Ako bi svi novi sabirci po normi bili veći od $\frac{1}{2}$ tvrdnja sa početka je tačna. U suprotnom navedeni postupak bi ponavljali dok to ne bude tačno.
Dakle, neka je $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ onaj eventualni za koga je

$$(\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{k\}) \ ||x_i||^p_{l_{p,\sigma}} > \frac{1}{2} \wedge \ ||x_k||^p_{l_{p,\sigma}} \leq \frac{1}{2} \ .$$

Na osnovu ovoga je

$$\sum_{i=1}^{m} ||x_i||^p_{l_{p,\sigma}} \geq (m-1)\frac{1}{2} \ .$$

Sa druge strane imamo

$$\begin{aligned} ||x||^p_{l_{p,\sigma}} &= \sum_{s \in \mathbb{N}} |x(s)|^p \sigma(s) \\ &= \sum_{s \in \mathbb{N}} \left| \sum_{i=1}^{m} |x_i(s)| \right|^p \sigma(s) \\ &\geq \sum_{i=1}^{m} \sum_{s \in \mathbb{N}} |x_i(s)|^p \sigma(s) \\ &= \sum_{i=1}^{m} ||x_i||^p_{l_{p,\sigma}} \ , \end{aligned}$$

tj. $||x||^p_{l_{p,\sigma}} \geq (m-1)\frac{1}{2}$, odakle slijedi da je $m \leq 2||x||^p_{l_{p,\sigma}} + 1$. ♣

Napomenimo ovde da ćemo za funkciju $f(s, u)$, koja generiše operator superpozicije, u daljem uvijek podrazumijevati da je sup-mjerljiva funkcija i da su $1 \leq p, q < \infty$. Slučaj kada je $p = \infty$ ili $q = \infty$ bit će razmatran posebno u glavi **9**.

2.2 Djelovanje operatora superpozicije na prostorima $l_{p,\sigma}$

U prostorima funkcija moguće je dati potrebne i dovoljne uslove djelovanja operatora superpozicije. Te uslove, iskazane za operator superpozicije u Lebesgueovim prostorima daje:

Teorem 2.2.1. *Operator superpozicije F generisan Charateodorijevom funkcijom $f(s,u)$ djeluje iz L_p u L_q ako i samo ako postoje funkcija $a \in L_q$, konstante $b \geq 0$ i $\delta > 0$, takvi da važi:*

$$|f(s,u)| \leq a(s) + b\,|u|^{\frac{p}{q}} \ , \tag{2.2.1}$$

za sve $(s,u) \in \Omega \times \mathbb{R}$ za koje je zadovoljeno

$$\lambda(s) \leq \delta \ , \ \ \mu(s)\,|u|^p \leq \delta^p \ . \tag{2.2.2}$$

Jasno je da u prostorima bez atoma (tj., ako je $\Omega_d = \emptyset$) uslov (2.2.2) je suvišan (jer je $\lambda(s) = \mu(s) = 0$) i pri tome klasa funkcija $f(s,u)$ koje generišu operatore superpozicije iz L_p u L_q je prilično uska. Naime, ta klasa sadrži funkcije polinomijalnog rasta po u (sa maksimalnim eksponentom $\frac{p}{q}$).

Sa druge strane, u prostorima sa diskretnom mjerom (kada je $\Omega_c = \emptyset$) uslov (2.2.2) je izuzetno ograničavajući, ali kao što ćemo vidjeti, to neće suziti dopustivu klasu funkcija koje generišu operatore superpozicije koji djeluju izmedju takvih prostora.

Uslove djelovanja u Banachovim prostorima funkcija koje su definisane na $\Omega = \mathbb{N}$, za koje je $\Omega_c = \emptyset$, dajemo u slijedećoj tvrdnji

Teorem 2.2.2. *Neka je F operator superpozicije generisan funkcijom $f(s,u)$. F preslikava $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$ ako i samo ako postoje $a \in l_{q,\tau}$, $b \geq 0$, $\delta > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$, takvi da važi*

$$|f(s,u)| \leq a(s) + b\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|u(s)|^{\frac{p}{q}} \ , \tag{2.2.3}$$

kad god je $s \geq n_0$ i $\sigma(s)^{\frac{1}{p}}|u| \leq \delta$.

Dokaz : $(\Longrightarrow)$

Bez umanjenja opštosti, prema rečenom na strani 10, pretpostavimo da je $f(s,0) = 0$, što osigurava da je operator F parcijalno aditivan. Pokažimo da za proizvoljno $x \in l_{p,\sigma}$ važi:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})\ (||x||_{l_{p,\sigma}} < \delta_\varepsilon \Rightarrow ||FP_{n_\varepsilon}x||_{l_{q,\tau}} \leq \varepsilon) \ , \tag{2.2.4}$$

gdje je $P_n = P_{\{n+1,n+2,\dots\}}$, operator projektovanja. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svako $\delta > 0$ i za svako $n \in \mathbb{N}$, možemo naći $x_n \in l_{p,\sigma}$ tako da važi

$$||x_n||_{l_{p,\sigma}} < \delta \wedge ||FP_n x_n||_{l_{q,\tau}} > \varepsilon \ .$$

Kako je

$$P_n - P_{n+1} = \chi_{\{n+1,n+2,\dots\}} - \chi_{\{n+2,n+3,\dots\}} = \begin{cases} 1 & ; \quad \{n+1,\dots\} \setminus \{n+2,\dots\} \\ 0 & ; \quad \{n+1,\dots\} \cap \{n+2,\dots\} \end{cases}$$

imamo,

$$\lim_{m\to\infty} ||F(P_n - P_m)x_n|| = ||FP_n x_n|| \ .$$

Ovo znači da proizvoljnom $n \in \mathbb{N}$ možemo pridružiti $n' \in \mathbb{N}$ tako da važi

$$||(P_n - P_{n'})x_n||_{l_{p,\sigma}} \leq \delta \wedge ||F(P_n - P_{n'})x_n||_{l_{q,\tau}} > \varepsilon \ .$$

Indukcijom možemo konstruisati niz prirodnih brojeva $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ takav da je $n_1 = 1, n_2 = (n_1)'$, ..., $n_{k+1} = (n_k)'$, i da za proizvoljno $k \in \mathbb{N}$ važi:

$$||(P_{n_k} - P_{n_{k+1}})x_{n_k}||_{l_{p,\sigma}} \leq 2^{-k} \wedge ||F(P_{n_k} - P_{n_{k+1}})x_{n_k}||_{l_{q,\tau}} > \varepsilon \ .$$

Konstruišimo sada $x_* = \sum_{k=1}^{\infty}(P_{n_k} - P_{n_{k+1}})x_{n_k}$. Tada iz

$$\begin{aligned} \sum_{s\in\mathbb{N}} |x_*(s)|^p \sigma(s) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s\in\mathbb{N}} (P_{n_k}(s) - P_{n_{k+1}}(s))|x_{n_k}(s)|^p \sigma(s) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=n_k}^{n_{k+1}} |P_{n_k} x_{n_k}(s)|^p \sigma(s) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} ||x_{n_k}||^p_{l_{p,\sigma}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty \ , \end{aligned}$$

slijedi $x_* \in l_{p,\sigma}$.
Sa druge strane je

$$\begin{aligned} ||Fx_*||^q_{l_{q,\tau}} &= \sum_{s\in\mathbb{N}} |f(s, x_*(s))|^q \tau(s) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s\in\mathbb{N}} |f(s,(P_{n_k} - P_{n_{k+1}})x_{n_k}(s))|^q \tau(s) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=n_k}^{n_{k+1}} |f(s, x_{n_k}(s))|^q \tau(s) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^q = \infty \ , \end{aligned}$$

tj. $Fx_* \notin l_{q,\tau}$, što je kontradikcija sa pretpostavkom o djelovanju operatora F. Dakle, vrijedi relacija (2.2.4).
Neka je sada $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Označimo sa f_ε funkciju

$$f_\varepsilon(s,u) = \max\left\{0, |f(s,u)| - 2^{\frac{1}{q}}\delta^{-\frac{p}{q}}\varepsilon\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|u(s)|^{\frac{p}{q}}\right\} . \tag{2.2.5}$$

Za proizvoljan $x \in l_{p,\sigma}$, neka su δ_ε i n_ε brojevi za koje važi (2.2.4). Za x formirajmo skup

$$D(x) = \left\{s > n_\varepsilon : f(s,x) > 2^{\frac{1}{q}}\delta_\varepsilon^{-\frac{p}{q}}\varepsilon\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|x(s)|^{\frac{p}{q}}\right\} . \tag{2.2.6}$$

Označimo sa $\tilde{x} = P_{D(x)}x$. Na osnovu Lemme 2.1.5, $\tilde{x}$ možemo razložiti na $m = [2\delta_\varepsilon^{-p}\sigma(s)\tau^{-1}(s)||x||_{l_{p,\sigma}}^p]$ disjunktnih funkcija z_j, takvih da je $||z_j|| \leq \delta$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
&\sum_{s\in D(x)} |f_\varepsilon(s,x(s))|^q\tau(s) = \sum_{s\in D(x)} |f_\varepsilon(s,\tilde{x}(s))|^q\tau(s) \\
= &\sum_{s\in D(x)} \left| f_\varepsilon(s, \sum_{j=1}^m z_j(s))\right|^q \tau(s) \\
= &\sum_{s\in D(x)} \sum_{j=1}^m |f_\varepsilon(s, z_j(s))|^q\tau(s) \\
= &\sum_{j=1}^m \sum_{s\in D(x)} |f_\varepsilon(s, z_j(s))|^q\tau(s) \\
= &\sum_{j=1}^m \sum_{s\in D(x)} \left| f(s,z_j) - 2^{\frac{1}{q}}\delta_\varepsilon^{-\frac{p}{q}}\varepsilon\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|z_j(s)|^{\frac{p}{q}}\right|^q \tau(s) \\
\leq &\sum_{j=1}^m \left(\sum_{s\in D(x)} |f(s,z_j(s))|^q\tau(s) - \sum_{s\in D(x)} 2\delta_\varepsilon^{-p}\varepsilon^q\sigma(s)|z_j(s)|^p \right) \\
= &\sum_{j=1}^m \sum_{s\in D(x)} |f(s,z_j(s))|^q\tau(s) - 2\delta_\varepsilon^{-p}\varepsilon^q \sum_{j=1}^m ||z_j||_{l_{p,\sigma}}^p \\
\leq &\ m\varepsilon^q - 2\delta_\varepsilon^{-p}\varepsilon^q||\tilde{x}||^p \\
\leq &\ m\varepsilon^q - (m-1)\varepsilon^q = \varepsilon^q .
\end{aligned}$$

Dakle vrijedi $||f_\varepsilon(\cdot,x)||_{l_{q,\tau}} \le \varepsilon$, za proizvoljno $x \in l_{p,\sigma}$.
Označimo sa

$$a(s) = \begin{cases} 0 & ; \quad s \notin D(x), \\ \sup_{|u|\le\delta_\varepsilon} f_\varepsilon(s,u) & ; \quad s \in D(x). \end{cases} \tag{2.2.7}$$

Tada važi

$$||a||^q_{l_{q,\tau}} = \sum_{s\in\mathbb{N}} |a(s)|^q \tau(s) = \sum_{s\in D(x)} \left(\sup_{|u|\le\delta_\varepsilon} f_\varepsilon(s,u) \right)^q \tau(s) \le \varepsilon^q \ ,$$

tj. $a \in l_{q,\tau}$. Sada iz (2.2.5) i (2.2.7) slijedi,

$$a(s) \ge f_\varepsilon(s,u) \ge |f(s,u)| - 2^{\frac{1}{q}} \delta_\varepsilon^{-\frac{p}{q}} \varepsilon \sigma^{\frac{1}{q}}(s) \tau^{-\frac{1}{q}}(s) |u(s)|^{\frac{p}{q}}$$

za $\sigma^{\frac{1}{p}}|u| \le \delta_\varepsilon$ i $s > n_\varepsilon$. Odavde neposredno imamo

$$|f(s,u)| \le a(s) + b\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|u|^{\frac{p}{q}} \ ,$$

gdje je $b = 2^{\frac{1}{q}} \delta_\varepsilon^{-\frac{p}{q}} \varepsilon$.
($\Longleftarrow$)
Neka je zadovoljen uslov

$$|f(s,u)| \le a(s) + b\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|u|^{\frac{p}{q}} \ , \ (\sigma(s)^{\frac{1}{p}}|u| \le \delta \ , \ s \ge n) \ .$$

Tada za proizvoljan $x \in l_{p,\sigma}$ imamo

$$\begin{aligned} ||Fx||^q_{l_{q,\tau}} &= \sum_{s\in\mathbb{N}} |f(s,x(s))|^q \tau(s) \\ &\le \sum_{s\in\mathbb{N}} \left(a(s) + b\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}|x(s)|^{\frac{p}{q}} \right)^q \tau(s) \\ &\le 2^q \left(\sum_{s\in\mathbb{N}} (a(s))^q \tau(s) + b^q \sum_{s\in\mathbb{N}} |x(s)|^p \sigma(s) \right) \ , \end{aligned}$$

a ovo je očigledno konačno jer $a \in l_{q,\tau}$ i $x \in l_{p,\sigma}$. Dakle $F : l_{p,\sigma} \to l_{q,\tau}$. ♣

2.3 $\mathcal{L}$-karakteristika djelovanja operatora superpozicije

Neka je F operator superpozicije generisan funkcijom $f(s,u)$ i neka je osobina $\mathcal{P}$, djelovanje (act.) operatora F izmedju $l_{p,\sigma}$ i $l_{q,\tau}$, tj. posmatrajmo $\mathcal{L}$-karakteristiku $\mathcal{L}(F, act.)$ djelovanja operatora F na težinskim Banachovim prostorima nizova. Vrijedi slijedeća tvrdnja:

Lema 2.3.1. *Neka* (α_0, β_0), $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathcal{L}(F, act.)$. *Tada je*

$$\Sigma(\alpha_0, \beta_0; \alpha_1, \beta_1) \subseteq \mathcal{L}(F, act.) \ ,$$

gdje je $\Sigma(\alpha_0, \beta_0; \alpha_1, \beta_1)$ *dat sa (1.4.1).*

Dokaz : Neka su (α_0, β_0), $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathcal{L}(F, act.)$. Na osnovu Teorema 2.2.2, imamo:

$$|f(s,u)| \leq a_0(s) + b_0 \sigma^{\beta_0}(s) \tau^{-\beta_0}(s) |u|^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}} \quad , \quad a_0 \in l_{\frac{1}{\beta_0}, \sigma} \ , \ b_0 \geq 0 \ ,$$

$$|f(s,u)| \leq a_1(s) + b_1 \sigma^{\beta_1}(s) \tau^{-\beta_1}(s) |u|^{\frac{\beta_1}{\alpha_1}} \quad , \quad a_1 \in l_{\frac{1}{\beta_1}, \sigma} \ , \ b_1 \geq 0 \ ,$$

odakle slijedi:

$$\begin{aligned}
|f(s,u)| &\leq \min \left\{ a_0(s) + b_0 \sigma^{\beta_0}(s) \tau^{-\beta_0}(s) |u|^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}}, a_1(s) + b_1 \sigma^{\beta_1}(s) \tau^{-\beta_1}(s) |u|^{\frac{\beta_1}{\alpha_1}} \right\} \\
&\leq \min\{a_0(s), a_1(s)\} + \min \left\{ a_0(s), b_1 \sigma^{\beta_1}(s) \tau^{-\beta_1}(s) |u|^{\frac{\beta_1}{\alpha_1}} \right\} + \\
&+ \min \left\{ a_1(s), b_0 \sigma^{\beta_0}(s) \tau^{-\beta_0}(s) |u|^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}} \right\} + \\
&+ \min \left\{ b_0 \sigma^{\beta_0}(s) \tau^{-\beta_0}(s) |u|^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}}, b_1 \sigma^{\beta_1}(s) \tau^{-\beta_1}(s) |u|^{\frac{\beta_1}{\alpha_1}} \right\} \ .
\end{aligned}$$

Dakle, funkciju f možemo zapisati kao $f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$, pri čemu je

$$\begin{aligned}
|f_1(s,u)| &\leq \min\{a_0(s), a_1(s)\}, \\
|f_2(s,u)| &\leq \min \left\{ a_0(s), b_1 \sigma^{\beta_1}(s) \tau^{-\beta_1}(s) |u|^{\frac{\beta_1}{\alpha_1}} \right\}, \\
|f_3(s,u)| &\leq \min \left\{ a_1(s), b_0 \sigma^{\beta_0}(s) \tau^{-\beta_0}(s) |u|^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}} \right\}, \\
|f_4(s,u)| &\leq \min \left\{ b_0 \sigma^{\beta_0}(s) \tau^{-\beta_0}(s) |u|^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}}, b_1 \sigma^{\beta_1}(s) \tau^{-\beta_1}(s) |u|^{\frac{\beta_1}{\alpha_1}} \right\} \ .
\end{aligned}$$

Pri tome $\mathcal{L}(F, act.) \supseteq \mathcal{L}(F_1, act.) \cap \mathcal{L}(F_2, act.) \cap \mathcal{L}(F_3, act.) \cap \mathcal{L}(F_4, act.)$, gdje su F_i operatori generisani funkcijama f_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Označimo li sa :

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \{(\alpha, \beta) : \beta_0 \le \beta \le \beta_1\} \cup \{(\alpha, \beta) : \beta_1 \le \beta \le \beta_0\}, \\
M_2 &= \left\{(\alpha, \beta) : 0 \le \alpha \le \beta_0 \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \alpha \frac{\beta_1}{\alpha_1} \le \beta \le \beta_0\right\} \\
&\quad \cup \left\{(\alpha, \beta) : \beta_0 \frac{\alpha_1}{\beta_1} \le \alpha < \infty, \beta_0 \le \beta \le \alpha \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right\}, \\
M_3 &= \left\{(\alpha, \beta) : 0 \le \alpha \le \beta_1 \frac{\alpha_0}{\beta_0}, \alpha \frac{\beta_0}{\alpha_0} \le \beta \le \beta_1\right\} \\
&\quad \cup \left\{(\alpha, \beta) : \beta_1 \frac{\alpha_0}{\beta_0} \le \alpha < \infty, \beta_1 \le \beta \le \alpha \frac{\beta_0}{\alpha_0}\right\}, \\
M_4 &= \left\{(\alpha, \beta) : \frac{\beta_0}{\alpha_0} \le \frac{\beta}{\alpha} \le \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right\} ,
\end{aligned}
$$

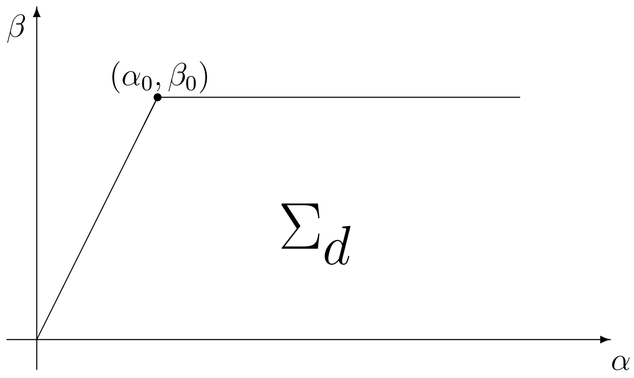
onda je $M_1 \subseteq \mathcal{L}(F_1, act.)$, $M_2 \subseteq \mathcal{L}(F_2, act.)$, $M_3 \subseteq \mathcal{L}(F_3, act.)$ i $M_4 \subseteq \mathcal{L}(F_4, act.)$. Sada posmatrajmo presjek ova četri skupa u zavisnosti od β_0 i β_1:
Ako je $\beta_0 < \beta_1$ onda je taj presjek četvorougao prikazan na slici 1.
Ako je $\beta_0 = \beta_1$ onda je to prava koja spaja tačke (α_0, β_0) i (α_1, β_1).
Ako je $\beta_0 > \beta_1$ onda je taj presjek dvoelementni skup $\{(\alpha_0, \beta_0), (\alpha_1, \beta_1)\}$ (slika 2). ♣

Lema 2.3.1 ustvari govori da je $\mathcal{L}(F, act.)$ Σ-konveksan skup. Osim toga važi i slijedeća tvrdnja koja je na odredjen način obrat tvrdnje Leme 2.3.1:

Lema 2.3.2. *Neka je M proizvoljan Σ-konveksan podskup od R^2_+. Tada postoji funkcija $f(s, u)$ koja generiše operator superpozicije F, takav da je $\mathcal{L}(F, act.) = M$.*

Lema 2.3.1 i Lema 2.3.2 pokazuju da se u opštem slučaju $\mathcal{L}(F, act.)$, pri ovim pretpostavkama, ne može preciznije opisati nego preko Σ-konveksnosti. U specijalnim slučajevima to je ipak moguće, naime to je moguće ako izmedju prostora L_p, za različite p, postoje posebne veze. Tako u slučaju težinskih Banachovih prostora $l_{p,\sigma}$, znamo da za $p \le q$ važi $l_{p,\sigma} \subset l_{q,\sigma}$. Ako uz to još i za svako $s \in \mathbb{N}$, $\mu(s) \ge \mu_0 > 0$, onda definišući skup

$$\Sigma_d(\alpha_0, \beta_0) = \left\{(\alpha, \beta) : 0 \le \alpha \le \alpha_0, \beta \le \alpha \frac{\beta_0}{\alpha_0}\right\} \cup \{(\alpha, \beta) : \alpha_0 \le \alpha < \infty, \beta \le \beta_0\} ,$$



Slika 3. $\Sigma_d(\alpha_0, \beta_0)$

imamo

Teorem 2.3.3. *Ako* $(\alpha, \beta) \in \mathcal{L}(F, act.)$*, onda je* $\Sigma_d(\alpha, \beta) \subset \mathcal{L}(F, act.)$*.*

Za linearne operatore, što tvrdi Risz-Thorinov teorem interpolacije, $\mathcal{L}$-karakteristika djelovanja je konveksan skup. Glavnim rezultatom ovdje pokazujemo da to isto važi i za nelinearni operator superpozicije. Dokažimo prvo dvije leme.

Lema 2.3.4. *Neka su* $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 < \infty$ *i neka operator superpozicije* F *generisan funkcijom* $f(s, u)$ *djeluje iz* $l_{p_0,\sigma}$ *u* $l_{q_0,\tau}$ *i iz* $l_{p_1,\sigma}$ *u* $l_{q_1,\tau}$*. Tada postoje konstante* Λ_0 *i* $\delta > 0$ *i postoji funkcija* $h \in l_{p_0,\sigma}$*, takvi da važi:*

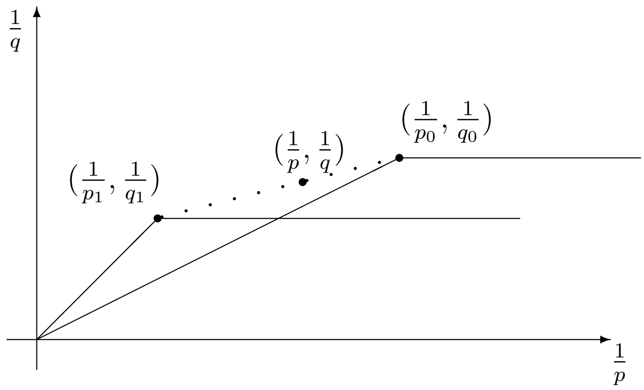
$$(\forall x \in l_{p,\sigma}) \ \left(\|x\|_{l_{p,\sigma}} \leq \delta \Rightarrow \|Fhx\|_{l_{q,\tau}} \leq \Lambda_0 \right) \ ,$$

gdje je

$$\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_0} + \frac{1-\alpha}{p_1} \ , \ \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{q_0} + \frac{1-\alpha}{q_1} \ ; \ (0 \leq \alpha \leq 1) \ .$$

Dokaz : Posmatrajmo slučaj $q_1 > q_0, p_1 > p_0$ i $\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_1}{q_1}$. Neka su p i q takvi da važi

$$\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_0} + \frac{1-\alpha}{p_1} \ , \ \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{q_0} + \frac{1-\alpha}{q_1} \ ; \ (0 \leq \alpha \leq 1) \ .$$



Slika 4. Konveksnost $\mathcal{L}$-karakteristike djelovanja.

Iz uslova djelovanja operatora F imamo:

$$(\exists a_i \in l_{q_i,\tau})\,(\exists \delta_i > 0, n_i \in \mathbb{N}, b_i \geq 0)\ \ |f(s,u)| \leq a_i(s) + b_i \left(\frac{\sigma(s)}{\tau(s)}\right)^{\frac{1}{q_i}} |u|^{\frac{p_i}{q_i}}$$

čim je $s \geq n_i$, $\sigma^{\frac{1}{p_i}}(s)\,|u| \leq \delta_i$ $(i = 0,1)$. Označimo li sa $\delta_* = \min\{\delta_0, \delta_1, 1\}$ i sa $n_* = \max\{n_0, n_1\}$, tada je

$$|f(s,u)| \leq \left(a_0^{q_0}(s) + b_0^{q_0}\frac{\sigma(s)}{\tau(s)}\,|u|^{p_0}\right)^{\frac{\alpha}{q_0}} \left(a_1^{q_1}(s) + b_1^{q_1}\frac{\sigma(s)}{\tau(s)}\,|u|^{p_1}\right)^{\frac{1-\alpha}{q_1}}, \quad (2.3.1)$$

za $s \geq n_*$ i $\sigma^{\frac{1}{p}}(s)\,|u| \leq \delta_*$. Izaberimo sada $h \in l_{p_0,\sigma}$ takav da je $\|h\|_{l_{p_0,\sigma}} \leq \delta$ i da važi

$$(\forall s \leq n_*)\ h(s) = 0\ ,$$

gdje je δ proizvoljan, sa svojstvom da je $0 < \delta < \delta_*$.
Iz uslova $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_0} + \frac{1-\alpha}{p_1}$, $(0 \leq \alpha \leq 1)$ slijedi

$$p_0 = \frac{\alpha p p_1}{p_1 - (1-\alpha)p} \leq \frac{p p_1}{p_1 - (1-\alpha)p} \leq \frac{p p_1}{p_1 - p}\ .$$

Budući da iz $p < q \ \Rightarrow\ l_{p,\sigma} \subset l_{q,\sigma}$, imamo

$$l_{p_0,\sigma} \subset l_{\frac{pp_1}{p_1-p},\sigma} \subset l_{\frac{pp_1}{p_1-p}}\ ,$$

i zbog $l_{\frac{pp_1}{p_1-p}} = l_{p,\sigma}/l_{p_1,\sigma}$, gdje je $l_{p,\sigma}/l_{p_1,\sigma}$ prostor multiplikatora uveden sa (1.2.5), to zaključujemo

$$h \in l_{p_0,\sigma}\ \Rightarrow\ h \in l_{p,\sigma}/l_{p_1,\sigma}\ ,$$

odakle po definiciji prostora multiplikatora imamo

$$(\forall\ x \in l_{p_1,\sigma})\ hx \in l_{p,\sigma}\ .$$

Zbog činjenice da je $l_{p,\sigma} \subset l_{p_1,\sigma}$, za $p < p_1$, važit će i

$$(\forall\ x \in l_{p,\sigma})\ hx \in l_{p_1,\sigma}\ .$$

Neka je sada $x \in l_{p,\sigma}$, takav da je $\|x\|_{l_{p,\sigma}} \leq \delta$. Ovo znači da je za svaki prirodan broj s, $|x(s)|^p\sigma(s) \leq \delta^p$. Tada je za izabrano $h \in l_{p_0,\sigma}$

$$\|hx\|^p_{l_{p,\sigma}} = \sum_{s\in\mathbb{N}} |x(s)|^p|h(s)|^p\sigma(s) \leq \sum_{s\in\mathbb{N}} |x(s)|^p\sigma(s) \leq \delta^p$$

(jer je zbog izbora funkcije h, za dovoljno veliko $s \in \mathbb{N}$, $|h(s)| \leq 1$). Dakle, imamo da je za $s \geq n_*$, $|x(s)h(s)|^p\sigma(s) < \delta^p$, tj. $|hx|\sigma^{\frac{1}{p}} < \delta < \delta_*$, pa na osnovu (2.3.1) imamo

$$|f(s,h(s)x(s))|^q \leq \left(a_0^{q_0}(s) + b_0^{q_0}\frac{\sigma(s)}{\tau(s)}\,|hx|^{p_0}\right)^{\frac{\alpha q}{q_0}} \left(a_1^{q_1}(s) + b_1^{q_1}\frac{\sigma(s)}{\tau(s)}\,|hx|^{p_1}\right)^{\frac{(1-\alpha)q}{q_1}}\ .$$

Množenjem posljednje nejednakosti sa težinskom funkcijom τ i sumiranjem po $s \in \mathbb{N}$ dobijamo

$$\begin{aligned}
&\sum_{s\in\mathbb{N}} |f(s,h(s)x(s))|^q\,\tau(s)\\
\leq\ &\sum_{s\in\mathbb{N}} \Bigg[\left(a_0^{q_0}(s) + b_0^{q_0}\frac{\sigma(s)}{\tau(s)}\,|h(s)x(s)|^{p_0}\right)^{\frac{\alpha q}{q_0}} \tau^{\frac{\alpha q}{q_0}}(s)\\
&\cdot\left(a_1^{q_1}(s) + b_1^{q_1}\frac{\sigma(s)}{\tau(s)}\,|h(s)x(s)|^{p_1}\right)^{\frac{(1-\alpha)q}{q_1}} \tau^{\frac{(1-\alpha)q}{q_1}}(s)\Bigg]\\
\leq\ &\left[\sum_{s\in\mathbb{N}} a_0^{q_0}(s)\tau(s) + b_0^{q_0}\sum_{s\in\mathbb{N}} |h(s)x(s)|^{p_0}\sigma(s)\right]^{\frac{\alpha q}{q_0}}\\
&\cdot\left[\sum_{s\in\mathbb{N}} a_1^{q_1}(s)\tau(s) + b_1^{q_1}\sum_{s\in\mathbb{N}} |h(s)x(s)|^{p_1}\sigma(s)\right]^{\frac{(1-\alpha)q}{q_1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\|a_0\|_{l_{q_0,\tau}}^{q_0} + b_0^{q_0}\delta^{p_0}\,\|h\|_{l_{p_0,\sigma}}^{p_0}\right)^{\frac{\alpha q}{q_0}} \left(\|a_1\|_{l_{q_1,\tau}}^{q_1} + b_1^{q_1}\,\|hx\|_{l_{p_1,\sigma}}^{p_1}\right)^{\frac{(1-\alpha)q}{q_1}} \\
&\leq \left(\|a_0\|_{l_{q_0,\tau}}^{q_0} + b_0^{q_0}\delta^{2p_0}\right)^{\frac{\alpha q}{q_0}} \left(\|a_1\|_{l_{q_1,\tau}}^{q_1} + b_1^{q_1} \sup_{\|x\|_{l_{p,\sigma}}\leq 1} \|hx\|_{l_{p_1,\sigma}}^{p_1}\right)^{\frac{(1-\alpha)q}{q_1}} \\
&= \left(\|a_0\|_{l_{q_0,\tau}}^{q_0} + b_0^{q_0}\delta^{2p_0}\right)^{\frac{\alpha q}{q_0}} \left(\|a_1\|_{l_{q_1,\tau}}^{q_1} + b_1^{q_1}\,\|h\|_{l_{p,\sigma}/l_{p_1,\sigma}}^{p_1}\right)^{\frac{(1-\alpha)q}{q_1}} .
\end{aligned}$$

Osim toga, zbog $l_{p_0,\sigma} \subset l_{p,\sigma}/l_{p_1,\sigma}$, tj. $\|h\|_{l_{p,\sigma}/l_{p_1,\sigma}} \leq \|h\|_{l_{p_0,\sigma}} \leq \delta$, dalje imamo

$$\sum_{s\in\mathbb{N}} |f(s,h(s)x(s))|^q\,\tau(s) \leq \left(\|a_0\|_{l_{q_0,\tau}}^{q_0} + b_0^{q_0}\delta^{2p_0}\right)^{\frac{\alpha q}{q_0}} \left(\|a_1\|_{l_{q_1,\tau}}^{q_1} + b_1^{q_1}\delta^{p_1}\right)^{\frac{(1-\alpha)q}{q_1}} .$$

Stavljajući u posljednjoj relaciji

$$\Lambda_0 = \left(\|a_0\|_{l_{q_0,\tau}}^{q_0} + b_0^{q_0}\delta^{2p_0}\right)^{\frac{\alpha q}{q_0}} \left(\|a_1\|_{l_{q_1,\tau}}^{q_1} + b_1^{q_1}\delta^{p_1}\right)^{\frac{(1-\alpha)q}{q_1}} ,$$

dobili smo da postoje $\Lambda_0 > 0$, $\delta > 0$ i $h \in l_{p_0,\sigma}$ takvi da za proizvoljno $x \in l_{p,\sigma}$, vrijedi implikacija

$$\|x\|_{l_{p,\sigma}} \leq \delta \;\Rightarrow\; \|Fhx\|_{l_{q,\tau}} \leq \Lambda_0 ,$$

čime je lema dokazana. ♣

Lema 2.3.5. *Neka je operator superpozicije F generisan funkcijom $f(s,u)$ i neka $F : l_{p_0,\sigma} \to l_{q_0,\tau}$ i $F : l_{p_1,\sigma} \to l_{q_1,\tau}$ $(1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 < \infty)$. Tada postoji funkcija $h \in l_{p_0,\sigma}$ takva da funkcija $f(s,hu)$ generiše operator superpozicije koji djeluje iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$, gdje su p, q takvi da važi*

$$\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_0} + \frac{1-\alpha}{p_1} \ , \ \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{q_0} + \frac{1-\alpha}{q_1} \ ; \ 0 \leq \alpha \leq 1 .$$

Dokaz : Prema Lemi 2.3.4, uz pretpostavljene uslove, postoje $h_0 \in l_{p_0,\sigma}$, $\delta_0 > 0$ i Λ_0, takvi da

$$(\forall\, x \in l_{p,\sigma})\ (\|x\|_{l_{p,\sigma}} \leq \delta_0 \;\Rightarrow \|Fh_0x\|_{l_{q,\tau}} \leq \Lambda_0) ,$$

gdje su

$$\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_0} + \frac{1-\alpha}{p_1} \ , \ \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{q_0} + \frac{1-\alpha}{q_1} \ ; \ 0 \leq \alpha \leq 1 .$$

Uzmimo sada $\delta_\Lambda < \delta_0$ i za proizvoljno $\Lambda < \Lambda_0$ stavimo

$$f_{\Lambda,h_0}(s,u) = \max\left\{0, |f(s,h_0(s)u)|\frac{\Lambda}{\Lambda_0} - 2^{\frac{1}{q}}\Lambda\delta_\Lambda^{-\frac{p}{q}}\left(\frac{\sigma(s)}{\tau(s)}\right)^{\frac{1}{q}}|u|^{\frac{p}{q}}\right\} . \quad (2.3.2)$$

Za proizvoljan $x \in l_{p,\sigma}$ koji zadovoljava osobinu

$$\sigma^{\frac{1}{p}}(s)|P_{n_\Lambda}x(s)| \leq \delta_\Lambda \ , \ n_\Lambda \geq n_* \ ,$$

označimo sa

$$D(x) = \left\{s > n_\Lambda : \ |f(s,h_0(s)x(s))|\frac{\Lambda}{\Lambda_0} - 2^{\frac{1}{q}}\delta_\Lambda^{-\frac{p}{q}}\left(\frac{\sigma(s)}{\tau(s)}\right)^{\frac{1}{q}}|x(s)|^{\frac{p}{q}} > 0\right\}$$

i označimo sa $\tilde{x} = P_D x$. Koristeći Lemu 2.1.5 sada možemo pisati

$$\tilde{x} = z_1 + z_2 + \cdots + z_m \ ,$$

gdje su $\|z_j\|_{l_{p,\sigma}} \leq \delta_\Lambda$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, m nije veći od $2\delta_\Lambda^{-p}\|\tilde{x}\|_{l_{p,\sigma}}^p + 1$ i z_j su disjunktne funkcije. Na osnovu ovoga je

$$\begin{aligned}
\sum_{s\in D(x)} |f_{\Lambda,h_0}(s,x(s))| &= \sum_{s>n_\Lambda} |f_{\Lambda,h_0}(s,\tilde{x}(s))|^q\tau(s) \\
&= \sum_{s>n_\Lambda}\left|f_{\Lambda,h_0}(s,\sum_{j=1}^m z_j(s))\right|^q\tau(s) \\
&= \sum_{s>n_\Lambda}\sum_{j=1}^m |f_{\Lambda,h_0}(s,z_j(s))|^q\tau(s) \\
&= \sum_{j=1}^m\sum_{s>n_\Lambda} |f_{\Lambda,h_0}(s,z_j(s)))|^q\tau(s) \\
&= \sum_{j=1}^m\sum_{s>n_\Lambda}\left[|f(s,h_0(s)z_j(s))|\frac{\Lambda}{\Lambda_0} - 2^{\frac{1}{q}}\delta_\Lambda^{-\frac{p}{q}}\Lambda\left(\frac{\sigma(s)}{\tau(s)}\right)^{\frac{1}{q}}|z_j(s)|^{\frac{p}{q}}\right]^q\tau(s) \\
&\leq \sum_{j=1}^m\left[\sum_{s>n_\Lambda}|f(s,h_0(s)z_j(s))|^q\frac{\Lambda^q}{\Lambda_0^q}\tau(s) - 2\delta_\Lambda^{-p}\Lambda^q\sum_{s>n_\Lambda}|z_j(s)|^p\sigma(s)\right] \\
&= \frac{\Lambda^q}{\Lambda_0^q}\sum_{j=1}^m\|Fh_0z_j\|_{l_{q,\tau}}^q - 2\delta_\Lambda^{-p}\Lambda^q\sum_{j=1}^m\|z_j\|_{l_{p,\sigma}}^p \\
&\leq \Lambda^q\left(2\delta_\Lambda^{-p}\|\tilde{x}\|_{l_{p,\sigma}}^p + 1\right) - 2\delta_\Lambda^{-p}\Lambda^q\|\tilde{x}\|_{l_{p,\sigma}}^p \\
&= \Lambda^q \ .
\end{aligned}$$

Dakle važi:

$$\left(\sum_{s\in D(x)} |f_{\Lambda,h_0}(s,x(s))|^q \tau(s)\right)^{\frac{1}{q}} = \|f_{\Lambda,h_0}(\cdot, P_{n_\Lambda}x)\|_{l_{q,\tau}} \leq \Lambda \ , \tag{2.3.3}$$

za sve $x \in l_{p,\sigma}$ sa osobinom $\sigma^{\frac{1}{p}}(s)|P_{n_\Lambda}x(s)| < \delta_\Lambda$. Označimo sada sa

$$a_\Lambda(s) = \begin{cases} 0 & ; \ s \leq n_\Lambda, \\ \sup_{|u|\leq\delta_\Lambda} |f_{\Lambda,h_0}(s,u)| & ; \ s > n_\Lambda. \end{cases} \tag{2.3.4}$$

Kako desna strana u (2.3.3) ne ovisi od x, to će važiti

$$\sum_{s\in\mathbb{N}} |a_\Lambda(s)|^q \tau(s) \leq \Lambda^q \ ,$$

tj. $a_\Lambda \in l_{q,\tau}$. Sada za $s > n_\Lambda$ i $\sigma^{\frac{1}{p}}(s)|u| \leq \delta_\Lambda$, na osnovu (2.3.2) i (2.3.4), imamo:

$$a_\Lambda(s) \geq |f_{\Lambda,h_0}(s,u)| \geq \frac{\Lambda}{\Lambda_0}|f(s,h(s)u)| - 2^{\frac{1}{p}}\delta^{-\frac{p}{q}}\Lambda\left(\frac{\sigma(s)}{\tau(s)}\right)^{\frac{1}{q}}|u|^{\frac{p}{q}} \ ,$$

odakle slijedi

$$|f(s,h(s)u)| \leq \frac{\Lambda}{\Lambda_0}a_\Lambda(s) + 2^{\frac{1}{q}}\delta^{-\frac{p}{q}}\Lambda_0\left(\frac{\sigma(s)}{\tau(s)}\right)^{\frac{1}{q}}|u|^{\frac{p}{q}} \ ,$$

gdje je $\frac{\Lambda}{\Lambda_0}a_\Lambda \in l_{q,\tau}$ i stavljajući $b = 2^{\frac{1}{q}}\delta_\Lambda^{-\frac{p}{q}}\Lambda_0$, dobijamo upravo uslov djelovanja za operator $\tilde{F}$, generisan funkcijom $f(s,hu)$ (Teorem 2.2.2). ♣

Sada ćemo dokazati glavni rezultat.

Teorem 2.3.6. *Neka operator superpozicije F, generisan funkcijom $f(s,u)$, djeluje iz $l_{p_0,\sigma}$ u $l_{q_0,\tau}$ i iz $l_{p_1,\sigma}$ u $l_{q_1,\tau}$. Neka je*

$$\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_0} + \frac{1-\alpha}{p_1} \ , \ \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{q_0} + \frac{1-\alpha}{q_1} \ ; \ (\alpha \in [0,1]) \ .$$

Tada operator F djeluje iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$.

Dokaz : Prema navedenim uslovima i na osnovu Leme 2.3.4 i Leme 2.3.5, postoje $\Lambda > 0$, $\delta_\Lambda > 0$ i $h \in l_{p_0,\sigma}$ takvi da važi

$$(\forall\ x \in l_{p,\sigma}) \left(\|x\|_{l_{p,\sigma}} \leq \delta_\Lambda \ \Rightarrow\ \|Fhx\|_{l_{q,\tau}} \leq \Lambda \right)$$

i pri tome funkcija $f(s, hu)$ generiše operator superpozicije $\tilde{F}$ koji djeluje iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$, tj. važi

$$|f(s,h(s)u)| \leq a_\Lambda(s) + b\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|u|^{\frac{p}{q}}\ ;\ s > n_\Lambda\ ,\ \sigma^{\frac{1}{p}}(s)|u| \leq \delta_\Lambda\ ,\ a_\Lambda \in l_{q,\tau}\ . \tag{2.3.5}$$

Posmatrajmo funkciju

$$g_{\Lambda,\delta_\Lambda}(s,u) = \sup_{|t|\leq 1, \sigma^{\frac{1}{p}}|tu| \leq \delta_\Lambda} \max \left\{ 0, |f(s,tu)| - 2^{\frac{1}{q}} \delta_\Lambda^{-\frac{p}{q}} \Lambda \left(\frac{\sigma(s)}{\tau(s)} \right)^{\frac{1}{q}} |tu|^{\frac{p}{q}} \right\}\ .$$

Sada za $s > n_\Lambda$ i $\sigma^{\frac{1}{p}}(s)|u| \leq \delta_\Lambda$ imamo

$$\begin{aligned}
|g_{\Lambda,\delta_\Lambda}(s,u)| &\leq \sup_{|t|\leq 1, \sigma^{\frac{1}{p}}|tu| \leq \delta_\Lambda} \left| |f(s,tu)| - 2^{\frac{1}{q}} \delta_\Lambda^{-\frac{p}{q}} \Lambda \left(\frac{\sigma(s)}{\tau(s)} \right)^{\frac{1}{q}} |tu|^{\frac{p}{q}} \right| \\
&\leq \sup_{|t|\leq 1, \sigma^{\frac{1}{p}}|tu| \leq \delta_\Lambda} \left(|f(s,tu)| + 2^{\frac{1}{q}} \delta_\Lambda^{-\frac{p}{q}} \Lambda \left(\frac{\sigma(s)}{\tau(s)} \right)^{\frac{1}{q}} |tu|^{\frac{p}{q}} \right) \\
&\leq \sup_{|t|\leq 1, \sigma^{\frac{1}{p}}|tu| \leq \delta_\Lambda} |f(s,tu)| + 2^{\frac{1}{q}} \delta_\Lambda^{-\frac{p}{q}} \Lambda \left(\frac{\sigma(s)}{\tau(s)} \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{|t|\leq 1, \sigma^{\frac{1}{p}}|tu| \leq \delta_\Lambda} |tu|^{\frac{p}{q}} \\
&\leq a_\Lambda(s) + b \left(\frac{\sigma(s)}{\tau(s)} \right)^{\frac{1}{q}} |u|^{\frac{p}{q}} + 2^{\frac{1}{p}} \delta_\Lambda^{-\frac{p}{q}} \Lambda \left(\frac{\sigma(s)}{\tau(s)} \right)^{\frac{1}{q}} |u|^{\frac{p}{q}}\ .
\end{aligned}$$

Stavljajući $\overline{b} = b + 2^{\frac{1}{p}} \delta_\Lambda^{-\frac{p}{q}} \Lambda$ dobijamo

$$|g_{\Lambda,\delta_\Lambda}| \leq a_\Lambda(s) + \overline{b} \left(\frac{\sigma(s)}{\tau(s)} \right)^{\frac{1}{q}} |u|^{\frac{p}{q}}\ ,$$

za $s > n_\Lambda$ i $\sigma^{\frac{1}{p}}(s)|u| \leq \delta_\Lambda$, gdje je $a_\Lambda \in l_{q,\tau}$, a ovo je upravo uslov djelovanja operatora $G_{\Lambda,\delta_\Lambda} : l_{p,\sigma} \to l_{q,\tau}$, generisanog funkcijom $g_{\Lambda,\delta_\Lambda}(s,u)$ (Teorem 2.2.2).

Označimo sada sa

$$\widehat{g}(s) = \begin{cases} 0 & ; \quad s \leq n_\Lambda, \\ \sup_{|h(s)u| \leq \delta_\Lambda} |g_{\Lambda,\delta_\Lambda}(s, h(s)u)| & ; \quad s > n_\Lambda \ , \end{cases} \tag{2.3.6}$$

tada za $s > n_\Lambda$, vrijedi

$$\widehat{g}(s) \leq \sup_{|h(s)u| \leq \delta_\Lambda} \ \sup_{|t| \leq 1, \sigma^{\frac{1}{p}}|tu| \leq \delta_\Lambda} \left(|f(s, th(s)u)| + 2^{\frac{1}{q}} \delta_\Lambda^{-\frac{p}{q}} \Lambda \left(\frac{\sigma(s)}{\tau(s)} \right)^{\frac{1}{q}} |th(s)u|^{\frac{p}{q}} \right) \ .$$

Odavde poslije množenja težinskom funkcijom τ i sumiranja po $s \in \mathbb{N}$ imamo

$$\sum_{s \in \mathbb{N}} \widehat{g}^q(s)\tau(s) \leq$$

$$\sup_{|h(s)u| \leq \delta_\Lambda} \ \sup_{|t| \leq 1, \sigma^{\frac{1}{p}}|tu| \leq \delta_\Lambda} \left(\sum_{s \in \mathbb{N}} |f(s, th(s)u(s))|^q \tau(s) + 2\delta_\Lambda^{-p} \Lambda^q \sum_{s \in \mathbb{N}} |th(s)u(s)|^p \sigma(s) \right) \ ,$$

iz čega zbog $\tilde{F} : l_{p,\sigma} \to l_{q,\tau}$ i $thu \in l_{p,\sigma}$ imamo $\sum_{s \in \mathbb{N}} \widehat{g}^q(s)\tau(s) < \infty$, tj. $\widehat{g} \in l_{q,\tau}$.
Na osnovu definicije funkcije $\widehat{g}$ (2.3.6), imamo

$$\begin{aligned} \widehat{g}(s) &\geq |g_{\Lambda,\delta_\Lambda}(s, h(s)u)| \\ &\geq |f(s, th(s)u)| - 2^{\frac{1}{q}} \delta_\Lambda^{-\frac{p}{q}} \left(\frac{\sigma(s)}{\tau(s)} \right)^{\frac{1}{q}} |th(s)u|^{\frac{p}{q}} \ . \end{aligned}$$

Stavljajući $v = thu$, iz posljednjih nejednakosti imamo za $s > n_\Lambda$ i $\sigma^{\frac{1}{p}}(s)|v| \leq \delta_\Lambda$,

$$|f(s, v)| \leq \widehat{g}(s) + 2^{\frac{1}{q}} \delta_\Lambda^{-\frac{p}{q}} \Lambda \left(\frac{\sigma(s)}{\tau(s)} \right)^{\frac{1}{q}} |v|^{\frac{p}{q}} \ ,$$

gdje je $v \in l_{p,\sigma}$. Dakle operator F generisan funkcijom $f(s, v)$ djeluje iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$. ♣

2.4 Komentari i reference

Svi rezultati izneseni u ovom i narednim poglavljima podrazumijevaju da su $p, q \geq 1$, jer na žalost, za $0 < p < 1$ prostori L_p, l_p i $l_{p,\sigma}$ nisu normirani prostori. Medjutim, funkcional $[x]_p = \sum_{s\in\mathbb{N}} |x(s)|^p \sigma(s)$ definiše jednu k-normu na $l_{p,\sigma}$ (analogno možemo posmatrati k-normu na L_p i na l_p), u kojoj je on kompletan k-normiran prostor pa se mnogi rezultati navedeni u ovom radu, npr. osnovni rezultat o djelovanju, Teorem 2.2.2, mogu prenijeti i na slučaj $0 < p < 1$.

Skup $\Sigma(N)$ prvi je uveo P.P.Zabrejko posmatrajući oblast definisanosti nelinearnih, parcijalno aditivnih operatora na proizvoljnim idealnim prostorima. O ovome kao i dokaz Leme 2.1.1 može se detaljnije vidjeti u [34].

Funkcional razdvajanja H uveden je u [4], gdje je doveden u vezu sa analitičnošću operatora superpozicije, a odatle su preuzete i Lema 2.1.2 i Lema 2.1.3.

Lebesgueovi prostori su prvi funkcionalni prostori na kojima je operator superpozicije sistematski izučavan. Teorem 2.2.1, dovoljne uslove, dao je M.M.Vajnberg u [29], a M.A.Krasosel'skij je u [16] dao neophodne uslove teorema. Kompletne uslove djelovanja operatora superpozicije u Banachovim prostorima l_p nalazimo u [10] i [11]. Teorem 2.2.2 nam daje uslove djelovanja operatora superpozicije na $l_{p,\sigma}$, izražene preko funkcije koja generiše operator i kao što se vidi klasa funkcija koje generišu ovakve operatore nije sužena u odnosu na takvu klasu u Lebesgueovim prostorima.

Lema 2.3.1 i Lemma 2.3.2 su dokazane u [36], dok je Teorem 2.3.3 dat u [5]. Kao glavni rezultat, ovde je dokazano da kao i za linearne operatore, $\mathcal{L}$-karakteristika djelovanja nelinearnog operatora superpozicije izmedju $l_{p,\sigma}$ i $l_{q,\tau}$ je konveksan skup, Teorem 2.3.6.

Neophodni i dovoljni uslovi djelovanja, zajedno sa teoremom o konveksnosti $\mathcal{L}$-karakteristike djelovanja, daju zaokruženu priču o djelovanju nelinearnog operatora superpozicije na prostorima $l_{p,\sigma}$.

Glava 3

Ograničenost

3.1 Lokalna ograničenost operatora superpozicije

Definicija 3.1.1. Nelinearni operator F koji preslikava podskup A normiranog linearnog prostora X u normiran linearan prostor Y, nazivamo *lokalno ograničenim* na A, ako vrijedi:

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} \|Fx\|_Y < \infty \ , \ x_0 \in A \ . \tag{3.1.1}$$

Drugačije rečeno, F je lokalno ograničen na skupu A ako je ograničen u nekoj okolini proizvoljne tačke $x_0 \in A$.

Slijedeći teorem daje uslove za lokalnu ograničenost nelinearnog operatora superpozicije koji djeluje izmedju dva idealna prostora

Teorem 3.1.1. *Neka su X i Y idealni prostori i neka je Y skoro perfektan. Neka je $f(s,u)$ sup-mjerljiva funkcija. Pretpostavimo da oblast definisanosti operatora superpozicije F, generisanog funkcijom $f(s,u)$, posmatranog izmedju prostora X i Y ima unutrašnju tačku. Operator F je lokalno ograničen u unutrašnjosti $\mathcal{D}(F)$ ako i samo ako za proizvoljan $s \in \Omega_d$ funkcija $f(s,\cdot)$ je ograničena na svakom ograničenom intervalu u $\mathbb{R}$.*

U slučaju $\Omega_d = \emptyset$, na primjer u Lebesgueovim prostorima L_p, dati teorem iskazuje činjenicu da lokalna ograničenost operatora F na otvorenom skupu $A \subset X$ slijedi već iz činjenice djelovanja operatora izmedju L_p i L_q, jer je L_q skoro perfektan prostor.

U slučaju $\Omega_c = \emptyset$ i $X = l_{p,\sigma}$ i $Y = l_{q,\tau}$, lokalna ograničenost nelinearnog operatora superpozicije F generisanog funkcijom $f(s,u)$, okarakterisana je sa

Teorem 3.1.2. *Neka su $1 \leq p, q < \infty$ i neka $F : l_{p,\sigma} \to l_{q,\tau}$. Operator F je lokalno ograničen ako i samo ako je funkcija $f(s,\cdot)$ ograničena za svako $s \in \mathbb{N}$.*

Dokaz : $(\Longleftarrow)$
Neka je funkcija $f(s,u)$ ograničena za $s \in \mathbb{N}$. Neka je $x_0 \in l_{p,\sigma}$ proizvoljan. Na osnovu uslova djelovanja (Teorem 2.2.2), mogu se naći $\delta > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ takvi da za odgovarajuće $a \in l_{q,\tau}$ i $b \geq 0$ važi (2.2.3). Označimo sa $\rho = \frac{\delta}{2}$ i pokažimo da je operator F ograničen na lopti $B(x_0, \rho)$.
Zbog činjenice da je $x_0 \in l_{p,\sigma}$ (tj. $(x_0(s)\sigma(s))_{s\in\mathbb{N}}$ je nula-niz), postoji $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ takav da je $\tilde{n} \geq n$ i da je za $s > \tilde{n}$, $|x_0(s)\sigma(s)| \leq \rho$. Označimo sa

$$m(s) = \sup_{|u - x_0(s)| \leq \rho} |f(s,u)|$$

(supremum postoji jer je f ograničena). Neka je $x \in B(x_0,\rho)$ proizvoljan. Tada za $s > \tilde{n}$ imamo $||x - x_0||_{l_{p,\sigma}} \leq \rho$ i $|x_0(s)|\sigma(s) \leq \delta$. Na osnovu toga sada je

$$\begin{aligned}
||Fx||^q_{l_{q,\tau}} &= \sum_{s\in\mathbb{N}} |f(s,x(s))|^q \tau(s) \\
&= \sum_{s=1}^{\tilde{n}} |f(s,x(s))|^q \tau(s) + \sum_{s=\tilde{n}+1}^{\infty} |f(s,x(s))|^q \tau(s) \\
&\leq \sum_{s=1}^{\tilde{n}} m(s)^q \tau(s) + \sum_{s=\tilde{n}+1}^{\infty} \left(a(s) + b\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|x(s)|^{\frac{p}{q}} \right)^q \tau(s) \\
&\leq \sum_{s=1}^{\tilde{n}} m(s)^q \tau(s) + 2^q \left(\sum_{s=\tilde{n}+1}^{\infty} a(s)^q \tau(s) + b^q \sum_{s=\tilde{n}+1}^{\infty} |x(s)|^p \sigma(s) \right) \\
&\leq \sum_{s=1}^{\tilde{n}} m(s)^q \tau(s) + 2^q \sum_{s=\tilde{n}+1}^{\infty} a(s)^q \tau(s) + 2^q b^q ||x||^p_{l_{p,\sigma}} \\
&\leq \sum_{s=1}^{\tilde{n}} m(s)^q \tau(s) + 2^q \sum_{s=\tilde{n}+1}^{\infty} a(s)^q \tau(s) + 2^q b^q \delta^p < \infty \ .
\end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi da je operator F ograničen na lopti $B(x_0, \rho)$, a kako je $x_0 \in l_{p,\sigma}$ proizvljno uzet, F je lokalno ograničen.
($\Longrightarrow$)
Za dokaz neophodnosti uslova teoreme, primijetimo da je za svako $s \in \mathbb{N}$, funkcija $f(s,u)$ kompozicija tri funkcije: ulaganja $u \to u\chi_{\{s\}}$, realne prave u $l_{p,\sigma}$, operatora F i sirjekcije $y \to y(s)$ prostora $l_{q,\tau}$ u realnu pravu. Kako su prvo i treće od ovih preslikavanja ograničena, to zbog lokalne ograničenosti operatora F je i funkcija $f(s,u)$ lokalno ograničena. Ostaje da primijetimo da su lokalna ograničenost i ograničenost za skalarnu funkciju skalarnog argumenta, ekvivalentni pojmovi. ♣

Prethodnim teoremom dati su neophodni i dovoljni uslovi za ograničenost operatora superpozicije u okolini proizvoljne tačke. Zahtjev da je nelinearni operator superpozicije ograničen na proizvoljnoj kugli oblasti definisanosti operatora bitno je drugačiji.

3.2 Globalna ograničenost operatora superpozicije

Kako pokazuje slijedeći primjer, moguće je da nelinearni operator superpozicije bude lokalno ograničen u svakoj tački domena, ali da ipak nije ograničen operator.
Posmatrajmo nelinearni operator superpozicije F, koji je generisan funkcijom $f(s,u) = u^s$, koji djeluje na prostoru l_1. Nije teško vidjeti da je operator F lokalno ograničen u proizvoljnoj tački iz l_1 (dovoljno je posmatrati $B_r(x)$, $r < 1$). Medjutim na proizvoljnoj kugli $B_r(x) \subset l_1$, $(r > 1)$ očigledno da F nije ograničen.

Zbog česte potrebe za pokazivanjem ograničenosti operatora na nekoj lopti (ili proizvoljnom drugom skupu), dovode do potrebe za jednostavnim kriterijumima ograničenosti. Jedan od takvih, gotovo očigledan, daje

Teorem 3.2.1. *Neka su f i g sup-mjerljive funkcije i neka važi*

$$(\forall s \in \Omega)\, |f(s,u)| \leq |g(s,u)| \ , \ u \in \mathbb{R} \ .$$

Ako je operator G generisan funkcijom $g(s,u)$ ograničen na skupu $A \subset \mathcal{D}(G)$ tada je i operator F generisan funkcijom $f(s,u)$ ograničen na skupu A.

Ovaj teorem je od posebne koristi kada je funkcija g bitno jednostavnija od funkcije f.

Definišimo sada funkciju koja ima važnu ulogu pri opsivanju mnogih osobina nelinearnog operatora F. Za proizvoljan skup A, podskup normiranog prostora X, posmatrajmo funkciju

$$\mu(F; A) = \sup_{x \in A} \|Fx\| \ . \tag{3.2.1}$$

Očigledno je da je data funkcija konačna ako je F ograničen operator na A. Specijalno, ako uzmemo da je $A = B_r(X)$, tada je

$$\mu(F; B_r) = \mu_F(r) = \sup_{\|x\| \leq r} \|Fx\|$$

i ova se forma naziva *funkcija rasta* operatora F na prostoru X. Funkcija μ_F bi mogla biti prirodni analogon norme linearnog operatora (jer ako je F linearan operator onda je $\mu_F(r) = \|F\| \, r$). Ova funkcija daje precizan opis rasta operatora superpozicije F na proizvoljnoj kugli u X, i direktno je vezana za mnoge važne osobine operatora superpozicije, kao što su neprekidnost, diferencijabilnost, analitičnost i slično.

Često je zgodno uz funkciju $\mu_F(r)$ razmatrati i funkciju

$$\nu_F(r) = \inf \left\{ \|a\|_q + br^{\frac{p}{q}} \ : \ |f(s,u)| \leq a(s) + b|u|^{\frac{p}{q}} \ , \ |u| \leq r \right\} \ , \tag{3.2.2}$$

koja takodje može dati neke informacije o operatoru F. Slijedećim teoremom dati su neophodni i dovoljni uslovi ograničenosti operatora superpozicije na Banachovim prostorima nizova.

Teorem 3.2.2. *Operator superpozicije F generisan funkcijom $f(s,u)$ koji djeluje iz l_p u l_q je ograničen ako i samo ako za svako $r > 0$ postoje $a_r \in l_q$ i $b \geq 0$ takvi da važi*

$$|f(s,u)| \leq a_r(s) + b_r|u|^{\frac{p}{q}} \ ,$$

za $|u| \leq r$. Pri tome važi procjena

$$\mu_F(r) \leq \nu_F(r) \leq \|F\theta\|_q + \left(2^{\frac{1}{q}} + 1\right) \mu_F(r) \ . \tag{3.2.3}$$

Za slučaj težinskih Banachovih prostora nizova imamo

Teorem 3.2.3. *Neka operator superpozicije F, generisan funkcijom $f(s,u)$, djeluje iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$. Operator F je ograničen na ograničenom skupu ako i samo ako za svako $r>0$ postoje $a_r \in l_{1,\tau}$ i $b_r \geq 0$ takvi da važi*

$$|f(s,u)|^q \leq a_r(s) + b_r \sigma(s)\tau^{-1}(s)|u|^p \ , \tag{3.2.4}$$

za sve $(s,u) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ za koje je $\sigma(s)|u|^p \leq r^p$.

Dokaz : $(\Longleftarrow)$
Neka važi

$$(\forall r>0)(\exists a_r \in l_{1,\tau})(\exists b_r \geq 0)\ |f(s,u)| \leq a_r(s) + b_r\sigma(s)\tau^{-1}(s)|u|^p \ ,$$

uz uslov da $\sigma(s)|u|^p \leq r^p$.
Neka je $x \in l_{p,\sigma}$ proizvoljan takav da je $||x||_{l_{p,\sigma}} \leq r$, za proizvoljno unaprijed izabrano $r > 0$. Tada važi

$$\begin{aligned}
||Fx||^q_{l_{q,\tau}} &= \sum_{s\in\mathbb{N}} |f(s,x(s))|^q \tau(s) \\
&\leq \sum_{s\in\mathbb{N}} \left(|a_r(s)| + b_r\sigma(s)\tau^{-1}(s)|x(s)|^p\right)\tau(s) \\
&= \sum_{s\in\mathbb{N}} |a_r(s)|\tau(s) + b_r \sum_{s\in\mathbb{N}} |x(s)|^p\sigma(s) \\
&= ||a_r||_{l_{1,\tau}} + b_r||x||^p_{l_{p,\sigma}} \\
&\leq ||a_r||_{l_{1,\tau}} + b_r r^p < \infty \ .
\end{aligned}$$

Kako je desna strana konačna, i ne ovisi od x, zaključujemo da je operator F ograničen.
$(\Longrightarrow)$
Neka je sada F ograničen operator iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$.
Za proizvoljan $r > 0$ definišimo pomoćnu funkciju

$$a_r(s,u) = \max\{0, |f(s,u)|^q - |f(s,0)|^q - 2r^{-p}\sigma(s)\tau^{-1}(s)\mu^q_F(r)|u(s)|^p\} \ . \tag{3.2.5}$$

Za dato $x \in l_{p,\sigma}$, uz uslov $\sigma(s)|x(s)|^p \leq r^p$, označimo sa

$$D(x) = \{s \in \mathbb{N} : A_r x(s) > 0\} \ ,$$

gdje je A_r operator superpozicije generisan funkcijom (3.2.5).
Označimo sa $\tilde{x} = P_{D(x)}x$. Onda se $\tilde{x}$, na osnovu Lemme 2.1.5, može napisati

kao suma od najviše $m = [2r^{-p}||x||^p_{l_{p,\sigma}}]$, disjunktnih funkcija $x_1, x_2, \ldots, x_m$, takvih da je $||x_j||_{l_{p,\sigma}} \leq r$.
Kako je $a_r(s,0) = 0$, imamo

$$\begin{aligned}
||A_r x||_{l_{1,\tau}} &= \sum_{s\in\mathbb{N}} |A_r x(s)|\tau(s) \\
&= \sum_{s\in\mathbb{N}} |a_r(s,x(s))|\tau(s) \\
&= \sum_{s\in D(x)} a_r(s,x(s))\tau(s) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{s\in D(x)} a_r(s,x(s))\tau(s) \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} \Bigg[\sum_{s\in D(x)} |f(s,x_j(s))|^q \tau(s) - \sum_{s\in D(x)} |f(s,0)|^q \tau(s) - \\
&\quad -2r^{-p}\mu_F^q(r) \sum_{s\in D(x)} |x_j(s)|^p \sigma(s) \Bigg] \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{s\in D(x)} |f(s,x_j(s))|^q \tau(s) - 2r^{-p}\mu_F^q(r) \sum_{j=1}^{m} \sum_{s\in D(x)} |x_j(s)|^p \sigma(s) \\
&\leq m\mu_F^q(r) - 2r^{-p}\mu_F^q(r)||P_{D(x)}x||^p_{l_{p,\sigma}} \\
&\leq \left(2r^{-p}||x||^p_{l_{p,\sigma}} + 1\right) \mu_F^q(r) - 2r^{-p}\mu_F^q(r)||x||^p_{l_{p,\sigma}} \\
&= \mu_F^q(r) \ .
\end{aligned}$$

Dakle za proizvoljan $r > 0$ i $x \in l_{p,\sigma}$ sa svojstvom da je $\sigma(s)|x(s)|^p \leq r^p$, važi $\sum_{s\in D(x)} A_r x(s)\tau(s) \leq \mu_F(r)^q$ odnosno

$$\sum_{s\in D(x)} a_r(s,x(s))\tau(s) \leq \mu_F^q(r) \ .$$

Prema Lemi 1.3.6, postoji $\overline{a_r}(s) \in l_1$, tako da je $a_r(s,x(s)) \leq \overline{a_r}(s)$ i da je $||\overline{a_r}||_1 \leq \mu_F^q(r)$.
Osim toga, na skupu $D(x)$ važi

$$a_r(s,x(s)) = |f(s,x(s))|^q - |f(s,0)|^q - 2r^{-p}\sigma(s)\tau^{-1}(s)\mu_F^q(r)|x(s)|^p \leq \overline{a_r}(s) \ .$$

Odavde slijedi

$$|f(s,x(s))|^q \leq |f(s,0)|^q + \overline{a_r}(s) + 2r^{-p}\sigma(s)\tau^{-1}(s)\mu_F^q(r)|x(s)|^p \ .$$

Sada, stavljajući $a_r(s) = |f(s,0)|^q + \overline{a_r}(s)$ i $b_r = 2r^{-p}\mu_F(r)^q$, imamo

$$|f(s,x(s))|^q \leq a_r(s) + b_r\sigma(s)\tau^{-1}(s)|x(s)|^p \ ; \ \sigma(s)|x(s)|^p \leq r^p \ ,$$

što predstavlja (3.2.4), čime je dokaz završen. ♣

3.3 $\mathcal{L}$-karakteristika ograničenosti operatora superpozicije

Kao i kod osobine djelovanja, tako i za osobinu ograničenosti nelinearnog operatora superpozicije, od interesa je posmatrati odgovarajuću $\mathcal{L}$-karakteristiku, tj. $\mathcal{L}$-karakteirstiku ograničenosti $\mathcal{L}(F;bound.)$. Ovdje ćemo pokazati da je i $(\mathcal{L};bound.)$ konveksan skup. Najprije dokažimo tvrdnju

Lema 3.3.1. *Neka funkcija $f(s,u)$ generiše operator superpozicije F i neka $(l_{p_0,\sigma}, l_{q_0,\tau})$, $(l_{p_1,\sigma}, l_{q_1,\tau}) \in \mathcal{L}(F;bound.)$. Tada za proizvoljno $r > 0$ postoje $\Lambda(r) > 0$ i $h_r \in l_{p_0,\sigma}$ takvi da važi*

$$(\forall\ x \in l_{p,\sigma})\ (\|x\|_{l_{p,\sigma}} \leq r \ \Rightarrow\ \|Fh_r x\|_{l_{q,\tau}} \leq \Lambda_r)\ ,$$

gdje je

$$\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_0} + \frac{1-\alpha}{p_1}\ ,\ \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{q_0} + \frac{1-\alpha}{q_1}\ ;\ \alpha \in [0,1]\ . \tag{3.3.1}$$

Dokaz : Neka je $r > 0$ proizvoljan. Iz uslova ograničenosti operatora F koji djeluje iz $l_{p_0,\sigma}$ u $l_{q_0,\tau}$ i iz $l_{p_1,\sigma}$ u $l_{q_1,\tau}$, imamo:

$$(\exists\ a_r^0 \in l_{1,\tau})(\exists\ b_r^0 \geq 0)\ |f(s,u)|^{q_0} \leq a_r^0(s) + b_r^0\frac{\sigma(s)}{\tau(s)}|u|^{p_0}\ , \tag{3.3.2}$$

$$(\exists\ a_r^1 \in l_{1,\tau})(\exists\ b_r^1 \geq 0)\ |f(s,u)|^{q_1} \leq a_r^1(s) + b_r^1\frac{\sigma(s)}{\tau(s)}|u|^{p_1}\ , \tag{3.3.3}$$

za $(s,u) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}$, $\sigma(s)|u|^{p_i} \leq r^{p_i}$ $(i = 0,1)$. Izaberimo $h_r \in l_{p_0,\sigma}$ takav da je $\|h_r\|_{l_{p_0,\sigma}} \leq r$. Iz $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_0} + \frac{1-\alpha}{p_1}$ slijedi $p_0 = \frac{\alpha p p_1}{p_1-(1-\alpha)p}$, odakle je očigledno

$p_0 \le \frac{pp_1}{p_1-p}$. Kako $h_r \in l_{p_0,\sigma}$, iz posljednjeg imamo $h_r \in l_{\frac{pp_1}{p_1-p}}$. Dalje, kako je $l_{\frac{pp_1}{p_1-p}} = l_{p,\sigma}/l_{p_1,\sigma}$, to je onda za svako $x \in l_{p,\sigma}$, $h_r x \in l_{p,\sigma}$. Tim prije će biti za svako $x \in l_{p,\sigma}$, $h_r x \in l_{p_1,\sigma}$ (jer $l_{p,\sigma} \subset l_{p_1,\sigma}$ za $p \le p_1$).
Neka je sada $x \in l_{p,\sigma}$ takav da $\|x\|_{l_{p,\sigma}} \le r$. Iz (3.3.2) i (3.3.3) imamo

$$|f(s,u)|^{\alpha q} \le \left[a_r^0(s) + b_r^0 \frac{\sigma(s)}{\tau(s)} |u|^{p_0}\right]^{\frac{\alpha q}{q_0}}, \tag{3.3.4}$$

$$|f(s,u)|^{(1-\alpha)q} \le \left[a_r^1(s) + b_r^1 \frac{\sigma(s)}{\tau(s)} |u|^{p_1}\right]^{\frac{(1-\alpha)q}{q_1}}, \tag{3.3.5}$$

gdje su $a_r^i \in l_{1,\tau}$, $b_r^i \ge 0$ i $\sigma(s)|u|^{p_i} \le r^{p_i}$ $(i = 0,1)$. Množenjem nejednakosti (3.3.4) i (3.3.5) dobijamo

$$|f(s,u)|^{q} \le \left[a_r^0 + b_r^0 \frac{\sigma(s)}{\tau(s)} |u|^{p_0}\right]^{\frac{\alpha q}{q_0}} \left[a_r^1 + b_r^1 \frac{\sigma(s)}{\tau(s)} |u|^{p_1}\right]^{\frac{(1-\alpha)q}{q_1}}, \tag{3.3.6}$$

za one $(s,u) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ za koje je $\sigma(s)|u|^{p_i} \le r^{p_i}$ $(i = 0,1)$. Kako $h_r x \in l_{p_1,\sigma}$ to je $\sigma(s)|h_r x|^{p_1} \le r^{p_1}$, te nejednakost 3.3.6 možemo primjeniti i na $h_r x$, tj.

$$|f(s,h_r(s)x(s))|^{q} \le \left[a_r^0 + b_r^0 \frac{\sigma(s)}{\tau(s)} |h_r(s)x(s)|^{p_0}\right]^{\frac{\alpha q}{q_0}} \left[a_r^1 + b_r^1 \frac{\sigma(s)}{\tau(s)} |h_r(s)x(s)|^{p_1}\right]^{\frac{(1-\alpha)q}{q_1}}.$$

Izvršimo sada množenje sa težinskom funkcijom $\tau(s)$ i sumiranje po $s \in \mathbb{N}$, dobijamo

$$\begin{aligned}
&\sum_{s\in\mathbb{N}} |f(s,h_r(s)x(s))|^q \tau(s) \le \\
\le\ & \sum_{s\in\mathbb{N}} \left[a_r^0(s)\tau(s) + b_r^0 |h_r(s)x(s)|^{p_0}\sigma(s)\right]^{\frac{\alpha q}{q_0}} \left[a_r^1(s)\tau(s) + b_r^1 |h_r(s)x(s)|^{p_1}\sigma(s)\right]^{\frac{(1-\alpha)q}{q_1}} \\
\le\ & \left[\sum_{s\in\mathbb{N}} \left(a_r^0(s)\tau(s) + b_r^0 |h_r(s)x(s)|^{p_0}\sigma(s)\right)\right]^{\frac{\alpha q}{q_0}} \\
& \cdot \left[\sum_{s\in\mathbb{N}} \left(a_r^1(s)\tau(s) + b_r^1 |h_r(s)x(s)|^{p_1}\sigma(s)\right)\right]^{\frac{(1-\alpha)q}{q_1}} \\
\le\ & \left[\left\|a_r^0\right\|_{l_{1,\tau}} + b_r^0 \left\|h_r\right\|_{l_{p_0,\sigma}}^{p_0}\right]^{\frac{\alpha q}{q_0}} \left[\left\|a_r^1\right\|_{l_{1,\tau}} + b_r^1 \left\|h_r x\right\|_{l_{p_1,\sigma}}^{p_1}\right]^{\frac{(1-\alpha)q}{q_1}} \\
\le\ & \left(\left\|a_r^0\right\|_{l_{1,\tau}} + b_r^0 r^{p_0}\right)^{\frac{\alpha q}{q_0}} \left(\left\|a_r^1\right\|_{l_{1,\tau}} + b_r^1 r^{p_1}\right)^{\frac{(1-\alpha)q}{q_1}}.
\end{aligned}$$

Dakle vrijedi

$$\left(\sum_{s\in\mathbb{N}}|f(s,h_r(s)x(s))|^q\tau(s)\right)^{\frac{1}{q}} \leq \Lambda(r)\ ,$$

gdje smo uzeli

$$\Lambda(r) = \left(\left\|a_r^0\right\|_{l_{1,\tau}} + b_r^0 r^{p_0}\right)^{\frac{\alpha q}{q_0}} \left(\left\|a_r^1\right\|_{l_{1,\tau}} + b_r^1 r^{p_1}\right)^{\frac{(1-\alpha)q}{q_1}}\ .$$

Prema tome, za proizvoljno $r > 0$ postoje $h_r \in l_{p_0,\sigma}$ i $\Lambda(r) > 0$ takvi da čim je $\|x\|_{l_{p,\sigma}} \leq r$ onda je $\|Fh_r x\|_{l_{q,\tau}} \leq \Lambda(r)$. ♣

Da bi dokazali da $\mathcal{L}(F; bound.)$ ima svojstvo konveksnosti, trebat će nam i slijedeće tvrdjenje

Lema 3.3.2. *Neka je operator superpozicije F generisan funkcijom $f(s,u)$ i neka $(l_{p_0,\sigma}, l_{q_0,\tau})$, $(l_{p_1,\sigma}, l_{q_1,\tau}) \in \mathcal{L}(F; bound.)$. Tada postoji funkcija $h \in l_{p_0,\sigma}$ takva da funkcija $f(s,hu)$ generiše ograničen operator superpozicije iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$, gdje je*

$$\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_0} + \frac{1-\alpha}{p_1}\ ,\ \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{q_0} + \frac{1-\alpha}{q_1}\ ;\ \alpha \in [0,1]\ .$$

Dokaz : Neka je $r > 0$ proizvoljno. Prema Lemi 3.3.1 tada postoji $h_r \in l_{p_0,\sigma}$ i $\Lambda(r) > 0$ takvi da važi

$$(\forall\ x \in l_{p,\sigma})\left(\|x\|_{l_{p,\sigma}} \leq r \Rightarrow\ \|Fh_r x\|_{l_{q,\tau}} \leq \Lambda(r)\right)\ .$$

Neka je sada $\Lambda < \Lambda(r)$ proizvoljan. Označimo sa

$$f_{\Lambda,h_r}(s,u) = \max\left\{0, |f(s,h_r u)|\frac{\Lambda}{\Lambda(r)} - 2^{\frac{1}{q}} r^{-\frac{p}{q}}\Lambda\left(\frac{\sigma(s)}{\tau(s)}\right)^{\frac{1}{q}}|u|^{\frac{p}{q}}\right\}\ . \qquad (3.3.7)$$

Za $x \in l_{p,\sigma}$, takav da je $\|x\|_{l_{p,\sigma}} \leq r$ označimo

$$D(x) = \left\{s \in \mathbb{N}\ :\ |f(s,h_r(s)x(s))|\frac{\Lambda}{\Lambda(r)} - 2^{\frac{1}{q}} r^{-\frac{p}{q}}\Lambda\left(\frac{\sigma(s)}{\tau(s)}\right)^{\frac{1}{q}}|x|^{\frac{p}{q}} > 0\right\}$$

i neka je $\tilde{x} = P_{D(x)}x$. Koristeći Lemu 2.1.5, $\tilde{x}$ možemo razložiti u sumu disjunktnih funkcija $z_1, z_2, \dots, z_m$ ($\|z_j\| \leq r$, $j = 1, 2, \dots, m$), gdje je $m \leq 2r^{-p}\|x\|_{l_{p,\sigma}}^p + 1$. Sada zbog osobine skupa $D(x)$ i (3.3.7), imamo

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s\in\mathbb{N}} |f_{\Lambda,h_r}(s,x(s))|^q \tau(s) = \sum_{s\in D(x)} |f_{\Lambda,h_r}(s,\tilde{x}(s))|^q \tau(s) \\
= \;& \sum_{s\in D(x)} \left| f(s, \sum_{j=1}^m z_j(s)) \right|^q \tau(s) \\
= \;& \sum_{s\in D(x)} \sum_{j=1}^m |f_{\Lambda,h_r}(s, z_j(s))|^q \tau(s) \\
= \;& \sum_{j=1}^m \sum_{s\in D(x)} |f_{\Lambda,h_r}(s, z_j(s))|^q \tau(s) \\
= \;& \sum_{j=1}^m \sum_{s\in D(x)} \left| |f(s, h_r(s) z_j(s))| \frac{\Lambda}{\Lambda(r)} - 2^{\frac{1}{q}} r^{-\frac{p}{q}} \Lambda \left(\frac{\sigma(s)}{\tau(s)}\right)^{\frac{1}{q}} |z_j(s)|^{\frac{p}{q}} \right|^q \tau(s) \\
\leq \;& \frac{\Lambda^q}{\lambda^q(r)} \sum_{j=1}^m \sum_{s\in D(x)} |f(s, h_r(s) z_j(s))|^q \tau(s) - 2r^{-p}\Lambda^q \sum_{s\in D(x)} \sum_{j=1}^m |z_j(s)|^p \sigma(s) \\
\leq \;& \Lambda^q m - 2r^{-p}\Lambda^q \sum_{s\in D(x)} |\tilde{x}(s)|^p \sigma(s) \\
\leq \;& \Lambda^q \; .
\end{aligned}
$$

Dakle, dobili smo nejednakost

$$\left\| f_{\Lambda,h_r}(\cdot, P_{D(x)}x) \right\|_{l_{q,\tau}} \leq \Lambda \; ,$$

tj. za $x \in l_{p,\sigma}$ i $\|x\|_{l_{p,\sigma}} \leq r$, važi:

$$\sum_{s\in D(x)} |f_{\Lambda,h_r}(s, x(s))|^q \tau(s) \leq \Lambda^q \; . \tag{3.3.8}$$

Označimo sada sa

$$a_\Lambda(s) = \begin{cases} 0 & ; \; s \notin D(x), \\ \sup_{\sigma^{\frac{1}{p}}(s)|u|\leq r} |f_{\Lambda,h_r}(s,x)| & ; \; s \in D(x). \end{cases} \tag{3.3.9}$$

Zbog neovisnosti desne strane u (3.3.8) o skupu $D(x)$, bit će

$$\sum_{s\in D(x)} |a_\Lambda(s)|^q \tau(s) \leq \Lambda^q \ ,$$

odakle je jasno $a_\Lambda \in l_{q,\tau}$. Sada je na osnovu (3.3.7) i (3.3.9)

$$a_\Lambda(s) \geq f_{\Lambda,h_r}(s,u) \geq \frac{\Lambda}{\Lambda(r)}|f(s,h_r(s)u(s))| - 2^{\frac{1}{q}} r^{-\frac{p}{q}} \Lambda \left(\frac{\sigma(s)}{\tau(s)}\right)^{\frac{1}{q}} |u(s)|^{\frac{p}{q}} \ ,$$

za sve one $(s,u) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, sa osobinom da je $\sigma(s)|u|^{\frac{1}{p}} \leq r^{\frac{1}{p}}$. Iz posljednjeg razmatranja imamo

$$|f(s,h_r(s)u(s))| \leq \frac{\Lambda(r)}{\Lambda} a_\Lambda(s) + 2^{\frac{1}{q}} r^{-\frac{p}{q}} \Lambda(r) \left(\frac{\sigma(s)}{\tau(s)}\right)^{\frac{1}{q}} |u|^{\frac{p}{q}} \ ,$$

za $\sigma^p(s)|u| \leq r$. Uvedemo li oznake $a_r = \frac{\Lambda(r)}{\Lambda} a_\Lambda$ i $b_r = 2^{\frac{1}{q}} r^{-\frac{p}{q}} \Lambda(r)$, jasno je da $a_r \in l_{q,\tau}$ i $b_r > 0$, i da je pri tome

$$|f(s,h_r u)| \leq a_r(s) + b_r \left(\frac{\sigma(s)}{\tau(s)}\right)^{\frac{1}{q}} |u|^{\frac{p}{q}} \ , \ \sigma^p(s)|u| \leq r \ ,$$

za proizvoljno $r > 0$, što predstavlja uslov ograničenosti nelinearnog operatora superpozicije generisanog funkcijom $f(s,h_r u)$, koji djeluje izmedju $l_{p,\sigma}$ i $l_{q,\tau}$ (Teorem 3.2.2). ♣

Dokažimo sada glavni rezultat, dat sa

Teorem 3.3.3. *$\mathcal{L}(F; bound.)$ je konveksan podskup od $\mathcal{L}(F; act.)$.*

Dokaz : Neka su $(l_{p_0,\sigma}, l_{q_0,\tau})$ i $(l_{p_1,\sigma}, l_{q_1,\tau}) \in \mathcal{L}(F; bound.)$ i neka je $r \in \mathbb{R}^+$ proizvoljan. Za proizvoljno $\alpha \in [0,1]$ neka su

$$\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_0} + \frac{1-\alpha}{p_1} \ , \ \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{q_0} + \frac{1-\alpha}{q_1} \ .$$

Prema Lemi 3.3.1, postoje $h \in l_{p_0,\sigma}$ i $\Lambda(r) > 0$, takvi da za proizvoljan $x \in l_{p,\sigma}$, čim je $\|x\|_{l_{p,\sigma}} \leq r$ onda je $\|Fhx\|_{l_{q,\tau}} \leq \Lambda(r)$. Za takvo proizvoljno r definišimo funkciju

$$f_r(s,u) = \sup_{|t|\leq 1} \max\left\{0, |f(s,tu)| - |f(s,0)| - 2^{\frac{1}{q}} r^{-\frac{p}{q}} \Lambda(r) \sigma^{\frac{1}{q}}(s) \tau^{-\frac{1}{q}}(s) |tu|^{\frac{p}{q}}\right\}$$

i za proizvoljno $x \in l_{p,\sigma}$, $\|x\|_{l_{p,\sigma}} \leq r$, stavimo

$$D(x) = \left\{ s \in \mathbb{N} : \ |f(s, h(s)x(s))| > |f(s,0)| + 2^{\frac{1}{q}} r^{-\frac{p}{q}} \Lambda(r) \sigma^{\frac{1}{q}}(s) \tau^{-\frac{1}{q}}(s) |h(s)x(s)|^{\frac{p}{q}} \right\} .$$

Tada prema Lemi 3.3.2 funkcija f_r generiše operator superpozicije A_r koji je ograničen iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$, i pri tome je

$$\sum_{s \in \mathbb{N}} |f_r(s, h(s)x(s))|^q \tau(s) \leq \Lambda(r) \ , \ \sigma(s)|h(s)x(s)|^p \leq r^p \ .$$

Označimo sada sa

$$a_r^*(s) = \begin{cases} 0 & ; \ s \notin D(x), \\ \sup_{|h(s)u| \leq r} |f_r(s, h(s)u)| & ; \ s \in D(x). \end{cases}$$

Tada je

$$\begin{aligned} & a_r^*(s) \geq f_r(s, h(s)u) \\ = \ & \sup_{|t| \leq 1} \max \left\{ 0, |f(s, th(s)u)| - |f(s,0)| - 2^{\frac{1}{q}} r^{-\frac{p}{q}} \Lambda(r) \sigma^{\frac{1}{q}}(s) \tau^{-\frac{1}{q}}(s) |th(s)u|^{\frac{p}{q}} \right\} \\ \geq \ & |f(s, h(s)tu)| - |f(s,0)| - 2^{\frac{1}{q}} r^{-\frac{p}{q}} \Lambda(r) \sigma^{\frac{1}{q}}(s) \tau^{-\frac{1}{q}}(s) |h(s)tu|^{\frac{p}{q}} \\ = \ & |f(s,v)| - |f(s,0)| - 2^{\frac{1}{q}} r^{-\frac{p}{q}} \Lambda(r) \sigma^{\frac{1}{q}}(s) \tau^{-\frac{1}{q}}(s) |v(s)|^{\frac{p}{q}} \ , \end{aligned}$$

gdje je $|v(s)| = |h(s)tu| \leq r$. Ako sada označimo sa

$$a_r(s) = |f(s,0)| + a_r^*(s) \ , \ b_r = 2^{\frac{1}{q}} r^{-\frac{p}{q}} \Lambda(r) \ ,$$

dobijamo

$$|f(s, v(s))| \leq a_r(s) + b_r \sigma^{\frac{1}{q}}(s) \tau^{-\frac{1}{q}}(s) |v|^{\frac{p}{q}} \ , \ \sigma(s)|v|^p \leq r^p \ ,$$

što je uslov ograničenosti nelinearnog operatora superpozicije F (Teorem 3.2.2) koji djeluje iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$, tj. $(l_{p,\sigma}, l_{q,\tau}) \in \mathcal{L}(F; \textit{bound.})$. ♣

Teorem 3.3.3 omogućava nam posmatrati funkciju rasta $\mu_F(r; p, q)$, za fiksirano $r > 0$, kao funkciju koja je definisana i ograničena na konveksnom podskupu $\mathcal{L}(F; \textit{bound.})$ konveksnog skupa $\mathcal{L}(F; \textit{act.})$. Naime, sada smo u mogućnosti dokazati slijedeći rezultat.

Teorem 3.3.4. *Funkcija rasta $\mu_F(r;p,q)$ je logaritamski konveksna funkcija na konveksnom skupu $\mathcal{C} = (0,+\infty) \times \mathcal{L}(F; bound.)$, tj. za proizvoljne r_0, $r_1 > 0$ i $\alpha \in (0,1)$, vrijedi*

$$\mu_F(r;p,q) \leq C\mu_F^{1-\alpha}(r_0;p_0,q_0)\mu_F^{\alpha}(r_1;p_1,q_1) \quad , \quad (r \leq r_0^{1-\alpha} r_1^{\alpha}) \ . \tag{3.3.10}$$

Takodje vrijedi

$$\nu_F(r;p,q) \leq C\nu_F^{1-\alpha}(r_0;p_0,q_0)\nu_F^{\alpha}(r_1;p_1,q_1) \quad , \quad (r \leq r_0^{1-\alpha} r_1^{\alpha}) \ , \tag{3.3.11}$$

gdje je $\nu_F(r;p,q)$ definisana sa (3.2.2), p i q definisani sa (3.3.1) i $C > 1$ realna konstanta.

Dokaz : Da bi pokazali da je funkcija konveksna na konveksnom skupu $\mathcal{C}$, gdje je definisana, dovoljno je pokazati njenu konveksnost na proizvoljnom segmentu sadržanom u skupu $\mathcal{C}$. Neka su $(p_i, q_i) \in \mathcal{L}(F; bound.)$ $(i = 0,1)$ proizvoljni. Za bilo koje $r_i > 0$ postoje $a_{r_i} \in l_{q_i,\tau}$ i $b_{r_i} \geq 0$ takvi da vrijedi (3.2.4) za sve $(s,u) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ za koje je $\sigma(s)|u|^{p_i} \leq r_i^{p_i}$, $(i = 0,1)$. Lahko se pokazuje da vrijedi slijedeća nejednakost

$$|f(s,u)|^q \leq 2^q \left(a_{r_0}^{q_0}(s) + b_{r_0}^{q_0} \frac{\sigma(s)}{\tau(s)} |u|^{p_0} \right)^{q\frac{1-\alpha}{q_0}} \left(a_{r_1}^{q_1}(s) + b_{r_1}^{q_1} \frac{\sigma(s)}{\tau(s)} |u|^{p_1} \right)^{q\frac{\alpha}{q_1}} \ , \tag{3.3.12}$$

za sve $(s,u) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ za koje je $\sigma(s)|u|^p \leq r^p$, gdje je $r \leq r_0^{1-\alpha} r_1^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Neka su sada $x_0 \in B_r(l_{p_0,\sigma})$ i $x_1 \in B_r(l_{p_1,\sigma})$, tada je $|x_0|^{1-\alpha}|x_1|^{\alpha} \in B_r(l_{p,\sigma})$ za proizvoljno p definisano sa (3.3.1). Šta više, za $y \in B_r(l_{p,\sigma})$ možemo pisati $y = y^{p\frac{1-\alpha}{p_0}} y^{p\frac{\alpha}{p_1}}$ i pri tome je $x_0 = y^{\frac{p}{p_0}} \in B_r(l_{p_0,\sigma}) \subset l_{p_0,\sigma}$ i $x_1 = y^{\frac{p}{p_1}} \in B_r(l_{p_1,\sigma}) \subset l_{p_1,\sigma}$, gdje je $r \leq r_0^{1-\alpha} r_1^{\alpha}$. Sada iz nejednakosti (3.3.12) imamo procjenu

$$\|Fy\|_{l_{q,\tau}} \leq 2 \left(||a_{r_0}||_{l_{q_0,\tau}} + b_{r_0} r_0^{\frac{p_0}{q_0}} \right)^{1-\alpha} \left(||a_{r_1}||_{l_{q_1,\tau}} + b_{r_1} r_1^{\frac{p_1}{q_1}} \right)^{\alpha} \ , \tag{3.3.13}$$

gdje su $r_0 = r\gamma^{\alpha\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right)}$, $r_1 = r\gamma^{-1}$, a $\gamma = \inf_{s\in\mathbb{N}} \sigma(s)$. Označimo sa $r^* = r_0^{1-\alpha} r_1^{\alpha}$, tada je $r \leq r^*$. Iz nejednakosti (3.3.13), koristeći definiciju funkcije rasta (3.2.1) i uslov (3.2.3), imamo

$$\mu_F(r^*;p,q) \leq 2^q \mu_F(r_0;p_0,q_0)^{1-\alpha} \mu_F(r_1;p_1,q_1)^{\alpha} \quad , \ 0 < \alpha < 1 \ . \tag{3.3.14}$$

Iz činjenice da je funkcija rasta neopadajuća funkcija, proizilazi tvrdjenje (3.3.10).

Tvrdjenje (3.3.11) proizilazi iz (3.3.14) i uslova (3.2.3). ♣

Kao posljedicu prethodnog teorema imamo da su funkcije μ_F i ν_F neprekidne funkcije na proizvoljnom otvorenom skupu sadržanom u $\mathcal{C}$. Šta više, moglo bi se pokazati da funkcije μ_F i ν_F imaju još dobrih osobina, koje proizilaze iz dokazane konveksnosti.

3.4 Još o ograničenosti

U izučavanju idealnih prostora, pored izučavanja ograničenosti skupova po normi (N-ograničenost), korisno je posmatrati skupove ograničene i u nekom drugom smislu. Tako možemo uvesti

Definicija 3.4.1. Skup $N \subset X$ nazivamo U-*ograničenim*, ako postoji funkcija $u_0 \in X$ takva da je

$$(\forall x \in X)\ |x| \leq u_0 \quad .$$

Ovakvu ograničenost nazivamo ograničenost u odnosu na uredjenje u X. Takodje možemo posmatrati i slijedeću vrstu ograničenosti:

Definicija 3.4.2. Skup $N \subset X$ nazivamo V-*ograničenim* ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji funkcija $u_\varepsilon \in X$ takva da je

$$|P_{\Omega \setminus D} x| \leq u_\varepsilon \quad \wedge \quad ||P_D x||_X < \varepsilon \ ,$$

gdje je D podskup od Ω koji zavisi od x.

Pored ovih, od interesa je i slijedeći tip ograničenost:

Definicija 3.4.3. Skup $N \subset X$ nazivamo W-*ograničenim* ako za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji U-ograničena ε-mreža za skup N.

Sve tri uvedene ograničenosti igraju važnu ulogu u ispitivanju nelinearnih sistema, i integralnih jednačina.

Nije teško pokazati da je svaki U-ograničen skup i V-ograničen, da je svaki V-ograničen W-ograničen i na kraju, da je svaki W-ograničen skup N-ograničen (tj. ograničen po normi).

Karakterizacija V-ograničenosti data je slijedećim teoremom

Teorem 3.4.1. *Neka je X idealan prostor. Skup $N \subset X$ je V-ograničen tada i samo tada ako je ispunjen jedan od ekvivalentnih uslova*

a) Postoji pozitivna funkcija $u_0 \in X$ za koju je

$$\lim_{h\to\infty} \sup_{x\in N} ||x - P_{\Omega\setminus D(x,u_0,h)}x||_X = 0 \quad ,$$

gdje je

$$D(x, u_0, h) = \{s \in \Omega |\ |x(s)| > hu_0(s)\},\ h \in \mathbb{R}^+ \ . \tag{3.4.1}$$

b) Postoji pozitivna funkcija $u_0 \in X$ i funkcija $\Phi(u)$ koja zadovoljava uslov

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty \ ,$$

za koje važi

$$a = \sup_{x\in N} \left|\left| \Phi\left(\frac{|x(s)|}{u_0(s)}\right) u_0(s) \right|\right|_X < \infty \quad .$$

Karakterizacija W-ograničenosti data je sa

Teorem 3.4.2. *Neka je X idealan prostor. Skup $N \subset X$ je W-ograničen tada i samo tada ako postoji pozitivna funkcija $u_0 \in X$ za koju je*

$$\lim_{h\to\infty} \sup_{x\in N} ||x - \min\{|x|, hu_0\} sgn x||_X = 0 \quad .$$

U pimjenama teorije o nepokretnoj tački bitna dobra osobina skupa je *apsolutna ograničenost.*

Definicija 3.4.4. Skup $N \subset X$ nazivamo *apsolutno ograničenim* ako elementi skupa N imaju uniformno apsolutno neprekidnu normu, tj.

$$\lim_{\lambda(D)\to 0} \sup_{x\in N} ||P_D x||_X = 0 \quad .$$

Jasno je da apsolutna ograničenost skupa povlači N-ograničenost tog skupa. Medjutim, u proizvoljnom beskonačno-dimenzionalnom Banachovom prostoru jedinična sfera jeste ograničena po normi, ali nije apsolutno ograničen skup, što pokazuje primjer jedinične sfere u l_p prostoru, gdje za skup $E = \{e_n |\ n \in \mathbb{N}\}$ ($(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vektori standardne baze u l_p) očigledno vrijedi

$$\lim_{\lambda(D)\to 0} \sup_{e_n\in E} ||P_D e_n||_{l_p} = 1 \quad .$$

Dakle obrat ne vrijedi.

U regularnim prostorima, koncept W-ograničenosti i apsolutne ograničenosti se poklapaju. Zaista, neka je $N \subset X$, X regularan prostor, W-ograničen i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan i $x \in N$ fiksiran. Tada postoji $u_\varepsilon \in X$ tako da je

$$||x - x_\varepsilon||_X \leq \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

gdje je $x_\varepsilon = \min\{|x(s)|, u_\varepsilon(s)\} sgn x$, pa je prema tome

$$||P_D x|| \leq ||P_D u_\varepsilon|| + \frac{\varepsilon}{2} \ \ .$$

Kako je X regularan, imamo da je $||P_D u_\varepsilon|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, čim je $\lambda(D)$ dovoljno maleno, pa je dakle za dovoljno maleno $\lambda(D)$, $||P_D x|| < \varepsilon$, uniformno po $x \in N$, tj. N je apsolutno ograničen skup.

Obrnuto, neka je N apsolutno ograničen skup i neka je u_0 pozitivna funkcija u X. Zbog ograničenosti skupa N važi

$$\lim_{h\to\infty} \sup_{x\in N} \lambda\{s \in \Omega|\ |x(s)| > h u_0(s)\} = 0 \ \ . \tag{3.4.2}$$

Za dato $\varepsilon > 0$ možemo odrediti $\delta > 0$, takav da je $||P_D x|| \leq \varepsilon$, za svako $x \in N$ i $\lambda(D) < \delta$. Iz (3.4.2) imamo da skup $\{s \in \Omega|\ |x(s)| > h_0 u_0(s)\}$ ima λ-mjeru manju od δ čim je h_0 dovoljno veliko. Ovo nam daje da je skup

$$N_\varepsilon = \{x \in X|\ |x| \leq h_0 u_0\} \ ,$$

U-ograničena ε-mreža za N u X, pa je zbog proizvoljnosti $\varepsilon > 0$, skup N W-ograničen, što je i trebalo dokazati.

Slijedeća teorema daje neophodne i dovoljne uslove W-ograničenosti skupa na regularnom dijelu idealnog prostora, a prema upravo pokazanom to će biti neophodni i dovoljni uslovi za apsolutnu ograničenost skupa na regularnom prostoru.

Teorem 3.4.3. *Neka je X idealan prostor. Skup $N \subset X^0$ je W-ograničen ako i samo ako je zadovoljen jedan od ekvivalentnih uslova:*

a) Za svaku pozitivnu funkciju $u_0 \in X^0$, za koju je supp $N \subset$ supp u_0, važi jednakost

$$\lim_{h\to\infty} \sup_{x\in N} ||x - P_{\Omega\setminus D(x,u_0,h)} x||_X = 0 \ \ . \tag{3.4.3}$$

b) Za svaku pozitivnu funkciju $u_0 \in X^0$, za koju je supp $N \subset$ supp u_0, važi jednakost

$$\lim_{h\to\infty} \sup_{x\in N} ||x - \min\{|x|, hu_0\} sgnx||_X = 0 \quad . \tag{3.4.4}$$

c) Za svaku pozitivnu funkciju $u_0 \in X^0$, za koju je supp $N \subset$ supp u_0, postoji monotono rastuća funkcija Φ za koju je $\lim_{u\to\infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty$, i važi:

$$a = \sup_{x\in N} \left|\left| \Phi\left(\frac{|x(s)|}{u_0(s)}\right) u_0(s) \right|\right|_X < \infty \quad ,$$

gdje je $D(x, u_0, h)$ dato sa (3.4.1).

Dokaz : Neka je skup $N \subset X^0$ apsolutno ograničen i $u_0 \in X^0$ proizvoljna pozitivna funkcija sa osobinom *supp* $N \subset$ *supp* u_0. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan i neka je $\delta > 0$ takav da za $\lambda(D) < \delta$, važi $||P_D x||_X < \varepsilon$, za proizvoljno $x \in N$ (N je apsolutno ograničen tj. $\lim_{\lambda(D)\to 0} \sup_{x\in N} ||P_D x||_X = 0$). Kako je N kao apsolutno ograničen, ograničen i po normi, a zbog karakterizacije ograničenog skupa tj.
N *ograničen* $\Leftrightarrow \lim_{\lambda(D)\to 0} \sup_{x\in N} \lambda(D(x, u_0, h)) = 0$,
postoji h_0 takav da je $\lambda(D((x, u_0, h_0)) < \delta$ za proizvoljno $x \in N$. Tada za $h > h_0$ imamo

$$||x - P_{\Omega\setminus D(x,u_0,h)} x||_X \leq ||x - P_{\Omega\setminus D(x,u_0,h_0)} x||_X = ||P_{D(x,u_0,h_0)} x||_X < \varepsilon \ ,$$

pa zbog proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ slijedi jednakost (3.4.3), tj. važi uslov a) teorema.
Kako je za proizvoljno $h \in \mathbb{R}^+$,

$$||x - \min\{|x|, hu_0\} sgnx||_X \leq ||x - P_{\Omega\setminus D(x,u_0,h)}||_X \quad ,$$

to apsolutna ograničenost skupa N povlači jednakost (3.4.4) tj uslov b). Na osnovu Teorema 3.4.1 uslovi a) i c) su ekvivalentni pa apsolutna ograničenost povlači i uslov c). Pokažimo sada da uslov b) povlači apsolutnu ograničenost skupa N. Dakle, neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan i neka je $u_0 \in X^0$ pozitivna funkcija takva da *supp* $N \subset$ *supp* u_0 i neka važi jednakost (3.4.3). Neka je h_0 takav da je za $x \in N$

$$||x - \min\{|x|, h_0 u_0\} sgnx||_X < \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

Neka je dalje $\delta > 0$ takav da je $\lambda(D) < \delta$ i $||P_D u_0||_X < \frac{\varepsilon}{2h_0}$. Sada za $h > h_0$

$$\begin{aligned}
||P_D x||_X &\leq ||P_D(x - \min\{|x, h_0 u_0|\} sgnx)||_X + ||P_D(\min\{|x|, h_0 u_0\} sgnx)||_X \\
&\leq ||P_D(x - \min\{|x|, h u_0\} sgnx)||_X + ||P_D(\min\{|x|, h_0 u_0\} sgnx)||_X \\
&\leq ||x - \min\{|x|, h u_0\} sgnx||_X + h_0 ||P_D u_0||_X \\
&< \varepsilon \ .
\end{aligned}$$

Zbog proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ i $x \in N$, slijedi

$$\lim_{\lambda(D) \to 0} \sup_{x \in N} ||P_D x||_X = 0 \ ,$$

tj. N je apsolutno ograničen skup. ♣

Jasno je sada na osnovu Teorema 3.4.1, Teorema 3.4.2 i Teorema 3.4.3 da u regularnim prostorima pojmovi V-ograničenosti, W-ograničenosti i apsolutne ograničenosti su ekvivalentni. Kako je u uvodnom dijelu pokazano da su $l_{p,\sigma}$ prostori regularni, mi ćemo se u daljem baviti samo apsolutnom ograničenošću.

Definicija 3.4.5. Nelinearan operator $F : X \to Y$ nazivamo *apsolutno ograničenim* na X, ako F proizvoljan ograničen skup iz X preslikava u apsolutno ograničen skup u Y.

Uslov c) iz Teoreme 3.4.3 kao direktnu posljedicu Teorema 2.2.2 daje:

Teorem 3.4.4. *Neka je F nelinearan operator superpozicije generisan funkcijom $f(s,u)$, posmatran izmedju $l_{p,\sigma}$ i $l_{q,\tau}$, ograničen na skupu $A \subset l_{p,\sigma}$. Da bi $FA \subset l_{q,\tau}$ bio apsolutno ograničen, neophodno je i dovoljno da je operator $\tilde{F}$, generisan funkcijom*

$$\tilde{f}(s, u_0(s)) = u_0(s) \Phi \left(\frac{|f(s, u_0(s))|}{u_0(s)} \right) \ ,$$

ograničen na skupu A, gdje je u_0 proizvoljna pozitivna funkcija iz $l_{p,\sigma}$ i Φ monotono rastuća na $[0, +\infty)$ funkcija koja zadovoljava uslov $\lim_{u\to\infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty$.

Opštiji teorem koji daje neophodne i dovoljne uslove za apsolutnu ograničenost operatora superpozicije na prostorima $l_{p,\sigma}$, dat je sa,

Teorem 3.4.5. *Neka* $F : l_{p,\sigma} \to l_{q,\tau}$, $1 \leq p, q < +\infty$. *Tada su slijedeća tvrdjenja ekvivalentna:*

(a) F *je apsolutno ograničen.*

(b) $(\forall r > 0)(\exists \Phi_r$ *monotono rastuća na* $[0, +\infty))\Big(\lim_{u\to+\infty} \frac{\Phi_r(u)}{u} = +\infty \wedge \sup_{\sigma(s)|u|^p<r^p} ||u_0\Phi_r\left(\frac{|f(\cdot,u)|}{u_0}\right)|| < +\infty\Big)$.

(c) $(\forall r > 0)(\forall \varepsilon > 0)(\exists a_\varepsilon \in l_{1,\tau})|f(s,u)|^q \leq a_\varepsilon(s) + \varepsilon|u(s)|^p\sigma(s)\tau^{-1}(s)$, $\sigma(s)|u|^p \leq r^p$.

Dokaz : Na osnovu Teorema 3.4.3 , direktno slijedi $(a) \Rightarrow (b)$.
Neka sada važi (b). To znači da je operator $\tilde{F}$, generisan funkcijom

$$\tilde{f}(s,u) = u_0\Phi\left(\frac{|f(s,u)|}{u_0}\right)$$

ograničen, a to opet prema Teoremi 3.2.3 znači da za svako $r > 0$, postoje $a_r \in l_{1,\tau}$ i $b_r \geq 0$ takvi da je

$$\left|u_0(s)\Phi\left(\frac{|f(s,u(s))|}{u_0(s)}\right)\right|^q \leq a_r(s) + b_r\sigma(s)\tau^{-1}(s)|u(s)|^p \ ,$$

za sve $s \in \mathbb{N}$ za koje je $\sigma(s)|u(s)|^p \leq r^p$. Za dato $\varepsilon > 0$ izaberimo $\omega = \omega(\varepsilon)$ takav da za $t \geq \omega$ važi

$$\Phi_r(t) \geq b_r^{\frac{1}{q}}\varepsilon^{-\frac{1}{q}}t \ .$$

Ovo imamo jer Φ_r monotono raste i $\lim_{u\to\infty}\frac{\Phi_r(u)}{u} = \infty$.
Sada, ako je $\frac{|f(s,u)|}{u_0(s)} \geq \omega$ imamo

$$\Phi_r\left(\frac{|f(s,u(s))|}{u_0(s)}\right) \geq b_r^{\frac{1}{q}}\varepsilon^{-\frac{1}{q}}\frac{|f(s,u(s))|}{u_0(s)} \quad .$$

Iz ovoga sada slijedi

$$\begin{aligned}
|f(s,u(s))|^q &\leq b_r^{-1}\varepsilon\Phi_r^q\left(\frac{|f(s,u(s))|}{u_0(s)}\right)u_0(s) \\
&\leq b_r^{-1}\varepsilon(a_r(s) + b_r\sigma(s)\tau^{-1}(s)|u(s)|^p) \\
&\leq b_r^{-1}\varepsilon a_r(s) + \varepsilon\sigma(s)\tau^{-1}(s)|u(s)|^p) \ .
\end{aligned}$$

Označimo sa $a_\varepsilon(s) = b_r^{-1}\varepsilon a_r(s)$. Jasno da $a_\varepsilon \in l_{1,\tau}$, i pri tome važi

$$|f(s,u(s))|^q \leq a_\varepsilon(s) + \varepsilon\sigma(s)\tau^{-1}(s)|u(s)|^p \ .$$

Sa druge strane, ako je $\frac{|f(s,u(s))|}{u_0(s)} < \omega$, onda je

$$|f(s,u(s))|^q \leq \omega^q u_0^q(s) \ .$$

Dakle u oba slučaja vrijedi (c), tj. pokazali smo da $(b) \Rightarrow (c)$. Da $(c) \Rightarrow (a)$ jasno je, jer je $l_{q,\tau}$ regularan prostor, tj. važi $\lim_{n\to\infty} ||P_n Fx|| = 0$. ♣

3.5 Komentari i reference

Teorem 3.1.1 dao je P.P. Zabrejko u [30] za slučaj $\Omega_d = \emptyset$. Teorem 3.1.2 je ekvivalentan teoremi za lokalnu ograničenost u l_p prostorima koja je dokazana u [10].

Funkcija rasta (3.2.1) igra fundamentalnu ulogu u ispitivanju mnogih osobina nelinearnih operatora, a naročito u ispitivanju osobine ograničenosti. Detaljnije o funkciji rasta može se vidjeti u [6], gdje je pokazano da je moguće njeno eksplicitno izračunavanje u Lebesgueovim prostorima.

Uslovi o ograničenosti operatora superpozicije na Lebesgueovim prostorima dobijaju se direktno iz teorema o ograničenosti u idealnim prostorima, a Teorem 3.2.2 je preuzet iz [10].

Teorem 3.3.3 i Teorem 3.3.4 su originalni rezultati ovog rada.

U-ograničenost, V-ograničenost i W-ograničenost su detaljno ispitivane u vezi nelinearnih operatorskih jednačina u [30] a takodje i u [19], dok su karakterizacije V-ograničenosti (Teorem 3.4.1) i W-ograničenosti (Teorem 3.4.2), kao i Teorem 3.4.3 date u [33].

Važnost apsolutne ograničenosti operatora superpozicije se ogleda u tome da u primjenama, npr. u rješavanju nelinearnih sistema Hammersteinovog tipa $x = KFx$, gdje je K linearan operator, a F nelinearni operator superpozicije, ako K preslikava apsolutno ograničen skup u relativno kompaktan skup, moguće je primjeniti klasični Schauderov princip fiksne tačke. Teorem 3.4.5 je dobiven kao posljedica klasičnog kriterija De la Vallée-Poussina za apsolutnu ograničenost.

Glava 4

Neprekidnost i uniformna neprekidnost

4.1 Neprekidnost operatora superpozicije

Neprekidnost, kao važnija osobina proizvoljnog preslikavanja, bila je predmetom izučavanja i za operator superpozicije na raznim prostorima funkcija u samim počecima izučavanja ovog nelinearnog operatora. Generalni rezultat za neprekidnost operatora superpozicije na prostoru S (skup skoro svuda konačnih μ-mjerljivih funkcija, uveden u **1.1**), iskazan je sa

Teorem 4.1.1. *Neka je f sup-mjerljiva funkcija. Operator superpozicije F, generisan funkcijom f je neprekidan u prostoru S ako i samo ako je funkcija f sup-ekvivalentna nekoj Caratheodoryjevoj funkciji.*

Sredinom prošlog vijeka dati su generalni uslovi neprekidnosti operatora superpozicije na proizvoljnom idealnom prostoru.

Neka je X idealan prostor. Označimo sa

$$\delta(s) = \sup\{|z(s)| : \ z \in B_1(X)\} \quad .$$

Za proizvoljan otvoren skup $D \subset X$, definišimo

$$\delta(D) = \bigcup_{(x_0,r)} \{(s,u) \in \Omega \times \mathbb{R} : \ |u - x_0(s)| \leq r\delta(s)\} \quad ,$$

gdje uniju uzimamo po svim $(x_0, r) \in D \times (0, \infty)$, tako da $B(x_0, r)$ leži u D. Jasno je da $\delta(D)$ sadrži grafove svih funkcija iz D. Važnost ovako uvedenog skupa je u tome što postoji jaka povezanost izmedju ponašanja operatora F na skupu D i ponašanja funkcije f koja ga generiše, na skupu $\delta(D)$. Ta veza iskazana je sa

Teorem 4.1.2. *Neka je f sup-mjerljiva funkcija i neka je unutrašnjost D domena definisanosti $\mathcal{D}(F)$ operatora superpozcije F, generisanog funkcijom f i posmatranog izmedju idealnih prostora X i Y, neprazan. Tada, ako je operator F neprekidan na D, funkcija f je sup-ekvivalentna nekoj Caratheodoryjevoj funkciji na $\delta(D)$. Obratno, ako je f sup-ekvivalentna nekoj Caratheodoryjevoj funkciji na $\delta(D)$ i ako je prostor Y regularan, operator F je neprekidan na D.*

Na Lebesgueovim prostorima uslov za neprekidnost operatora superpozicije poprimaju nešto jednostavniji oblik, naime vrijedi,

Teorem 4.1.3. *Neka je f sup-mjerljiva funkcija, i neka operator F generisan tom funkcijom, djeluje iz L_p u L_q. Operator F je neprekidan ako i samo ako je funkcija f sup-ekvivalentna nekoj Caratheodoryjevoj funkciji.*

Sada ćemo vidjeti da uslov neprekidnosti operatora superpozicije na prostorima $l_{p,\sigma}$, što i nije za očekivati, ima još jednostavniju formu u odnosu na Lebesgueove prostore,

Teorem 4.1.4. *Neka su $1 \leq p, q < \infty$ i neka je F operator superpozicije generisan funkcijom $f(s,u)$, koji preslikava $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$. Operator F je neprekidan ako i samo ako je funkcija $f(s,\cdot)$ neprekidna za svako $s \in \mathbb{N}$.*

Dokaz : $(\Longleftarrow)$

Neka je $f(s,u)$ neprekidna i neka je $x_0 \in l_{p,\sigma}$ proizvoljan. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan i neka su n_ε i δ_ε takvi da za odgovarajuće a_ε, $||a_\varepsilon|| < \varepsilon$ i $b_\varepsilon \geq 0$, iz uslova djelovanja (Teorem 2.2.2), važi nejednakost

$$|f(s,u(s))| \leq a_\varepsilon(s) + b_\varepsilon \sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|u(s)|^{\frac{p}{q}} \ , \ \sigma^{\frac{1}{p}}(s)|u| \leq \delta_\varepsilon, \ s \geq n_\varepsilon \ .$$

Označimo sa $\eta = \frac{\delta_\varepsilon}{2}$ i izaberima $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ takav da je $\tilde{n} \geq n_\varepsilon$ i da važi $||P_{\tilde{n}}x_0||_{l_{p,\sigma}} \leq \eta < \left(\frac{\varepsilon}{b_\varepsilon}\right)^{\frac{p}{q}}$.
neka je sada $x \in B(x_0,\eta)$ proizvoljan, i neka je $s > \tilde{n}$. Kako je $||x - x_0|| \leq \eta$ onda je $|x(s)| \leq \delta_\varepsilon$. Zbog toga onda imamo

$$\begin{aligned} |f(s,x_0(s))| &\leq a_\varepsilon(s) + b_\varepsilon \sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|x_0(s)|^{\frac{p}{q}}, \\ |f(s,x(s))| &\leq a_\varepsilon(s) + b_\varepsilon \sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|x(s)|^{\frac{p}{q}} \ . \end{aligned}$$

Sada važi:

$$
\begin{aligned}
||Fx - Fx_0||_{l_{q,\tau}} &= \sum_{s=1}^{\infty} |f(s,x(s)) - f(s,x_0(s))|^q \tau(s) \\
= & \left(\sum_{s=1}^{\tilde{n}} |f(s,x(s)) - f(s,x_0(s))|^q \tau(s) + \sum_{s=\tilde{n}+1}^{\infty} |f(s,x(s)) - f(s,x_0(s))|^q \tau(s) \right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq & \left(\sum_{s=1}^{\tilde{n}} |f(s,x(s)) - f(s,x_0(s))|^q \tau(s) \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{s=\tilde{n}+1}^{\infty} |f(s,x(s)) - f(s,x_0(s))|^q \tau(s) \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

zbog neprekidnosti funkcije f, postoji $\rho \in (0,\eta)$ takav da za $||x - x_0|| < \rho$, prvi sabirak na desnoj strani posljednje nejednačine ne bude veći od ε, te dalje imamo

$$
\begin{aligned}
||Fx - Fx_0||_{l_{q,\tau}} &\leq \varepsilon + \left(\sum_{s=\tilde{n}+1}^{\infty} |f(s,x(s))|^q \tau(s) \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{s=\tilde{n}+1}^{\infty} |f(s,x_0(s))|^q \tau(s) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \varepsilon + ||FP_{\tilde{n}}x||_{l_{q,\tau}} + ||FP_{\tilde{n}}x_0||_{l_{q,\tau}} \\
&\leq \varepsilon + 2||a_\varepsilon||_{l_{q,\tau}} + b_\varepsilon(||P_{\tilde{n}}x||_{l_{p,\sigma}} + ||P_{\tilde{n}}x_0||_{l_{p,\sigma}}) \\
&< \varepsilon + 2\varepsilon + 2\varepsilon = 5\varepsilon \ .
\end{aligned}
$$

Dakle operator F je neprekidan.
$(\Longrightarrow)$
Za dokaz neophodnosti dovoljno je primjetiti da je za svako $s \in \mathbb{N}$ funkcija $f(s,u)$ superpozicija tri funkcije: ulaganja $u \to u\chi_{\{s\}}$ realne ose u $l_{p,\sigma}$, operatora F i sirjekcije $y \to y(s)$ prostora $l_{q,\tau}$ na realnu pravu. Kako su prva i treća od tih funkcija neprekidne, i uz pretpostavku da je i F neprekidna, onda je i njihova kompozicija takodje neprekidna funkcija. ♣

4.2 Uniformna neprekidnost operatora superpozicije

Na prostoru S, operator superpozicije koji je neprekidan, je i uniformno neprekidan na ograničenom skupu. Medjutim to nije slučaj na Banachovim prostorima mjerljivih funkcija. Da neprekidnost operatora superpozicije ne povlači njegovu uniformnu neprekidnost pokazujemo slijedećim primjerom. Posmatrajmo operator superpozicije F generisan funkcijom $f(s,u) = u\sin \pi su$ definisan na l_1 sa vrijednostima u l_1. Kako je funkcija f neprekidna po u za svako $s \in \mathbb{N}$, prema Teoremi 4.1.4, operator F je neprekidan. Neka su dati nizovi $u_n = \frac{2n+1}{2n}\chi_{\{n\}}$ i $v_n = \frac{2n-1}{2n}\chi_{\{n\}}$. Tada je $||u_n||_{l_1} \leq 2$, $||v_n||_{l_1} \leq 1$, tj. za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$, $u_n, v_n \in l_1$. Pri tome je za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$, $||u_n - v_n||_{l_1} = \frac{1}{n}$, odnosno $\lim_{n\to\infty} ||u_n - v_n||_{l_1} = 0$. Medjutim, $||Fu_n - Fv_n||_{l_1} = 2$, te očigledno operator F nije uniformno neprekidan.

Za proizvoljne $r, \delta > 0$ definišimo funkciju

$$\omega_F(r,\delta) = \sup\{||Fx - Fy||_{l_{q,\tau}} : ||x||_{l_{p,\sigma}} \leq r, ||y||_{l_{p,\sigma}} \leq r, ||x-y||_{l_{p,\sigma}} \leq \delta\} \quad .$$

Funkciju ω_F nazivamo *modul neprekidnosti* operatora F.

Teorem 4.2.1. *Neka su $1 \leq p, q < \infty$ i neka je $Fx = f(s,x)$ operator superpozicije koji djeluje iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$. Operator F je uniformno neprekidan ako i samo ako za proizvoljne $r, \delta \geq 0$ i za svako $\varepsilon > 0$ važi:*

$$\begin{aligned} |f(s,u) - f(s,v)| \quad \leq \quad & a_{r,\delta}(s) + b_{r,\delta}\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|u(s)|^{\frac{p}{q}} + c_{r,\delta}\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|v(s)|^{\frac{p}{q}} \\ & + d_{r,\delta}\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|u-v|^{\frac{p}{q}} \ , \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

gdje su

$$\sigma(s)|u(s)|^p \leq r^p \ , \ \sigma(s)|v(s)|^p \leq r^p \ , \ \sigma(s)|u(s)-v(s)|^p \leq \delta^p \ ,$$

$$||a_{r,\delta}||_{l_{q,\tau}} + (b_{r,\delta} + c_{r,\delta})r^{\frac{p}{q}} \leq \varepsilon \ , \ d_{r,\delta} \geq 0 \ .$$

Pri tome važi procjena:

$$\omega_F(r,\delta) \leq \nu_f(r,\delta) \leq \left(1 + 2^{1+\frac{1}{q}}\right)\omega_F(r,\delta) \quad , \tag{4.2.2}$$

gdje je

$$\nu_f(r,\delta) = \inf\{\|a\|_{l_{q,\tau}} + (b+c)r^{\frac{p}{q}} + d\delta^{\frac{p}{q}}\} \ ,$$

a infimum uzimamo po svim $(a,b,c,d) \in l_{q,\tau} \times (0,+\infty) \times (0,+\infty) \times [0,+\infty)$, koji zadovoljavaju

$$|f(s,u) - f(s,v)| \leq a(s) + b\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|u|^{\frac{p}{q}} + c\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|v|^{\frac{p}{q}} + d\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|u-v|^{\frac{p}{q}}$$

$\sigma(s)|u|^p$, $\sigma(s)|v|^p \leq r^p$, $\sigma(s)|u-v|^p \leq \delta^p$.

Dokaz : $(\Longleftarrow)$

Neka važi

$$\begin{aligned} |f(s,u)-f(s,v)| \;&\leq\; a(s)+b\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|u(s)|^{\frac{p}{q}}+c\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|v(s)|^{\frac{p}{q}} \\ &\quad +d\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|u-v|^{\frac{p}{q}}\ , \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

pri čemu je

$$\sigma(s)|u(s)|^p \leq r^p\ ,\ \sigma(s)|v(s)|^p \leq r^p\ ,\ \sigma(s)|u(s)-v(s)|^p \leq \delta^p\ ,\ \delta = \left(\frac{\varepsilon}{2d}\right)^{\frac{q}{p}}$$

i

$$||a||_{l_{q,\tau}} + (b+c)r^{\frac{p}{q}} \leq \frac{\varepsilon}{2}\ ,\ d \geq 0\ .$$

Neka su dalje $x, y \in l_{p,\sigma}$ takvi da je $\sigma(s)|x|^p \leq r^p$, $\sigma(s)|y|^p \leq r^p$ i $\sigma(s)|x-y|^p \leq \delta^p$. Tada je

$$\begin{aligned} ||Fx-Fy||_{l_{q,\tau}} &= \left(\sum_{s\in\mathbb{N}} |f(s,x(s))-f(s,y(s))|^q \tau(s)\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sum_{s\in\mathbb{N}} (a(s)+b\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}|x(s)|^{\frac{p}{q}}+c\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}|y(s)|^{\frac{p}{q}}\right. \\ &\qquad \left. +d\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}|x(s)-y(s)|^{\frac{p}{q}})^q\tau(s)\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sum_{s\in\mathbb{N}} a(s)^q\tau(s)\right)^{\frac{1}{q}} + b\left(\sum_{s\in\mathbb{N}} |x(s)|^p\sigma(s)\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\qquad + c\left(\sum_{s\in\mathbb{N}} |y(s)|^p\sigma(s)\right)^{\frac{1}{q}} + d\left(\sum_{s\in\mathbb{N}} |x(s)-y(s)|^p\sigma(s)\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= ||a||_{l_{q,\tau}} + b||x||^{\frac{p}{q}}_{l_{p,\sigma}} + c||y||^{\frac{p}{q}}_{l_{p,\sigma}} + d||x-y||^{\frac{p}{q}}_{l_{p,\sigma}} \\ &\leq ||a||_{l_{q,\tau}} + (b+c)r^{\frac{p}{q}} + d\delta^{\frac{p}{q}} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ . \end{aligned}$$

Zbog proizvoljnosti ε, zaključujemo da je F uniformno neprekidan.
$(\Longrightarrow)$

Neka je sada F uniformno neprekidan, i neka je $x \in l_{p,\sigma}$ proizvoljan. Posmatrajmo funkciju:

$$g_x(s,u) = \max\{0, |f(s,x(s)+u) - f(s,x(s))| - 2^{\frac{1}{q}}\delta^{-\frac{p}{q}}\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)\omega_F(r,s)|u(s)|^{\frac{p}{q}}\} \tag{4.2.4}$$

i označimo sa G_x operator superpozicije generisan funkcijom g_x.
Neka je sada $h \in l_{p,\sigma}$ takav da je $\sigma(s)|h(s)|^p \leq \delta^p$ i $\sigma(s)|x(s)+h(s)|^p \leq r^p$. Označimo sa

$$D(h) = \{s \in \mathbb{N} : G_x h(s) > 0\} \ , \tag{4.2.5}$$

tj.

$$D(h) = \{s \in \mathbb{N} : |f(s,x(s)+h) - f(s,x(s))| > 2^{\frac{1}{q}}\delta^{-\frac{p}{q}}\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)\omega_F(r,s)|h(s)|^{\frac{p}{q}}\} \ .$$

Označimo sa $\tilde{h} = P_{D(h)}h$. Tada prema Lemmi 2.1.5 funkciju $\tilde{h}$ možemo razbiti na ne više od $m = [2\delta^{-p}||\tilde{h}||^p_{l_{p,\sigma}}]$, medjusobno disjunktnih funkcija h_j ($j \in \{1,2,\ldots,m\}$), takvih da $||h_j||_{l_{p,\sigma}} \leq \delta$ i $|x(s)+h(s)| \leq r$. Sada imamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{s\in\mathbb{N}} |g_x(s,h(s))|^q\tau(s) &= \sum_{s\in D(h)} |g_x(s,\tilde{h}(s))|^q\tau(s) \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{s\in D(h)} |g_x(s,h_j(s))|^q\tau(s) \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{s\in D(h)} \Big(|f(s,x(s)+h_j(s)) - f(s,x(s))| \\
&\quad -2^{\frac{1}{q}}\delta^{-\frac{p}{q}}\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)\omega_F(r,\delta)|h_j(s)|^{\frac{p}{q}}\Big)^q\tau(s) \\
&\leq \sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{s\in D(h)} |f(s,x(s)+h_j(s)) - f(s,x(s))|^q\tau(s) \\
&\quad -2\delta^{-p}\omega_F^q(r,\delta)\sum_{s\in D(h)} |h_j(s)|^p\sigma(s)\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{s\in D(h)} |f(s,x(s)+h_j(s)) - f(s,x(s))|^q\tau(s) \\
&\quad -2\delta^{-p}\omega_F^q(r,\delta)\sum_{j=1}^{m}\sum_{s\in D(h)} |h_j(s)|^p\sigma(s) \\
&\leq m\omega_F(r,\delta) - 2\delta^{-p}\omega_F(r,\delta)||\tilde{h}||_{l^p_{p,\sigma}} \\
&= \omega_F(r,\delta) \ .
\end{aligned}$$

Iz ovoga zaključujemo da je $||G_x h||_{l_{q,\tau}} \leq \omega_F(r,\delta)$, tj. operator G_x je ograničen na nekoj lopti $B_r(l_{p,\sigma})$.
Posmatrajmo sada funkciju

$$g(s,u) = \sup_t \max\left\{0, |f(s,u+t) - f(s,t)| - 2^{\frac{1}{q}}\delta^{-\frac{p}{q}}\omega_F(r,\delta)\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|t|^{\frac{p}{q}}\right\} ,$$

gdje je $\sigma(s)|t|^p \leq r^p$ i $\sigma(s)|x(s)+t|^p \leq r^p$.
Ova funkcija generiše operator superpozicije G, koji slika kuglu $B_r(l_{p,\sigma})$ u neku kuglu $B_\omega(l_{q,\tau})$ ($\omega = \omega_F(r,\delta)$). Prema gore pokazanom, operator G je ograničen te onda prema Teoremi 3.2.3 je i funkcija g ograničena i važi

$$|g(s,u)| \leq a(s) + 2^{\frac{1}{q}}r^{-\frac{p}{q}}\omega_F(r,\delta)\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}|u(s)|^{\frac{p}{q}} . \qquad (4.2.6)$$

za $\sigma(s)|u|^p \leq r^p$, $a \in l_{q,\tau}$ i $||a||_{l_{q,\tau}} \leq \omega_F(r,\delta)$. Odavde i na osnovu definicije funkcije g imamo:

$$\begin{aligned} |f(s,u) - f(s,v)| &- 2^{\frac{1}{q}}\delta^{-\frac{p}{q}}\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)\omega_F(r,\delta)|u-v|^{\frac{p}{q}} \\ &\leq |g(s,u+v)| \\ &\leq a(s) + 2^{\frac{1}{q}}r^{-\frac{p}{q}}\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)\omega_F(r,\delta)\left(|u|^{\frac{p}{q}} + |v|^{\frac{p}{q}}\right) , \end{aligned}$$

a iz ovoga je onda

$$\begin{aligned} |f(s,u) - f(s,v)| \leq\ & a(s) + 2^{\frac{1}{q}}r^{-\frac{p}{q}}\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)\omega_F(r,\delta)\left(|u(s)|^{\frac{p}{q}} + |v(s)|^{\frac{p}{q}}\right) \\ & + 2^{\frac{1}{q}}\delta^{-\frac{p}{q}}\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)\omega_F(r,\delta)|u(s)-v(s)|^{\frac{p}{q}} . \end{aligned} \qquad (4.2.7)$$

Ako uvedemo oznake

$$b_{r,\delta} = c_{r,\delta} = 2^{\frac{1}{q}}r^{-\frac{p}{q}}\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)\omega_F(r,\delta) \ , \ d_{r,\delta} = 2^{\frac{1}{q}}\delta^{-\frac{p}{q}}\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)\omega_F(r,\delta)$$

i zbog (4.2.6), imamo traženu nejednakost, tj. važi

$$|f(s,u) - f(s,v)| \leq a(s) + b_{r,\delta}|u|^{\frac{p}{q}} + c_{r,\delta}|v|^{\frac{p}{q}} + d_{r,\delta}|u-v|^{\frac{p}{q}} ,$$

uz uslove da je $\sigma(s)|u|^p \leq r^p$, $\sigma(s)|v|^p \leq r^p$ i $\sigma(s)|u-v|^p \leq \delta^p$.

Neka su $r, \delta, \varepsilon > 0$ proizvoljni. Iz (4.2.3), prelaskom na normu dobija se

$$\begin{aligned} \|Fu - Fv\|_{l_{q,\tau}} &\leq \|a\|_{l_{q,\tau}} + b\,\|u\|_{l_{p,\sigma}}^{\frac{p}{q}} + c\,\|v\|_{l_{p,\sigma}}^{\frac{p}{q}} + d\,\|u-v\|_{l_{p,\sigma}}^{\frac{p}{q}} \\ &\leq \|a\|_{l_{q,\tau}} + (b+c)r^{\frac{p}{q}} + d\delta^{\frac{p}{q}} , \end{aligned}$$

za sve u i v takve da je $\|u\|_{l_{p,\sigma}}, \|v\|_{l_{p,\sigma}} \leq r$ i $\|u-v\|_{l_{p,\sigma}} \leq \delta$. Kako lijeva strana ne ovisi od a, b, c i d, tada važi

$$\|Fu - Fv\|_{l_{q,\tau}} \leq \inf\{\|a\|_{l_{q,\tau}} + (b+c)r^{\frac{p}{q}} + d\delta^{\frac{p}{q}}\} ,$$

gdje smo infimum uzeli po svim $(a,b,c,d) \in l_{q,\tau} \times (0,+\infty) \times (0,+\infty) \times [0,+\infty)$, koji zadovoljavaju (4.2.3). Prelaskom na supremum lijeve strane po svim u, v za koje je $\|u\|_{l_{p,\sigma}}, \|v\|_{l_{p,\sigma}} \leq r$ i $\|u-v\|_{l_{p,\sigma}} \leq \delta$, dobijamo

$$\omega_F(r,\delta) \leq \nu_f(r,\delta) \quad .$$

Na osnovu definicije funkcije ν_f i nejednakosti (4.2.7) sada imamo

$$\nu_f(r,\delta) \leq \|a\|_{l_{q,\tau}} + 2^{\frac{1}{q}} r^{-\frac{p}{q}} \omega_F(r,\delta) r^{\frac{p}{q}} + 2^{\frac{1}{q}} \delta^{-\frac{p}{q}} \omega_F(r,\delta) \delta^{\frac{p}{q}} \quad ,$$

te je zbog $\|a\|_{l_{q,\tau}} \leq \omega_F(r,\delta)$,

$$\nu_f(r,\delta) \leq \left(1 + 2^{1+\frac{1}{q}}\right) \omega_F(r,\delta) \quad ,$$

što je upravo desna strana u (4.2.2). ♣

Slijedećim teoremom dati su uslovi pod kojim će neprekidan nelinearan operator superpozicije biti i uniformno neprekidan.

Teorem 4.2.2. *Neka je operator F, generisan funkcijom $f(s,u)$, neprekidan iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$. Da bi operator F bio uniformno neprekidan na ograničenom skupu $N \subset l_{p,\sigma}$, potrebno je i dovoljno da važi :*

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}} \sup\{||P_D Fx - P_D Fy|| : \ x, y \in N \ , \ ||x-y|| \leq \delta \ , \ \lambda(D) \leq \delta\} = 0 \quad .$$

Dokaz :

$(\Longrightarrow)$ Neka je F uniformno neprekidan i neka je $N \subset l_{p,\sigma}$ ograničen, tj $N \subset B_r(l_{p,\sigma})$, za neko $r > 0$. Dalje neka je $\delta > 0$ proizvoljan i $D \subset \mathbb{N}$ takav da je $\lambda(D) \leq \delta$. Za proizvoljne $x, y \in N$ za koje je $||x-y|| \leq \delta$, na osnovu Teorema 4.2.1 i parcijalne aditivnosti operatora F, važi

$$\begin{aligned}
&\|P_D Fx - P_D Fy\|_{l_{q,\tau}} = \|FP_D x - FP_D y\|_{l_{q,\tau}} \\
\leq\ & \|a_{r,\delta}\|_{l_{q,\tau}} + b_{r,\delta} \|P_D x\|_{l_{p,\sigma}}^{\frac{p}{q}} + c_{r,\delta} \|P_D y\|_{l_{p,\sigma}}^{\frac{p}{q}} + d_{r,\delta} \|P_D x - P_D y\|_{l_{p,\sigma}}^{\frac{p}{q}} \\
\leq\ & \left(\|a_{r,\delta}\|_{l_{q,\tau}} + (b_{r,\delta} + c_{r,\delta}) r^{\frac{p}{q}}\right) + d_{r,\delta} \|x-y\|_{l_{p,\sigma}}^{\frac{p}{q}} \\
\leq\ & \varepsilon + d_{r,\delta} \delta^{\frac{p}{q}} \ .
\end{aligned}$$

Uzimajući supremum lijeve strane po svim $x, y \in N$, takvim da je $\|x-y\|_{l_{p,\sigma}} \leq \delta$ i $\lambda(D) \leq \delta$, puštajući da δ teži ka nuli, dobijamo da je za proizvoljan $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \to 0} \sup\{||P_D Fx - P_D Fy|| : \ x, y \in N \ , \ ||x-y|| \leq \delta \ , \ \lambda(D) \leq \delta\} \leq \varepsilon \ .$$

Zbog proivoljnosti ε, slijedi tvrdnja.
$(\Longleftarrow)$
Obrat je očigledniji jer za proizvoljne $x', y' \in N$ za koje je $||x'-y'|| \leq \delta$, važi

$$\begin{aligned} & \|P_n Fx' - P_n Fy'\|_{l_{q,\tau}} = \|FP_N x' - FP_N y'\|_{l_{q,\tau}} \\ \leq \ & \sup\{||P_D Fx - P_D Fy|| : \ x, y \in N \ , \ ||x-y|| \leq \delta \ , \ \lambda(D) \leq \delta\} \ , \end{aligned}$$

odakle , puštajući da $n \to \infty$ dobijamo uniformnu neprekidnost operatora F. ♣

Iz prethodne toreme slijedi

Posljedica 4.2.3. *Neprekidan i apsolutno ograničen operator superpozicije koji djeluje iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$, je uniformno neprekidan.*

4.3 Komentari i reference

Prvi generalni rezultat o neprekidnosti operatora superpozicije dali su Krasnosel'skij, Rutickij i Sultanov (za operator sa vrijednostima u regularnim idealnim prostorima i sa $\Omega_d = \emptyset$) ([18]). Za prostore sa diskretnom mjerom prva ispitivanja vrši J. Robert ([24]), ali su glavni rezultati te vrste dobijeni u [10] i [11]. Teorem 4.1.1 je generalni uslov neprekidnosti u prostoru S, a Teorem 4.1.2 nam daje "skoro" neophodne i dovoljne uslove neprekidnosti na idealnim prostorima. Oba rezultata su data u [3]. Teorem 4.1.3 direktno slijedi iz Teorema 4.1.1 i Teorema 4.1.2. Neophodni i dovoljni uslovi neprekidnosti operatora superpozicije na prostorima $l_{p,\sigma}$, Teorem 4.1.4, ekivalentni su uslovima neprekidnosti na prostorima l_p, jer je l_p specijalan slučaj prostora $l_{p,\sigma}$.

Iako iz neprekidnost operatora superpozicije slijedi njegova uniformna neprekidnost na ograničenom skupu u S, što je pokazano u [3], to nije slučaj u Lebesgueovim, Orlitzevim, Banachovim prostorima nizova i dr., što je pokazano rezličitim primjerima od strane M.M. Vajnberga [28], Krasnosel'skog [21], Dedagića [10], a ovaj posljednji naveden je i u ovom radu.

Teorem 4.2.2 nam omogućava uspostaviti vezu izmedju neprekidnosti i uniformne neprekidnosti na prostorima $l_{p,\sigma}$, i tu vezu daje apsolutna ograničenost operatora, što je iskazano Posljedicom 4.2.3.

Glava 5

Lipschitzov uslov

5.1 Lokalni i globalni Lipschitzov uslov za operator superpozicije

U mnogim primjenama, potrebno je više od neprekidnosti nelinearnog operatora, da bi se mogli iskoristili osnovni principi nelinearne analize. Tako je ključna pretpostavka Banachovog principa kontrakcije, *globalni Lipschitzov uslov*

$$||Fx_1 - Fx_2||_Y \leq k||x_1 - x_2||_X \quad , \quad (x_1, x_1 \in X) \ , \tag{5.1.1}$$

ili *lokalni Lipschitzov uslov*

$$||Fx_1 - Fx_2||_Y \leq k(r)||x_1 - x_2||_X \quad , \quad (x_1, x_1 \in B_r(X)) \ . \tag{5.1.2}$$

Zbog toga se pojavljuje problem pronalaženja uslova, po mogućnosti i potrebnih i dovoljnih, za (5.1.1) ili (5.1.2), sa uslovima na funkciju f, koja generiše dati nelinearni operator. S tim u vezi ovdje dajemo

Teorem 5.1.1. *Neka operator F generisan Caratheodoryjevom funkcijom f djeluje izmedju $l_{p,\sigma}$ i $l_{q,\tau}$. Slijedeća tri tvrdjenja su ekvivalentna:*

(a) Operator F zadovoljava Lipschitzov uslov, tj.

$$||Fx - Fy||_{l_{q,\tau}} \leq k(r)||x - y||_{l_{p,\sigma}} \ , \ x, y \in B_r(l_{p,\sigma}) \ .$$

(b) Za date $x, y \in B_r(l_{p,\sigma})$, postoji niz $\xi \in B_{k(r)}(l_{q,\tau}/l_{p,\sigma})$, takav da važi:

$$Fx(s) - Fy(s) = \xi(s)(x(s) - y(s)) \ , \ s \in \mathbb{N} \ .$$

(c) *Funkcija f zadovoljava Lipschitzov uslov*

$$|f(s,x) - f(s,y)| \le g(s,w)|x-y| \ , \ |x|,|y| \le w \ ,$$

gdje funkcija $g(s,w)$ generiše operator superpozicije koji djeluje iz $B_r(l_{p,\sigma})$ u $B_{k(r)}(l_{q,\tau}/l_{p,\sigma})$.

Dokaz : Najprije pokažimo $(a) \Rightarrow (b)$.

Kao prvo pretpostavimo da postoji $\tilde{f}(s,u) = \frac{\partial}{\partial u} f(s,u)$. U tom slučaju važi:

$$|f(s,u) - f(s,v)| = (u-v) \int_0^1 \tilde{f}(s,(1-t)u + tv) dt \ .$$

Da bi pokazali da važi (b) dovoljno je pokazati da funkcija definisana sa

$$\xi(s) = \int_0^1 \tilde{f}(s,(1-t)x(s) + ty(s)) dt \ ,$$

pripada $B_{k(r)}(l_{q,\tau}/l_{p,\sigma})$. Neka su $z \in B_r(l_{p,\sigma})$ i $h \in l_{p,\sigma}$ takvi da je $z + th \in B_r(l_{p,\sigma})$ za dovoljno malo $t > 0$. Tada vrijedi:

$$\tilde{f}(s,z(s))h(s) = \lim_{t \to 0} \frac{f(s,z(s)+th(s)) - f(s,z(s))}{t} \ . \tag{5.1.3}$$

Na osnovu (a) imamo

$$\frac{||F(z+th) - Fz||_{l_{q,\tau}}}{t} \le k(r)||h||_{l_{p,\sigma}} \ .$$

Ako sa $\tilde{F}$ označimo operator superpozicije generisan funkcijom $\tilde{f}$, onda zbog toga što je $l_{q,\tau}$ perfektan (vidjeti Uvod **1.1**) imamo

$$||(\tilde{F}hz)h||_{l_{q,\tau}} \le \underline{\lim}_{t \to 0} \frac{||F(z+th) - Fz||}{t} \le k(r)||h||_{l_{p,\sigma}} \ .$$

Kako je norma u prostoru multiplikatora zadata sa $||z||_{l_{q,\tau}/l_{p,\sigma}} = \sup\{||xz||_{l_{q,\tau}} : ||x||_{l_{p,\sigma}} \le 1\}$, zaključujemo da $\tilde{F}z \in B_{k(r)}(l_{q,\tau}/l_{p,\sigma})$, tj.

$$||\tilde{F}z||_{l_{q,\tau}/l_{p,\sigma}} \le k(r) \ \text{ za } z \in B_r(l_{p,\sigma}) \ ,$$

a onda imamo

$$\begin{aligned}
||\xi||_{l_{q,\tau}/l_{p,\sigma}} &\leq \int_0^1 ||\tilde{f}(\cdot,(1-t)x+ty)||_{l_{q,\tau}/l_{p,\sigma}} dt \\
&\leq \int_0^1 ||\tilde{F}((1-t)x+ty)||_{l_{q,\tau}/l_{p,\sigma}} dt \\
&\leq k(r) \ .
\end{aligned}$$

Dakle $\xi \in B_{k(r)}(l_{q,\tau}/l_{p,\sigma})$.
Dokažimo da $(b) \Rightarrow (c)$.
Označimo sa

$$g(s,w) = \sup_{|u|,|v|\leq w, u\neq v} \frac{f(s,u)-f(s,v)}{u-v} \tag{5.1.4}$$

funkciju koja generiše operator superpozicije G. Prema $Sainte - Beuve$ovoj teoremi selekcije

$$(\forall w \in B_r(l_{p,\sigma}))(\exists u,v;\ |u|\leq w, |v|\leq w)\ g(s,w(s)) = \frac{Fu(s)-Fv(s)}{u(s)-v(s)} \ ,$$

ali ovo znači da su $u, v \in B_r(l_{p,\sigma})$, pa dakle zbog (b), $Gw \in B_{k(r)}(l_{q,\tau}/l_{p,\sigma})$, odnosno

$$|f(s,u)-f(s,v)| \leq g(s,w)(u-v) \ .$$

Ostalo je da pokažemo implikaciju $(c) \Rightarrow (a)$.
Neka je $p > q$.

$$\begin{aligned}
||Fx - Fy||_{l_{q,\tau}} &= \left(\sum_{s\in\mathbb{N}} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))|^q \tau(s)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\sum_{s\in\mathbb{N}} g(s,w(s))^q |x(s)-y(s)|^q \tau(s)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{s\in\mathbb{N}} g(s,w(s))\tau(s)\sigma^{-\frac{q}{p}}(s)|x(s)-y(s)|^q \sigma^{\frac{q}{p}}(s)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\sum_{s\in\mathbb{N}} g(s,w(s))^{\frac{pq}{p-q}} \tau^{\frac{p}{p-q}}(s)\sigma^{-\frac{q}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{pq}} \left(\sum_{s\in\mathbb{N}} |x(s)-y(s)|^p \sigma(s)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= ||Gw||_{\frac{pq}{p-q},\tau^{\frac{p}{p-q}}\sigma^{-\frac{q}{p-q}}} ||x-y||_{l_{p,\sigma}} \\
&\leq k(r)||x-y||_{l_{p,\sigma}} \ .
\end{aligned}$$

U slučaju da je $p \leq q$, imamo:

$$
\begin{aligned}
||Fx - Fy||_{l_{q,\tau}} &= \left(\sum_{s\in\mathbb{N}} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))|^q \tau(s) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\sum_{s\in\mathbb{N}} g(s,w(s))^q \tau(s)\sigma^{-1}(s)|x(s) - y(s)|^q \sigma(s) \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \ ess \sup_{s\in\mathbb{N}} \left(g(s,w(s))\tau^{\frac{1}{q}}(s)\sigma^{-\frac{1}{q}}(s) \right) \left(\sum_{s\in\mathbb{N}} |u(s) - v(s)|^q \sigma(s) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \ ||Gw||_{l_{\infty,\tau^{\frac{1}{q}}\sigma^{-\frac{1}{q}}}} ||x - y||_{l_{p,\sigma}} \\
&\leq \ k(r)||x - y||_{l_{p,\sigma}} \ ,
\end{aligned}
$$

što predstavlja traženi uslov. ♣

5.2 Komantari i reference

Lipschitzov uslov za operator superpozicije, ispitivan je od strane raznih autora. Ekvivalentnost uslova (a) i (c) u Teoremi 5.1.1, za slučaj Lebesgueovih prostora dokazao je J. Appell u [2], a odgovarajući teorem u slučaju idealnih prostora imamo u [3]. Korišteni teorem Sainte-Beuve može se naći u [3].
Iz dokaza Teorema 5.1.1 se vidi da bi se mogao posmatrati i opštiji slučaj, tj. da se lokalni Lipschitzov uslov (5.1.1) zamijeni sa globalnim uslovom (5.1.2). Osim toga, moguće uopštenje je posmatrati uslov

$$
\|Fx_1 - Fx_2\|_Y \leq k(r)\, \|x_1 - x_2\|_X^{\alpha} \quad , \quad (x_1, x_2 \in B_r(X)) \ ,
$$

koje se naziva *Hölderov uslov*, sa Hölderovim eksponentom $\alpha \in (0,1]$, o kome, za slučaj Lebesgueovih prostora, detaljnije možemo naći u [37].

Lipschitzov uslov je bitan u ispitivanju drugih analitičkih osobina nelinearnog operatora superpozicije. Ako vrijedi Lipschitzov uslov, znači da modul neprekidnosti operatora superpozicije ima svojstvo $\omega_F(r,\delta) = O(\delta)$, što opet prema uslovu (4.2.2) znači $\nu_f(r,\delta) = O(\delta)$. Takodje, ako funkcija f

koja generiše operator, zadovoljava uslov $f(s,0) = 0$, tj. operator je parcijalno aditivan, uslov (5.1.1) nam daje sublinearnu procjenu rasta operatora, tj.

$$\|Fx\|_{l_{q,\tau}} \leq k(r)\,\|x\|_{l_{p,\sigma}} \quad , \quad x \in B_r(l_{p,\sigma}) \ .$$

Osim toga Lipschitzov uslov ćemo u narednim poglavljima dovesti u usku vezu sa kondenziranjem i deferencijabilnošću operatora superpozicije.

Glava 6

Kompaktnost

6.1 Kompaktnost operatora superpozicije

U poglavlju **3**, ispitivali smo osobinu ograničenosti operatora superpozicije $F : l_{p,\sigma} \to l_{q,\tau}$, tj. za $N \subset l_{p,\sigma}$ ispitivali smo kakav je skup $F(N) \subset l_{q,\tau}$ u smislu neke od vrsta ograničenosti. Podsjetimo se da skup N nazivamo *relativno kompaktnim*, ako za svako $\varepsilon > 0$ skup N ima konačnu ε-mrežu, ili, što je ekvivalentno, ako se iz svakog niza u N može izdvojiti konvergentan podniz.

Kako se pokazuje u primjenama, od izuzetne je važnosti osobina relativne kompaktnosti skupa. Samim tim od važnosti je onda da posmatrano preslikavanje prevodi ograničen skup u relativno kompaktan skup. Tu osobinu preslikavanja uvodi

Definicija 6.1.1. Operator $F : X \to Y$ nazivamo *kompaktnim* ako svaki ograničen skup iz X preslikava u relativno kompaktan skup u Y.

Slijedećim teoremom data je generalna karakterizacija kompaktnosti operatora na idealnim prostorima

Teorem 6.1.1. *Neka su X i Y idealni prostori i naka je f sup-mjerljiva funkcija. Pretpostavimo da je operator superpozicije F, generisan funkcijom f, kompaktan operator. Tada je funcija $f(s, \cdot)$ konstantna za svako $s \in \Omega_c$ i operator F je W-ograničen.*
Obratno, ako su X i Y idealni prostori, Y regularan a funkcija $f(s, \cdot)$ konstantna za svako $s \in \Omega_c$ i operator F W-ograničen na nekom skupu $N \subset X$. Tada je $F(N) \subset Y$ relativno kompaktan skup.

U prostorima bez atoma ($\Omega_d = \emptyset$), zahtjev za kompaktnošću operatora superpozicije dovodi do velike degeneracije, tj. do sužavanja klase funkcija $f(s,u)$ koje mogu generisati takve operatore na klasu konstantnih funkcija po u.
U našem izučavanju je $\Omega_c = \emptyset$, pa ćemo ovde dati nešto jednostavniju karakterizaciju kompaktnosti operatora superpozicije na $l_{p,\sigma}$.

Teorem 6.1.2. *Operator superpozicije $F : l_{p,\sigma} \to l_{q,\tau}$, generisan funkcijom $f(s,u)$ je kompaktan ako i samo ako je za svako $s \in \mathbb{N}$ funkcija $f(s,\cdot)$ ograničena na svakom ograničenom skupu u $\mathbb{R}$.*

Dokaz : ($\Longrightarrow$)

Neka je F kompaktan operator, onda je on i ograničen. Na osnovu Teoreme 3.1.2 zaključujemo da je funkcija $f(s,\cdot)$ ograničena na svakom ograničenom skupu u $\mathbb{R}$.
($\Longleftarrow$)
Neka je sada funkcija $f(s,\cdot)$ za svako $s \in \mathbb{N}$, ograničena na svakom ograničenom skupu u $\mathbb{R}$. Na osnovu Teoreme 3.1.2 zaključujemo da je operator F ograničen. Kako je $l_{q,\tau}$, $1 \leq q < \infty$ regularan, to je za proizvoljan $A \subset l_{p,\sigma}$, FA apsolutno ograničen skup u $l_{q,\tau}$. U idealnim prostorima sa diskretnom mjerom apsolutna ograničenost je ekvivalentna relativnoj kompaktnosti, te je dakle FA relativno kompaktan. Zbog proizvoljnosti skupa A, zaključujemo da je F kompaktan operator. ♣

6.2 $\mathcal{L}$-karakteristika kompaktnosti operatora superpozicije

Rezultati dobijeni o skupu $\mathcal{L}(F; act.)$ dozvoljavaju nam sada posmatrati skup $\mathcal{L}(F; compact.)$ kao dio od $\mathcal{L}(F; act.)$. Najprije dajemo karakterizaciju relativno kompaktnog skupa na $l_{p,\sigma}$.

Teorem 6.2.1. *Potreban i dovoljan uslov da je skup $N \subset l_{p,\sigma}$ relativno kompaktan jeste*

1. *da postoje pozitivni brojevi ρ_s ($s \in \mathbb{N}$) takvi da je*

$$(\forall x \in N)\ |x(s)|\sigma(s) \leq \rho_s \ .$$

2. da red $\sum_{s\in\mathbb{N}}|x(s)|^p\sigma(s)$ konvergira uniformno po $x \in N$.

Dokaz : Neka su zadovoljeni uslovi 1. i 2. . Zbog uniformne konvergencije reda u 2., svakom $\varepsilon > 0$ odgovara broj $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(\forall x \in N) \sum_{s=k+1}^{\infty} |x(s)|^p\sigma(s) < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p .$$

Svakoj funkciji $x \in N$ pridružimo element $z = (x(1), x(2), \ldots, x(k), 0, 0, \ldots)$, pri čemu jedan isti z može odgovarati i različitim $x \in N$. Očigledno je skup A , svih ovakvi z, jedna $\frac{\varepsilon}{2}$-mreža skupa N, jer je

$$\|x - z\|_{l_{p,\sigma}} = \left(\sum_{s=k+1}^{\infty} |x(s)|^p\sigma(s)\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2} .$$

S druge strane $A \subset \mathbb{R}_p^k \subset l_{p,1}$ i očigledno je A ograničen skup. Kako u konačno-dimenzionim prostorima ograničenost i relativna kompaktnost koincidiraju, to za A postoji konačna $\frac{\varepsilon}{2}$-mreža, a ta je opet konačna ε-mreža za N, tj. N je relativno kompaktan skup u $l_{p,\sigma}$.
Neka je sada N relativno kompaktan skup u $l_{p,\sigma}$. Pretpostavimo da za neko $s_0 \in \mathbb{N}$, skup $\{x(s_0)\sigma(s_0)|\ x \in N\}$ nije ograničen. Tada postoji $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset N$ takav da

$$\lim_{n\to\infty} x_n(s_0) = +\infty . \tag{6.2.1}$$

Zbog relativne kompaktnosti skupa N iz datog niza možemo izdvojiti konvergentan podniz $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Kako iz konvergencije po normi slijedi konvergencija po koordinatama, to za proizvoljno $s \in \mathbb{N}$ mora konvergirati i niz koordinata $(x_{n_k}(s))_{k\in\mathbb{N}}$. To mora važiti i za s_0, ali to je onda u kontradikciji sa (6.2.1). Dakle uslov 1. je neophodan.

Pretpostavimo sada da red $\sum_{s\in\mathbb{N}}|x(s)|^p\sigma(s)$ nije konvergentan uniformno po $x \in N$. To znači da postoji $\varepsilon > 0$ i niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset N$ takav da je

$$\sum_{s=k+1}^{\infty} |x_n(s)|^p\sigma(s) \geq \varepsilon\ ;\ n \in \mathbb{N} . \tag{6.2.2}$$

Pretpostavimo sada da je $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ podniz niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji konvergira ka nekom $x \in l_{p,\sigma}$; kako je $x \in l_{p,\sigma}$ to postoji $s_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\sum_{s=s_0+1}^{\infty} |x(s)|^p\sigma(s) < \frac{\varepsilon}{2^p} ,$$

a zbog $x_{n_k} \to x$ $(k \to \infty)$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\|x_{n_k} - x\|_{l_{p,\sigma}} < \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2}$ za $k \geq k_0$. Neka je sada $k \in \mathbb{N}$ takav da je $n_k \geq s_0$. Tada imamo

$$\sum_{s=n_k+1}^{\infty} |x_{n_k}(s)|^p \sigma(s) \leq \sum_{s=n_k+1}^{\infty} |x_{n_k}(s) - x(s)|^p \sigma(s) + \sum_{s=n_k+1}^{\infty} |x(s)|^p \sigma(s) < \varepsilon^{\frac{1}{p}} ,$$

a ovo je kontradikcija sa (6.2.2). Dakle i uslov 2. je neophodan. ♣

Uz pomoć kriterija za relativnu kompaktnost skupa u $l_{p,\sigma}$, kojeg smo upravo dali, možemo iskazati tvrdnju koja nam govori da je $\mathcal{L}$-karakteristika kompaktnosti nelinearnog operatora superpozicije konveksan skup.

Teorem 6.2.2. *Neka je F operator superpozicije, generisan funkcijom $f(s,u)$, kompaktan kao operator iz $l_{p_0,\sigma}$ u $l_{q_0,\tau}$ i iz $l_{p_1,\sigma}$ u $l_{q_1,\tau}$. Tada je operator F kompaktan i iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$, gdje je $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 < \infty$ i*

$$\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_0} + \frac{1-\alpha}{p_1} \ , \ \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{q_0} + \frac{1-\alpha}{q_1} \ ; \ \alpha \in [0,1] \ .$$

Dokaz : Posmatrat ćemo opšti slučaj, kada je $p_0 \leq p_1$, $q_0 \leq q_1$ i $\frac{p_0}{q_0} \leq \frac{p_1}{q_1}$. Neka je $p_0 \leq p \leq p_1$ i $q_0 \leq q \leq q_1$. Za $p \leq p_1$ je $l_{p,\sigma} \subset l_{p_1,\sigma}$, pa je za proizvoljan ograničen skup $M \subset l_{p,\sigma}$, $M \subset l_{p_1,\sigma}$ i M je ograničen u $l_{p_1,\sigma}$. Kako je F kompaktan operator, na osnovu karakterizacije relativno kompaktnog skupa u Banachovom prostoru $l_{p_1,\sigma}$, važi

$$(\exists \rho_s)(\forall x \in M) \ |f(s,x(s))| \leq \rho_s \ \ , \ s \in \mathbb{N} \ . \tag{6.2.3}$$

Sa druge strane, kako je $q \geq q_0$ onda je $l_{q_0,\tau} \subset l_{q,\tau}$, tj. za proizvoljan y je $||y||_{l_{q,\tau}} \leq ||y||_{l_{q_0,\tau}}$, pa je za proizvoljan $x \in M$

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{s\in\mathbb{N}} |Fx(s)|^q \tau(s) &= \textstyle\sum_{s\in\mathbb{N}} |f(s,x(s))|^q \tau(s) = ||Fx||^q_{l_{q,\tau}} \\ &\leq ||Fx||^q_{l_{q_0,\tau}} < \infty \ . \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

Dakle red $\sum_{s\in\mathbb{N}} |Fx(s)|^q$ je uniformno konvergentan po $x \in M$. Iz (6.2.3) i (6.2.4), na osnovu karakterizacije relativno kompaktnog skupa u $l_{p,\sigma}$, zaključujemo da je FM relativno kompaktan skup u $l_{q,\tau}$, tj. F je kompaktan operator iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$. ♣

6.3 Komentari i reference

Činjenica da kompaktan operator superpozicije "degenerira" (Teorem 6.1.1), poznata je za različite normirane funkcionalne prostore, a prvi put je dokazana od strane M.A. Krasnosels'kog u [16], za Lebesgueove prostore. Osim toga ovim je teoremom dat kompletan opis kompaktnih operatora za slučaj regularnog prostora Y, pa samim tim i za naš slučaj težinskih Banachovih prostora nizova (ili preciznije, $\Omega_c = \emptyset$).

Jednostavan kriterij za kompaktnost operatora superpozicije na $l_{p,\sigma}$ prostorima, (Teorem 6.1.2), je moguć zahvaljujući ekvivalentnosti uslova apsolutne ograničenosti i relativne kompaktnosti na regularnim prostorima, odnosno kompaktnost se svodi na ograničenost.

Takodje, karakterizacija relativno kompaktnih skupova na $l_{p,\sigma}$, omogućava nam pokazati da je i $\mathcal{L}(F; compact.)$ konveksan podskup od $\mathcal{L}(F; act.)$, što je pokazano sa Teorem 6.2.2 koja je nova, a što može biti od velike koristi u primjenama teorije fiksne tačke.

Glava 7

Kondenziranje

7.1 Mjera nekompaktnosti

Definicija 7.1.1. Neka je X kompletan metrički prostor. Nenegativnu funkciju ψ, definisanu na sistemu svih ograničenih podskupova od X, nazivamo *funkcional Sadovskog* ako su zadovoljeni slijedeći uslovi ($N,\ N_1,\ N_2 \subset X$, ograničeni):

1. $\psi(\overline{co}N) = \psi(N)$,

2. $\psi(N_1 \cup N_2) = max\{\psi(N_1), \psi(N_2)\}$,

   gdje $\overline{co}N$ označava zatvorenje konveksnog omotača od N.
   Ukoliko funkcional ψ zadovoljava osobinu

$$\psi(N) = 0 \Leftrightarrow \ N \text{ je relativno kompaktan}$$

tada ψ nazivamo *mjera nekompaktnosti*.

U Banachovim prostorima uobičajeni zahtjevi na funkcional ψ su:

1. $\psi(N_1 + N_2) \leq \psi(N_1) + \psi(N_2)$,

2. $\psi(kN) \leq k\psi(N)$.

Klasični primjeri funkcionala koji zadovoljavaju gore navedene osobine su:
-Mjera nekompaktnosti *Kuratovskog*,

$$\gamma(N) = \inf\left\{ d > 0 \ : \ N \subset \bigcup_{j=1}^{m} N_j \ , diamN_j \leq d \right\} \ ,$$

ili infimum svih $d > 0$ za koje postoji konačno razbijanje skupa N na podskupove čiji diametar je manji od d.
-*Hausdorffova* mjera nekompaktnosti,

$$\alpha(N) = inf\{r > 0 \ : \ N \subset B_r(X) + C \ , C \text{ konačan}\},$$

gdje se infimum može uzimati i preko svih kompaktnih skupova $C \subset X$. Hausdorffovu mjeru nekompaktnosti možemo definisati i kao infimum svih $\varepsilon > 0$ za koje skup N ima konačnu ε-mrežu u X.
-Mjera nekompaktnosti β, tj. infimum svih $r > 0$ za koje svaki podskup od N, čija proizvoljna dva elementa su na rastojanju ne manjem od r, je konačan.
-Mjera nekompaktnosti η,

$$\eta(N) = inf\{r > 0 \ : \ N \subset B_r(X) + C, \ C \text{ je } U - \text{ograničen}\} \ .$$

U proizvoljnom idealnom prostoru X važi

$$\alpha \leq \beta \leq \gamma \leq 2\alpha \ . \tag{7.1.1}$$

U slučaju da je X regularan prostor, tada je

$$\eta \leq \alpha \leq \gamma \ . \tag{7.1.2}$$

Navedimo slijedeću važnu osobinu Hausdorffove i mjere nekompaktnosti Kuratovskog,

Teorem 7.1.1. *Neka je X normiran linearan prostor. Ako je X konačno-dimenzionalan prostor, tada je*

$$\alpha(B_1(X)) = \gamma(B_1(X)) = 0 \ .$$

Ako je X beskonačno-dimenzinalan prostor, onda je

$$\alpha(B_1(X)) = 1, \quad \gamma(B_1(X)) = 2 \ .$$

Kao što se vidi iz (7.1.1), mjere nekompaktnosti β i γ su topološki ekvivalentne Hausdorffovoj mjeri nekompaktnosti. Medjutim, postoje i mjere nekompaktnosti koje nisu ekvivalentne Hausdorffovoj mjeri nekompaktnosti, što se vidi iz (7.1.2).
U daljem, uglavnom koristimo Hausdorffovu mjeru nekompaktnosti, pa s tim u vezi navedimo slijedeći,

Teorem 7.1.2. *Neka je X separabilan Banachov prostor i neka je $(L_j)_{j\in\mathbb{N}}$ rastući niz konačno-dimenzionalnih potprostora od X, čija je unija svuda gust skup u X. Tada za proizvoljan ograničen skup $N \subset X$ važi*

$$\alpha(N) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in N} \min_{y\in L_n} ||x-y||_X \quad .$$

Iz datog teorema, specijalno za $l_{p,\sigma}$, $1 \leq p < \infty$ važi

Posljedica 7.1.3. *Neka je $N \subset l_{p,\sigma}$ $(1 \leq p < \infty)$ proizvoljan ograničen skup. Tada je*

$$\alpha(N) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in N} \left\|x - \overline{P}_n x\right\|_{l_{p,\sigma}} \quad , \tag{7.1.3}$$

gdje je $\overline{P}_n x = \sum_{k=1}^{n} x(k)e_k$ (e_k ($k \in \mathbb{N}$), vektori standardne baze u $l_{p,\sigma}$).

Uslov (7.1.3) možemo predstaviti i u slijedećem obliku:

$$\alpha(N) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in N} \|P_n x\|_{l_{p,\sigma}}$$

gdje je P_n operator projektovanja na skup $\{n+1, n+2, \ldots\}$.

7.2 Kondenziranje operatora superpozicije

Definicija 7.2.1. Neka su X i Y Banachovi prostori i neka je na X zadata mjera nekompaktnosti ψ_1 a na Y mjera nekompaktnosti ψ_2. Za neprekidan operator A koji djeluje iz X u Y kažemo da je (k, ψ_1, ψ_2)-*ograničen*, ako za proizvoljan skup $N \subset X$ važi

$$\psi_2(AN) \leq k\psi_1(N) \quad ,$$

gdje je k neka pozitivna realna konstanta.
Kažemo da je operator A *kondenzirajući u sopstvenom smislu* ako je za proizvoljan skup $N \subset X$, čije zatvorenje nije kompaktan skup, ispunjeno

$$\psi_2(AN) < \psi_1(N) \quad .$$

Ako ψ_1 i ψ_2 predstavljaju istu mjeru nekompaktnosti, tj. ako je $\psi_1 = \psi_2 = \psi$, tada operator A nazivamo ψ-*kondenzirajući* ili (k, ψ)-*ograničenim.*

Djelovanje operatora nije dovoljno za njegovo α-kondenziranje, što pokazuje slijedeći primjer. Neka je operator superpozicije F generisan funkcijom $f(s, u(s)) = u(s)^s$. Nije teško vidjeti da F djeluje iz proizvoljnog prostora l_p u l_p. Neka je $r > 0$ proizvoljno. Označimo sa

$$M = \{(0, \dots, \underbrace{1+r}_{n-\text{to mjesto}}, 0, \dots,) : n \in \mathbb{N}\} ,$$

očigledno je $M \subset B_{1+r}(l_{p,\sigma})$. Pri tome je

$$\alpha(FM) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x \in M} ||x||_{l_p} = \lim_{n\to\infty} |1+r|^n = \infty \quad .$$

S druge strane je $\alpha(M) = 1+r$, te očigledno operator F nije α-kondenzirajući. Da bi operator imao traženu osobinu, moramo pojačati uslove na operator F.

Teorem 7.2.1. *Neka operator superpozicije F, generisan finkcijom $f(s, u)$, djeluje iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$ i neka zadovoljava lokalni Lipschizov uslov tj.*

$$\|Fx' - Fx''\|_{l_{q,\tau}} \le k(r) \|x' - x''\|_{l_{p,\sigma}} \quad , \; x', x'' \in B_r(l_{p,\sigma}) \quad ,$$

tada je operator F $(k(r), \alpha)$-ograničen, tj. za proizvoljan $N \subset B_r(l_{p,\sigma})$ važi

$$\alpha(FN) \le k(r)\alpha(N) \quad .$$

Dokaz : Neka je $N \subset B_r(l_{p,\sigma})$ proizvoljan. Zbog lokalnog Lipschizovog uslova imamo

$$(\forall x', x'' \in N \subset l_{p,\sigma}) \;\; \|Fx' - Fx''\|_{l_{q,\tau}} \le k(r) \|x' - x''\|_{l_{p,\sigma}} \quad .$$

Za proizvoljan $x \in N$ sada, budući da F komutira sa P_n (jer je parcijalno aditivan), imamo

$$\begin{aligned} \|P_n F x\|_{l_{q,\tau}} &= \left\|Fx - \overline{P}_n F x\right\|_{l_{q,\tau}} \\ &\le k(r) \left\|x - \overline{P}_n x\right\|_{l_{p,\sigma}} \\ &= k(r) \|P_n x\|_{l_{p,\sigma}} \end{aligned}$$

Sada prelaskom na supremum po svim $x \in N$ i puštajući da n teži u beskonačnost, dobijamo

$$\alpha(FN) \le k(r)\alpha(N)$$

što je i trebalo pokazati. ♣

Kao što pokazuje prethodno tvrdjenje, Lipschitzov uslov je dovoljan za kondenziranje operatora. U Lebesgueovim prostorima, tj. u prostorima gdje mjera nema atoma, pokazuje se da važi i obrat tj. kondenziranje operatora povlači Lipschitzov uslov sa istom konstantom k. U prostorima sa diskretnom mjerom to nije slučaj. Posmatrajmo operator F generisan funkcijom $f(s,u) = u^2$, koji djeluje iz l_1 u l_1. Za proizvoljan ograničen skup $N \subset l_1$, zbog regularnosti prostora l_1, imamo

$$\alpha(FN) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in N} ||FP_nx|| = 0 \quad .$$

Sa druge strane, za $e_n, e_m \in B_1(l_1)$ je

$$||Fe_n - Fe_m||_{l_1} = 2 = ||e_n - e_m||_{l_1} \quad .$$

Naravno, Lipschitzov uslov je jako ograničenje za operator F. Pokažimo da se taj uslov može oslabiti. Najprije dokažimo jedno pomoćno tvrdjenje:

Lema 7.2.2. *Neka su F i G operatori superpozicije generisani funkcijama $f(s,u)$ i $g(s,u)$ respektivno, koji djeluju iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$ $(1 \le p,q < \infty)$. Ako za proizvoljno $x \in M \subset l_{p,\sigma}$ važi*

$$|f(s,u(s))| \le |g(s,u(s))| \quad , \quad s \in \mathbb{N} \ , \tag{7.2.1}$$

tada je

$$\alpha(FM) \le \alpha(GM) \quad .$$

Dokaz : Iz (7.2.1) i definicije norme na $l_{q,\tau}$, za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ je

$$\|P_nFx\|_{l_{q,\tau}} \le \|P_nGx\|_{l_{q,\tau}} \quad ,$$

odakle prelaskom na supremum po $x \in M$ dobijamo navedenu nejednakost. ♣

Teorem 7.2.3. *Neka su $1 \le p,q < \infty$ i neka je operator superpozicije F, generisan funkcijom $f(s,u)$, ograničen iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$. Tada je F α-kondenzirajući.*

Dokaz : Neka su $x_0 \in l_{p,\sigma}$ i $r > 0$ proizvoljni. Iz uslova ograničenosti operatora F (Teorem 3.2.3), postoje $a_r \in l_{q,\tau}$ i $b_r > 0$ takvi da je

$$|f(s,u)| \leq a_r(s) + b_r \sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|u|^{\frac{p}{q}} \quad , \ \sigma(s)|u|^p \leq r^p \ . \tag{7.2.2}$$

Označimo sa $f_1(s,u) = a_r(s) + b_r\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|u|^{\frac{p}{q}}$ i neka je F_1 operator superpozicije generisan tom funkcijom. Neka je $M \subset B(x_0, r) \subset l_{p,\sigma}$ proizvoljno odabran skup. Jasno je da funcija a_r neće uticati na veličinu $\alpha(F_1M)$, pa ne gubeći na opštosti, stavimo $f_1(s,u) = b_r\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|u|^{\frac{p}{q}}$. Tada je

$$\begin{aligned}
\alpha(F_1M) &= \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in M}\|P_nF_1M\| \\
&= \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in M}\left(\sum_{s>n}\left(b_r|x(s)|^{\frac{p}{q}}\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)\right)^q\tau(s)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= b_r\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in M}\left(\sum_{s>n}|x(s)|^p\sigma(s)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= b_r\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in M}\left(\left(\sum_{s>n}|x(s)|^p\sigma(s)\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{q}} \\
&= b_r\left(\alpha(M)\right)^{\frac{p}{q}} \\
&= b_r\left(\alpha(M)\right)^{\frac{p}{q}-1}\alpha(M) \ .
\end{aligned}$$

Kako je $\alpha(M) \leq \alpha(B(x_0,r)) = r$, zaključujemo

$$\alpha(F_1M) \leq b_r r^{\frac{p}{q}-1}\alpha(M) \quad .$$

Zbog Leme 7.2.2 je $\alpha(FM) \leq \alpha(F_1M)$, pa dakle važi

$$\alpha(FM) \leq b_r r^{\frac{p}{q}-1}\alpha(M)$$

tj. operator F je $\left(b_r r^{\frac{p}{q}-1}, \alpha\right)$-ograničen. S obzirom da posljednja tvrdnja vrijedi za proizvoljno b_r za koga je zadovoljen uslov (7.2.2), uzimajući

$$b^* = \inf\{b_r : |f(s,u)| \leq a_r(s) + b_r\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|u|^{\frac{p}{q}} \quad , \ \sigma(s)|u|^p \leq r^p\} \ ,$$

možemo reći da je operator F $(k(r),\alpha)$-ograničen, gdje je $k(r) = b^* r^{\frac{p}{q}-1}$. ♣

Teorem 7.2.3 nam dozvoljava formulisati teorem o fiksnoj tački koji vrijedi za nelinearni operator superpozicije, naime vrijedi

Teorem 7.2.4. *Neka su* $1 \leq p, q < \infty$ *i neka je operator superpozicije* F*, generisan funkcijom* $f(s,u)$*, ograničen iz* $l_{p,\sigma}$ *u* $l_{q,\tau}$*. Za proizvoljno* $r > 0$ *stavimo*

$$k = r^{\frac{p}{q}-1} \inf\{b : \ |f(s,u)| \leq a(s) + b\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|u|^{\frac{p}{q}} \ , \ \sigma(s)|u|^p \leq r^p\} \ .$$

Neka je $0 < r^* < k^{\frac{1}{1-\frac{p}{q}}}$ *takav da je*

$$k{r^*}^{\frac{p}{q}} + \|a\|_{l_{q,\tau}} \leq r^* \ .$$

Tada operator F *ima fiksnu tačku u kugli* $B_{r^*}(l_{p,\sigma})$*.*

Dokaz : Neka je $r > 0$ proizvoljan. Na osnovu Teoreme 7.2.3 operator F je α-kondenzirajući tj. za proizvoljan $N \subset B_r(l_{p,\sigma})$ važi

$$\alpha(FN) \leq k\alpha(N) \ .$$

Zbog djelovanja operatora F iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$ (Teorem 2.2.2) je

$$|f(s,u)| \leq a(s) + b\sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|u|^{\frac{p}{q}} \ , \ \sigma(s)|u|^p \leq r \ ,$$

pa je za proizvoljno $x \in B_{r^*}(l_{p,\sigma})$

$$\begin{aligned} \|Fx\|_{l_{q,\tau}} &\leq \|a\|_{l_{q,\tau}} + b\,\|x\|_{l_{p,\sigma}}^{\frac{p}{q}} \\ &\leq \|a\|_{l_{q,\tau}} + b{r^*}^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

Kako lijeva strana ne ovisi od b, prelaskom na infimum po svim b koji zadovoljavaju uslov (7.2.2), imamo

$$\|Fx\|_{l_{q,\tau}} \leq \|a\|_{l_{q,\tau}} + k{r^*}^{\frac{p}{q}} \ ,$$

tj. $F : B_{r^*}(l_{p,\sigma}) \to B_{r^*}(l_{p,\sigma})$ i pri tome je F α-kondenzirajući i na $B_{r^*}(l_{p,\sigma})$. Na osnovu Darbo-Sadovsky teorema o fiksnoj tački, F u kugli $B_{r^*}(l_{p,\sigma})$ ima najmanje jednu nepokretnu tačku. ♣

Budući da u praktičnim primjenama osobine kondenziranja glavnu ulogu igra koeficijent kondenziranja $k(r)$, ostanimo još malo kod toga. Uvedimo u igru slijedeću funkciju

$$H_F(r,\delta) = \sup_{M \subset B_r(l_{p,\sigma}), \alpha(M) \leq \delta} \alpha(F(M)) \ . \tag{7.2.3}$$

Funkcija $H_F(r,\delta)$ se naziva *funkcija kondenziranja* operatora F i ona za "nekompaktnost" ima istu ulogu kao funkcija rasta μ_F za ograničenost operatora F. Očigledno je, već na prvi pogled, da detaljno izučavanje funkcije kondenziranja ni malo nije jednostavno. Ipak, moguće je dati neke njene procjene koje se u slučaju, npr., linearnosti operatora pojednostavljuju i prelaze u jednakosti.

Teorem 7.2.5. *Neka je $1 \leq p,q < \infty$ i neka je operator superpozicije F, generisan funkcijom $f(s,u)$, ograničen iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$. Tada važi nejednakost*

$$H_F(r,\delta) \leq \delta^{\frac{p}{q}} b^* \ , \tag{7.2.4}$$

gdje je $b^* = \inf\{b_r : |f(s,u)| \leq a_r(s) + b_r \sigma^{\frac{1}{q}}(s)\tau^{-\frac{1}{q}}(s)|u|^{\frac{p}{q}} \ \ , \ \sigma(s)|u|^p \leq r^p\}$.

Dokaz : Neka su $r,\delta > 0$ proizvoljni i $M \subset B_r(l_{p,\sigma})$ takav da je $\alpha(M) \leq \delta$. Kako smo već u dokazu teoreme 7.2.3 pokazali, za ograničen operator F važi

$$\alpha(FM) \leq b_r \left(\alpha(M)\right)^{\frac{p}{q}} \ ,$$

odnosno, uzimajući infimum po svim b_r koji zadovoljavaju uslov (7.2.2) imamo

$$\alpha(FM) \leq b^* \left(\alpha(M)\right)^{\frac{p}{q}} \ .$$

Uzmemo li sada supremum i lijeve i desne strane po svim $M \subset B_r(l_{p,\sigma})$, za koje je $\alpha(M) \leq \delta$, dobijamo

$$H_F(r,\delta) \leq b^* \delta^{\frac{p}{q}} \ .$$

♣

Koristeći (7.2.4) sada možemo definisati koeficijent kondenzacije na slijedeći način

$$k(r) = \sup_{0<\delta\leq r} \frac{H_F(r,\delta)}{\delta},$$

iz čega slijedi očigledna ocjena

$$k(r) \leq b^* r^{\frac{p-q}{q}} \ ,$$

koja u slučaju linearnosti operatora F prelazi u jednakost.

7.3 Komentari i reference

Kao što je spomenuto, postoje različito definisane mjere nekompaktnosti. Jedna od najprimjenljivijih je Hausdorffova mjera nekompaktnosti. U [8] je izvedena klasa svih mjera nekompaktnosti ekvivalentnih Hausdorffovoj mjeri nekompaktnosti (ekvivalentnost u smislu da postoje konstante C_1 i C_2 takve da je $C_1\alpha(N) \leq \psi(N) \leq C_2\alpha(N)$, za proivoljan ograničen skup $N \subset X$). Takve su mjera nekompaktnosti Kuratovskog i mjera β (7.1.1). Medjutim, postoje i mjere nekompaktnosti koje nisu ekvivalentne Hausdorffovoj mjeri, npr. mjera η (7.1.2), ili primjer mjere dat u [12]. Teorem 7.1.2 ([12]) nam daje način računanja Hausdorffove mjere nekompaktnosti u $l_{p,\sigma}$ prostorima (Posljedica 7.1.3).

Jedna od najkorisnijih osobina operatora u primjenama teorije fiksne tačke, jeste osobina kondenziranja. U ovom radu je posmatrana osobina kondenziranja, vezana za Hausdorffovu mjeru nekompaktnosti. Kao što je pokazano (Teorem 7.2.1), Lipschitzov uslov je dovoljan za kondenziranje operatora superpozicije. U [2] je pokazano da su ta dva uslova ekvivalentna na Lebesgueovim prostorima ($\Omega_d = \emptyset$), što nije slučaj u prostorima sa diskretnom mjerom.

Prvi navedeni primjer pokazuje da samo djelovanje operatora ne obezbjedjuje njegovo kondenziranje. Razlog je taj što operator generisan datom funkcijom nije ograničen. Teorem 7.2.3 daje neophodne i dovoljne uslove za kondenziranje operatora supeprozicije na $l_{p,\sigma}$, što nam omogućava definisati i uslove o postojanju fiksne tačke (Teorem 7.2.4) za nelinearni operator superpozicije na $l_{p,\sigma}$. Oba ova rezultata su novi.

Glava 8

Diferencijabilnost i analitičnost

8.1 Diferencijabilnost operatora superpozicije

Neka su X i Y Banachovi prostori, $U \subset X$ otvoren skup i neka je operator $F : U \to Y$.

Definicija 8.1.1. Za preslikavanje F kažemo da je *Frechet diferencijabilno* u $x_0 \in U$ ako postoji $A \in L(X,Y)$ takav da

$$\lim_{||h|| \to 0} \frac{||F(x_0+h) - F(x_0) - Ah||_Y}{||h||_X} = 0 \quad .$$

Ako ovakav operator A postoji, on je jedinstven i nazivamo ga *Frechetov izvod* operatora F u tački x_0 i označavamo ga sa $F'(x_0)$. Vrijednost $F'(x_0)x \in Y$, za proizvoljan $x \in X$, nazivamo izvod operatora F u x_0 duž x.
Kažemo da je F Frechet diferencijabilan na U, ako je on Frechet diferencijabilan u svakoj tački iz U, u tom slučaju preslikavanje $x \mapsto F'(x)$ je preslikavanje iz U u $L(X,Y)$ i označavamo ga sa dF.

Ekvivalentan način reći da je $A \in L(X,Y)$ izvod od F u tački x_0, je da vrijedi

$$F(x_0+h) - F(x_0) - Ah = o(||h||) \quad , \quad h \to 0 \quad ,$$

i pri tome je

$$F'(x)h = \lim_{t \to 0} \frac{F(x+th) - F(x)}{t} \quad , \quad h \in X \quad . \tag{8.1.1}$$

Teorem 8.1.1. *Neka je $f(s,u)$ Caratheodory-jeva funkcija i neka operator F, generisan funkcijom $f(s,u)$ djeluje iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$.*
Ako je F diferencijabilan u $x_0 \in l_{p,\sigma}$, njegov izvod u toj tački ima oblik

$$F'(x_0)h(s) = a(s)h(s) \ , \tag{8.1.2}$$

gdje je $a \in l_{q,\tau}/l_{p,\sigma}$, data sa

$$a(s) = \lim_{u\to 0} \frac{f(s, x_0(s)+u) - f(s, x_0(s))}{u} \ . \tag{8.1.3}$$

Obratno, ako operator superpozicije G, generisan funkcijom

$$g(s,u) = \begin{cases} \frac{1}{u}[f(s,x(s)+u) - f(s,x(s))] & ; \ u \neq 0, \\ a(s) & ; \ u = 0, \end{cases} \tag{8.1.4}$$

djeluje iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}/l_{p,\sigma}$, i neprekidan je u θ, onda je F diferencijabilan u x_0 i važi (8.1.2).

Dokaz : Neka je operator F, generisan funkcijom $f(s,u)$, Frechet diferencijabilan u $x \in l_{p,\sigma}$. Označimo sa $a_x(s) = Au(s)u^{-1}(s)$ $(u \in l_{p,\sigma})$. Kako je operator F lokalno odredjen, na osnovu (1.3.1c) i na osnovu (8.1.1), i $A = F'(x)$ je lokalno odredjen, to važi:

$$Ah(s) = a_x(s)h(s)$$

za proizvoljnu funkciju oblika $h = zx$, gdje je z jednostavna funkcija. Kako je A neprekidan operator iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$, i kako je množenje operatora neprekidna funkcija, jednakost $Ah = a_x h$ vrijedi i na zatvorenju skupa svih funkcija oblika $h = zx$ (označimo ga sa $(l_{p,\sigma})_x$), gdje je z jednostavna funkcija ($z = \sum_{k=1}^{n} \chi_{E_k} c_k$). Neka je sada $x_1 \in l_{p,\sigma}$ takva da je $x_1 \leq x$. Tada $x_1 \in (l_{p,\sigma})_x$ pa je

$$Ax_1(s) = a_x(s)x_1(s) \ ,$$

a odavde imamo da je

$$a_x(s) = Ax_1(s)x_1^{-1}(s) = a_{x_1}(s) \ .$$

Neka su sada x_1 i $x_2 \in l_{p,\sigma}$ proizvoljne funkcije. Onda bi za funkciju $x = x_1 + x_2$ kao i gore, imali da je $a_{x_1}(s) = a_x(s) = a_{x_2}(s)$. Na osnovu ovoga vidimo da funkcija a_x ne ovisi od x. Kako se $l_{p,\sigma}$ može prikazati kao unija svih

$(l_{p,\sigma})_x$, onda izvod $A = F'(x)$ ima oblik (8.1.2), tj. A je operator množenja nekom funkcijom. Šta više, iz (8.1.1) imamo

$$a(s) = \lim_{u \to 0} \frac{f(s, x(s) + u) - f(s, x(s))}{u} \quad .$$

Obrat tvrdjenja; posmatrajmo sada funkciju (8.1.4) i označimo sa G, operator superpozicije generisan tom funkcijom. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} F(x+h)(s) - Fx(s) - a(s)h(s) &= f(s, x(s) + h) - f(s, x(s)) - g(s, 0)h(s) \\ &= g(s, h)h(s) - g(s, 0)h(s) \\ &= (Gh(s) - G\theta(s))h(s) \ . \end{aligned}$$

Sada je očigledno, da ukoliko je G neprekidan operator izmedju $l_{p,\sigma}$ i $l_{q,\tau}/l_{p,\sigma}$, u tački θ, onda važi:

$$F(x+h) - Fx = Ah + \omega(h) \ ,$$

gdje je $\omega(h) = (Gh - G\theta)h$, pri čemu je $\lim_{||h|| \to 0} \frac{|\omega(h)|}{||h||} = 0$. Dakle, operator F je Frechet diferencijabilan u tački x. ♣

Primjetimo da prvi dio teorema daje oblik izvoda operatora superpozicije na $l_{p,\sigma}$, dok drugi dio daje dovoljne uslove njegove diferencijabilnosti. Moguće je dati uslove koji su i neophodni i dovoljni za diferencijabilnost operatora superpozicije na $l_{p,\sigma}$, naime vrijedi:

Teorem 8.1.2. *Neka su $1 \leq p, q < \infty$ i neka operator F, generisan funkcijom $f(s,u)$, djeluje iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$. F je diferencijabilan u $x_0 \in l_{p,\sigma}$ ako i samo ako je $f'_u(s,\cdot)$ neprekidna u x_0 za skoro svako $s \in \mathbb{N}$.*

Dokaz : $(\Longleftarrow)$

Neka je $f'_u(s,\cdot)$ neprekidna u $x_0 \in l_{p,\sigma}$. To znači da je operator $\hat{F}$ generisan funkcijom $f'_u(s,u)$, neprekidan operator u tački x_0. Za proizvoljno $h \in l_{p,\sigma}$ postoji $\xi \in l_{p,\sigma}$ takav da je $0 \leq \xi(s) \leq 1$, za skoro svako $s \in \mathbb{N}$ i takav da je

$$f(s, x_0(s) + h(s)) - f(s, x_0(s)) - \frac{\partial}{\partial u} f(s, x_0(s))h(s)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial u} f(s, x_0(s) + \xi(s)h(s)) - \frac{\partial}{\partial u} f(s, x_0(s)) \right) h(s) \quad .$$

Ovo onda znači

$$\begin{aligned}\left\|F(x_0+h)-F(x_0)-\tfrac{\partial}{\partial u}f(s,x_0)h\right\|_{l_{q,\tau}} &= ||\left(\tfrac{\partial}{\partial u}f(s,x_0+\xi h)-\tfrac{\partial}{\partial u}f(s,x_0)\right)h|| \\ &\leq ||\tfrac{\partial}{\partial u}f(s,x_0+\xi h)-\tfrac{\partial}{\partial u}f(s,x_0)||||h|| \ .\end{aligned}$$

Kako je po pretpostavci $f'_u(s,\cdot)$ neprekidna u x_0, to puštajući da $||h||$ teži nuli imamo

$$||F(x_0+h)-F(x_0)-\frac{\partial}{\partial u}f(s,x_0)h||=o(||h||) \ ,$$

a ovo znači da je operator F diferencijabilan u x_0.

($\Longrightarrow$)
Neka je operator F diferencijabilan u $x_0\in l_{p,\sigma}$. Tada postoji $A=F'(x_0)\in L(l_{p,\sigma},l_{q,\tau})$ takav da je

$$F(x_0+h)-F(x_0)-Ah=o(||h||) \ , \ ||h||\to 0$$

i pri tome je $F'(x_0)h(s)=a(s)h(s)$, gdje je $a\in l_{q,\tau}/l_{p,\sigma}$ dat sa (8.1.3). Ovo znači da je $a(s)=f'_u(s,x_0)$. Kako je $F'(x_0)$ neprekidan operator to zbog (8.1.2) zaključujemo da i $a(\cdot)$ mora biti neprekidan, tj. $f'_u(s,\cdot)$ je neprekidna funkcija. ♣

Kao direktnu posljedicu gornjeg teorema imamo

Posljedica 8.1.3. *Neka su $f(s,u)$ i $\widehat{f}(s,u)=f'_u(s,u)$, Caratheodory-jeve funkcije, i neka operator F generisan funkcijom f, preslikava neki otvoren skup $O\subset l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$. Tada je operator F, posmatran izmedju $l_{p,\sigma}$ i $l_{q,\tau}$, neprekidno diferencijabilan na O ako i samo ako operator superpozicije $\widehat{F}$, generisan funkcijom $\widehat{f}$, posmatran kao operator izmedju $l_{p,\sigma}$ i $l_{q,\tau}/l_{p,\sigma}$, je neprekidan na O. Pri tome vrijedi*

$$F'(x)h=\widehat{F}(x)h \ \ (x\in O \ , \ h\in l_{p,\sigma}) \ . \qquad (8.1.5)$$

Primjetimo da će neprekidnost operatora $\widehat{F}$ slijediti iz činjenice da operator množenja nekom funkcijom a, ima normu jednaku $||a||_{l_{q,\tau}/l_{p,\sigma}}$.

Kompletirajmo ovaj dio slijedećim rezultatom koji nam omogućava utvrditi diferencijabilnost operatora superpozicije na svuda gustom skupu u $l_{p,\sigma}$,

Teorem 8.1.4. *Neka su $f(s,u)$ i $\widehat{f}(s,u)=f'_u(s,u)$ Caratheodoryjeve funkcije. Neka operator F generisan funkcijom f preslikava neki skup $N\subset l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\tau}$.*

Dalje, pretpostavimo da operator superpozicije $G(x,h)(s) = g(s,x(s),h(s))$ definisan funkcijom

$$g(s,u,v) = \begin{cases} \frac{1}{v}(f(s,u+v) - f(s,u)) & ; \quad v \neq 0 \\ \widehat{f}(s,u) & ; \quad v = 0 \end{cases}$$

ima osobinu da za $x \in N$, operator $G(x,\cdot)$ je neprekidan izmedju $l_{p,\sigma}$ i $l_{q,\tau}/l_{p,\sigma}$. Tada je operator F, definisan u nekoj okolini O od N, diferencijabilan u svakoj tački $x \in N$ i zadovoljava uslov (8.1.5) za $x \in N$ i $h \in l_{p,\sigma}$.

Slijedeći teorem uspostavlja vezu izmedju kompaktnosti i diferencijabilnosti operatora supeprozicije na $l_{p,\sigma}$.

Teorem 8.1.5. *Neka je $U \subset l_{p,\sigma}$ otvoren i neka je operator superpozicije $F : U \to l_{q,\tau}$, kompaktan i diferencijabilan u $x_0 \in U$. Tada je i $F'(x_0) \in L(l_{p,\sigma}, l_{q,\tau})$ kompaktan operator.*

Dokaz : Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan ograničen niz u $l_{p,\sigma}$. Kako je F kompaktan, ne gubeći na opštosti, razmotrimo niz $(x_0 + \frac{x_n}{k})_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ za proizvoljno fiksno $k \in \mathbb{N}$, i $k \geq K$ dovoljno veliko, takav da je $(F(x_0 + \frac{x_n}{k}))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan. Označimo sa $M = \sup\{\|x_n\|_{l_{p,\sigma}} : n \in \mathbb{N}\}$ i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Zbog diferencijabilnosti operatora F u x_0, postoji $\delta > 0$ takav da

$$||R(h)|| = ||F(x_0 + h) - F(x_0) - F'(x_0)h|| \leq \frac{\varepsilon ||h||}{2M} ,$$

za $h \in l_{p,\sigma}$, $||h|| < \delta$. Sada za proizvoljne $m, n, k \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned} F'(x_0)x_n - F'(x_0)x_m &= k\left[F'(x_0)\left(\frac{x_n}{k}\right) - F'(x_0)\left(\frac{x_m}{k}\right)\right] \\ &= k\left[R\left(\frac{x_m}{k}\right) - R\left(\frac{x_n}{k}\right) + F\left(x_0 + \frac{x_n}{k}\right) - F\left(x_0 + \frac{x_m}{k}\right)\right] . \end{aligned}$$

Neka je $\hat{k}$ fiksiran i $\hat{k} \geq \max\{K, \frac{M}{\delta}\}$. Onda vrijedi

$$\begin{aligned} &\|F'(x_0)x_n - F'(x_0)x_m\|_{l_{q,\tau}} \\ \leq\ & \hat{k}\left[\left\|R\left(\frac{x_m}{\hat{k}}\right)\right\| + \left\|R\left(\frac{x_n}{\hat{k}}\right)\right\| + \left\|F\left(x_0 + \frac{x_n}{\hat{k}}\right) - F\left(x_0 + \frac{x_m}{\hat{k}}\right)\right\|\right] \\ \leq\ & \hat{k}\left[\frac{\varepsilon}{2M\hat{k}}(||x_n|| + ||x_m||) + \left\|F\left(x_0 + \frac{x_n}{\hat{k}}\right) - F\left(x_0 + \frac{x_m}{\hat{k}}\right)\right\|\right] \\ \leq\ & \varepsilon + \hat{k}\left\|F\left(x_0 + \frac{x_n}{\hat{k}}\right) - F\left(x_0 + \frac{x_m}{\hat{k}}\right)\right\| . \end{aligned}$$

Kako je $(F(x_0 + \frac{x_n}{\hat{k}}))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz, to iz posljednjeg zaključujemo da je i $(F'(x_0)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takodje Cauchyjev niz, sa čime je dokaz završen. ♣

Obrat gornjeg tvrdjenja u opštem slučaju ne važi.

Ispitajmo još kondenziranje izvoda operatora superpozicije.

Teorem 8.1.6. *Neka za neko $x_0 \in l_{p,\sigma}$ operator superpozicije $F : U(x_0) \to l_{q,\tau}$ ($U(x_0)$ neka okolina tačke x_0). Neka je operator F (k,α)-ograničen i diferencijabilan u x_0. Tada je i $F'(x_0)$ (k,α)-ograničen.*

Dokaz : Zbog diferencijabilnosti operatora F u tački x_0 postoji $F'(x_0) \in L(l_{p,\sigma}, l_{q,\tau})$, te je $F'(x_0)$ neprekidan linearan operator i preslikava ograničene u ograničene skupove. Prema tome ima smisla ispitivati kondenziranje operatora $F'(x_0)$.

Neka je A ograničen podskup od $l_{p,\sigma}$ ($A \subset B_c(l_{p,\sigma})$) i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Zbog diferencijabilnosti operatora F u x_0, postoji $\delta > 0$ takav da je

$$F(x_0 + h) - F(x_0) - F'(x_0)h = R(h) \ , \tag{8.1.6}$$

gdje je $||R(h)|| \leq \varepsilon ||h||$ za svako h za koje je $||h|| < \delta$. Kako je skup A ograničen, možemo izabrati $\mu > 0$ takav da je za proizvoljno $x \in A$, $||\mu x|| < \delta$. Sada za proizvoljan $h \in A$ imamo

$$F'(x_0)h = \frac{1}{\mu} F'(x_0)(\mu h) \ ,$$

pa na osnovu (8.1.6)

$$F'(x_0)h = \frac{1}{\mu}\left[F(x_0 + \mu h) - F(x_0)\right] - \frac{R(\mu h)}{\mu} \ . \tag{8.1.7}$$

Označimo sa $A^* = \{\frac{1}{\mu}\left[F(x_0 + \mu h) - F(x_0)\right] : \ h \in A\}$ i sa

$$B = \{x \in l_{q,\tau} : \ dist(x, A^*) < \varepsilon c\} \ .$$

Na osnovu (8.1.7) je $F'(x_0)h \in B$, za $h \in A$. Prema tome, imamo

$$\begin{aligned}
\alpha(B) &\leq \alpha(A^*) + 2c\varepsilon \\
&= \frac{1}{\mu}\alpha(F(\mu A)) + 2c\varepsilon \\
&\leq \frac{1}{\mu} k\alpha(\mu A) + 2c\varepsilon \\
&= k\alpha(A) + 2c\varepsilon \ ,
\end{aligned}$$

te zbog proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ važi

$$\alpha(B) \leq k\alpha(A) \ ,$$

odnosno

$$\alpha(F'(x_0)A) \leq \alpha(B) \leq k\alpha(A) \ ,$$

tj. $F'(x_0)$ je (k,α)-ograničen. ♣

Obrat ovog tvrdjenja, tj. tvrdnja da ako je $F'(x_0)$ α-kondenzirajući da je i F α-kondenzirajući sa istom konstantom, u opštem slučaju nije tačna. Posmatrajmo, kao primjer, operator $F : c_0 \to c_0$ (c_0 prostor nula-nizova), definisan sa

$$Fx(s) = x^3(s) \ .$$

Tada je u proizvoljnoj tački $x_0 \in c_0$, $F'(x_0)h = 3x_0^2(s)h$, $h \in c_0$, pa je skup $A = \{F'(x_0)h : \ h \in c_0\}$ kompaktan (zbog množenja sa nula nizom $3(x_0^2(1), x_0^2(s), \cdots)$). To onda znači $\alpha(A) = 0$, tj. F' je α-kondenzirajući sa konstantom $k = 0$ (F' je kompaktan operator). Sa druge strane je $F(\overline{B(0,1)}) = \overline{B(0,1)}$, pa je F α-kondenzirajući sa konstantom $k \geq 1$.

Ipak, postoji veza izmedju ovih uslova i ona je iskazana sa

Teorem 8.1.7. *Neka je $U \subset l_{p,\sigma}$ otvoren i konveksan skup, i neka je operator superpozicije $F : U \to l_{q,\tau}$ diferencijabilan na U. Ako je $\sup\{||F'(x)|| : \ x \in U\} = m < \infty$ tada važi*

$$||F(x_1) - F(x_2)||_{l_{q,\tau}} \leq m||x_1 - x_2||_{l_{p,\sigma}} \quad , \quad x_1, x_2 \in U \ .$$

Dokaz : Neka su $x_1, x_2 \in U$ proizvoljni. Zbog konveksnosti skupa U, $x_t = tx_1 + (1-t)x_2 \in U$ za svako $t \in [0,1]$. Na osnovu Hahn-Banachovog stava, postoji $g \in l_{q,\tau}^*$ takav da je

$$g(Fx_1 - Fx_2) = \|Fx_1 - Fx_2\|_{l_{q,\tau}} \quad , \quad ||g|| = 1 \ .$$

Definišimo funkciju $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ sa

$$u(t) = g(Fx_t) \ .$$

Kao kompozicija neprekidnih i u je neprekidna funkcija na $[0,1]$. Takodje kao kompozicija diferencijabilnih funkcija ona je i diferencijabilna na $(0,1)$ i pri tome je

$$u'(t) = g(F'(x_t)(x_2 - x_1)) \quad , \quad t \in (0,1) \ .$$

Kako je $||g|| = 1$, sada je

$$|u'(t)| \leq ||F'(x_t)||||x_2 - x_1||_{l_{p,\sigma}} \leq m||x_2 - x_1||_{l_{p,\sigma}} \ .$$

Konačno imamo

$$\|Fx_2 - Fx_1\|_{l_{q,\tau}} = g(Fx_2 - Fx_1) = |u(1) - u(0)| \leq m \, \|x_2 - x_1\|_{l_{p,\sigma}} \ ,$$

što dokazuje tvrdnju. ♣

Iz veze Lipschitzovog uslova i kondenziranja, zaključujemo da pod gornjim uslovima iz α-kondenziranja operatora $F'(x_0)$ slijedi da je i F α-kondenzirajući. Šta više, može se pokazati da je m najmanja Lipschitzova konstanta za F.

8.1.1 Asimptotska linearnost operatora superpozicije

Definicija 8.1.2. Operator F koji djeluje izmedju normiranih prostora X i Y, nazivamo *asimptotski linearnim* (ili diferencijabilnim u beskonačnosti) ako se za dovoljno velike x može prikazati u obliku:

$$Fx = Ax + \omega(x) \ ,$$

gdje je A linearan operator izmedju X i Y, a ω zadovoljava uslov

$$\lim_{||x|| \to \infty} \frac{|\omega(x)|}{||x||} = 0 \ .$$

Operator A nazivamo asimptotski izvod od F i važi:

$$F'(\infty)h = \lim_{t \to \infty} \frac{F(th)}{t} \ , \ (h \in X) \ .$$

Analogon Teoremi 8.1.1 za diferencijabilnost u beskonačnosti glasi:

Teorem 8.1.8. *Neka je operator F, generisan funkcijom $f(s, u)$ i posmatran izmedju $l_{p,\sigma}$ i $l_{q,\tau}$, asimptotski linearan. Tada važi*

$$F'(\infty)h(s) = a_\infty(s)h(s) \ , \tag{8.1.8}$$

gdje je $a_\infty \in l_{q,\tau}/l_{p,\sigma}$.
Suprotno, ako $a_\infty \in l_{q,\tau}/l_{p,\sigma}$ i ako postoji $b \in l_{q,\tau}/l_{p,\sigma}$ sa osobinom da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $a_\varepsilon \in l_{q,\tau}$ tako da

$$|f(s, u) - a_\infty(s)u| \leq a_\varepsilon(s) + \varepsilon b(s)|u| \ ,$$

onda je F asimptotski linearan izmedju $l_{p,\sigma}$ i $l_{q,\tau}$ i njegov asimptotski izvod je dat sa (8.1.8).

8.2 Analitičnost operatora superpozicije

Neka je $U \subset X$ i neka je $F : U \to Y$ (X, Y Banachovi prostori), neprekidno Frechet diferencijabilan na U. Ako je $dF : U \to L(X, Y)$ diferencijabilan u $x_0 \in U$, kažemo da je F dva puta Frechet diferencijabilan u x_0 i sa F'' označavamo drugi izvod operatora F . Pri tome je

$$F''(x_0) \in L(X, L(X, Y))) \ ,$$

$$F''(x_0)h_1 \in L(X, Y) \ ,$$

$$F''(x_0)h_1h_2 = F''(x_0)(h_1, h_2) \in Y \ ,$$

za sve $h_1, h_2 \in X$.

Induktivnim načinom definišemo n-ti Frechetov izvod operatora F. Pri tome je $F^{(n)}(x_0)(h_1, h_2, \dots, h_n)$ simetrična n-linearna forma.

Postoje različiti načini definisanja izvoda nelinearnog operatora. Jedan od najčešće korištenih je Frechet-Taylorov izvod.

Definicija 8.2.1. Operator F koji djeluje izmedju Banachovih prostora X i Y nazivamo *n-puta Frechet-Taylor diferencijabilnim* u unutrašnjoj tački domena operatora F, ako je moguća reprezentacija

$$F(x + h) - Fx = \sum_{k=1}^{n} A_k h^k + \omega(h) \ ,$$

gdje je A_k ($k = 1, 2, \dots, n$) neprekidna k-linearna forma (tj. $A_k h^k = \tilde{A}_k(h, h, \dots, h)$, gdje je $\tilde{A}$ multilinearna forma iz $X \times X \times \cdots \times X$ u Y), a ω zadovoljava

$$\lim_{||h|| \to 0} \frac{||\omega(h)||}{||h||^n} = 0 \ .$$

Operator $k!A_k$ ($k = 1, 2, \dots n$) nazivamo k-ti Frechet-Taylorov izvod $F^{(k)}(x)$ operatora F u tački x.

Sada ćemo formulisati teorem o reprezentaciji k-tog izvoda nelinearnog operatora superpozicije,

Teorem 8.2.1. *Neka su X i Y idealni prostori i neka je f sup-mjerljiva funkcija. Neka je operator superpozicije F generisan funkcijom f, n-puta diferencijabilan u $x \in X$. Tada izvod $F^{(k)}(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) ima formu*

$$F^{(k)}(x)h^k(s) = a_k(s)h^k(s) \quad , \quad h \in X \ , \tag{8.2.1}$$

gdje

$$a_k(s) = \lim_{u\to 0} \frac{1}{u^k}\left[f(s,x(s)+u) - f(s,x(s)) - \sum_{j=1}^{k-1} a_j(s)\frac{u^j}{j!}\right] \tag{8.2.2}$$

pripada prostoru Y/X^k.

Suprotno, neka je G_n *operator superpozicije generisan funkcijom*

$$g_n(s,u) = \begin{cases} \frac{1}{u^n}\left[f(s,x(s)+u) - f(s,x(s)) - \sum_{k=1}^{n} a_k(s)\frac{u^k}{k!}\right] & ; \quad u \neq 0, \\ 0 & ; \quad u = 0, \end{cases}$$

neprekidan iz X *u* Y/X^n *u tački* θ, *tada je* F n*-puta diferencijabilan u* x, *i važi (8.2.1).*

U raznim primjenama nelinearne analize, od velike koristi je raspolagati uslovom analitičnosti operatora.

Definicija 8.2.2. Operator F koji djeluje izmedju idealnih prostora X i Y nazivamo *analitičkim* u unutrašnjoj tački x_0 domena $\mathcal{D}(F)$ ako je moguća reprezentacija

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k h^k \tag{8.2.3}$$

za dovoljno male $||h||$, gdje A_k $(k = 1, 2, \ldots)$ su neprekidni k-linearni operatori.

Red u (8.2.3) konvergira uniformno na nekoj kugli $B_\rho(X)$; supremum ρ_u svih ovakvih ρ naziva se *radius konvergencije reda* u (8.2.3) i izračunava se po formuli

$$\rho_u = \left[\overline{\lim_{k\to\infty}} \sup_{||h||\leq 1} ||A_k h^k||^{\frac{1}{k}}\right]^{-1} . \tag{8.2.4}$$

Šta više, red u (8.2.3) konvergira apsolutno na skupu $S_a = \{h : \ \rho_a(h) \leq 1\}$, gdje je

$$\rho_a(h) = \left[\overline{\lim_{k\to\infty}} ||A_k h^k||^{\frac{1}{k}}\right]^{-1} .$$

Ako označimo sa $\rho_a = \inf\{\rho_a(h) : \ ||h|| \leq 1\}$, tada važi $0 < \rho_u \leq \rho_a \leq \infty$.

Da bi smo definisali jednu važnu klasu idealnih prostora navedimo slijedeću lemu,

Lema 8.2.2. *Neka je X idealan prostor. Slijedeća tri tvrdjenja su ekvivalentna:*

1. *Funkcional H je ograničen na nekoj kugli $B(\theta, r)$ sa radijusom $r > 1$.*

2. *Funkcional H je ograničen na svakoj kugli $B(\theta, r)$ sa radijusom $r > 1$.*

3. *Funkcional H je polinomijalnog rasta tj. zadovoljava nejednakost*

$$H(x) \leq c(1 + ||x||^k) \ , \ x \in X$$

   za neke pozitivne konstante c i k,

gdje je funkcional H definisan sa (2.1.1).

Idealni prostor X nazivamo Δ_2-prostorom ($X \in \Delta_2$), ako funkcional H zadovoljava jedan od tri uslova prethodne leme. Sada ćemo navesti rezultat o analitičnosti operatora supepozicije na Δ_2-prostoru, koji je izuzetno degenerativan,

Teorem 8.2.3. *Neka su X i Y idealni prostori i neka je $\Omega_d = \emptyset$ i $X \in \Delta_2$. Neka je f sup-mjerljiva funkcija, i neka je operator superpozicije F, generisan funkcijom f i posmatran kao operator izmedju X i Y, analitičan u okolini neke tačke $x \in X$. Tada je F polinomijalni operator na X.*

Kako su Lebesgueovi prostori Δ_2-prostori, prethodni teorem se prenosi na njih. Šta više, polinomijalnost takvog operatora koji djeluje iz L_p u L_q, je stepena ne većeg od $\lceil \frac{p}{q} \rceil$. Ipak zahtjev za Δ_2-prostorom je veoma restriktivan, šta više $l_{p,\sigma} \notin \Delta_2$ pa za nas taj uslov u ovom radu nije ni bitan. Medjutim, za očekivati je tada da će klasa operatora biti nešto šira, ali to za sada ostaje otvoreno pitanje. Navedimo samo slijedeći rezultat koji uz analitičnost u jednoj tački domena obezbjedjuje analitičnost operatora na skupu.

Teorem 8.2.4. *Neka je operator superpozicije F generisan funkcijom f, posmatran izmedju $l_{p,\sigma}$ i $l_{q,\tau}$, analitičan u tački $x_0 \in l_{p,\sigma}$. Neka je ρ_a poluprečnik apsolutne konvergencije reda u (8.2.3). Tada je F analitičan u svakoj tački skupa $\Sigma(B(x_0, \rho_a))$. Osim toga je funkcija f analitična u $x_0(s)$ ($s \in \mathbb{N}$), tj.*

$$f(s, x_0(s) + u) - f(s, x_0(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) u^n \ ,$$

gdje red na desnoj strani konvergira za $|u| < \delta(s)\rho_a$*; pri tome funkcije* a_n *(*$n \in \mathbb{N}$*) definišu* n*-linearne forme*

$$A_n h^n(s) = a_n(s)h^n(s) \quad ,$$

a

$$\delta(s) = \sup\{|z(s)| : \ z \in B(x_0, \rho_a)\} \ .$$

8.3 Komentari i reference

Rani rezultati M.M. Vajnberga ([27]), M.A. Krasnosel'skog ([16]) i P.P. Zabrejka ([31]) o diferencijabilnosti operatora superpozicije, davali su ili neophodne ili dovoljne uslove i radjeni su na Lebesgueovim i Orliczevim prostorima. Neophodne i dovoljne uslove diferencijabilnosti na Lebesgueovim prostorima dao je W.S. Wang ([38]), a Teorem 8.1.1 je njegov analogon za $l_{p,\sigma}$ prostore. Teoremom 8.1.2 okarakterisana je diferencijabilnost operatora superpozicije preko osobina funkcije generatora što predstavlja pojednostavljenje uslova diferencijabilnosti u odnosu na Teorem 8.1.1. Teorem 8.1.4 možemo naći u različitim formama kao npr. u [30], a ovdje smo iskazali analogon teorema iz [3], za slučaj $l_{p,\sigma}$ prostora. Napomenimo da je već Krasnosel'skij u [16] pokazao da svaki diferencijabilan operator superpozicije iz L_p u L_q "degenerira" u linearan, ako je $p = q$, odnosno u konstantan operator, ako je $p < q$.

Generalni rezultati o diferencijabilnosti mogu se iskazati i preko funkcije rasta. Tako, ako posmatramo operator superpozicije $\tilde{F}$, generisan funkcijom $\tilde{f}(s,u) = f(s, x(s) + u) - f(s, x(s)) - a(s)u$, gdje je a dato sa (8.1.3), diferencijabilnost operatora superpozicije F ekvivalentna je činjenici da je $\mu_{\tilde{F}}(r) = o(r)$ kad $r \to 0$. Ovakav način posmatranja zahtjevao bi poznavanje eksplicitne forme funkcije rasta nelinearnog operatora, što je, kako smo to već ranije naglasili, moguće samo u posebnim slučajevima (Lebesgueovi i Orliczevi prostori).

Teorem 8.1.5 uspostavlja vezu izmedju diferencijabilnosti i kompaktnosti operatora superpozicije, ali kao što se pokazuje npr. u slučaju Lebesgueovih prostora, [26], obrat tvrdjenja ne važi, dok za slučaj $l_{p,\sigma}$ prostora ostaje otvoreno pitanje.

Teorem 8.1.6 i Teorem 8.1.7, daju nam vezu izmedju diferencijabilnosti i kondenziranja operatora, koja je logična s obzirom na vezu Lipschitzovog uslova i uslova kondenziranja, a detaljnije o vezi Lipschitzovog i Darbouovog uslova može se naći u [7].

Ovim vezama se proširuju mogućnosti ispitivanja egzistencije fiksne tačke za operator supeprozicije na $l_{p,\sigma}$ prostorima, a samim tim i primjene teorije fiksne tačke u rješavanju beskonačnih nelinearnih sistema.

Asimtotsku linearnost prvi je ispitivao M.A. Krasnosel'skij u [16], a njenu važnost u teoriji operatorskih jednačina možemo vidjeti u [20].

Glavni rezultat o analitičnosti operatora superpozicije izmedju idealnih prostora X i Y, sa $X \in \Delta_2$ (Teorem 8.2.3), dat je u [4], i bio je jednim od razloga ne izučavanja analitičnosti operatora superpozicije na drugim prostorima. Tako je pitanje, da li se analitički operator na $l_{p,\sigma}$ svodi na operator generisan polinomom, i dalje otvoreno jer $l_{p,\sigma} \notin \Delta_2$. Teorem 8.2.4 je specijalan slučaj teorema o analitičnosti za idealne prostore, navedenog u [4].

Glava 9

Slučaj $p = \infty$ ili $q = \infty$

U dosadašnjim analizama operatora superpozicije, razmatrali smo slučajeve kada su $1 \leq p, q < \infty$. Ako je p ili q jednako beskonačno, pokazuje se da su iskazi teorema, a samim tim i dokazi drugačiji.
Napomenimo ovde, da ako bismo posmatrali prostor $l_{\infty,\sigma}$ sa normom (1.2.3), da ne bi došlo do bitnog narušavanja smisla tog prostora, morali bi uvesti dodatno ograničenje na težinsku funkciju, tj. da je $\sigma \in l_\infty$, ali to bi opet značilo da je $l_\infty = l_{\infty,\sigma}$. Zbog svega rečenog, posmatrat ćemo samo standardni prostor ograničenih funkcija l_∞.

9.1 Djelovanje, ograničenost i neprekidnost za slučaj $p = \infty$ ili $q = \infty$

Teorem 9.1.1. *Operator superpozicije F, generisan funkcijom f djeluje iz $l_{p,\sigma}$ u l_∞^0 (l_∞), akko važi:*

$$\lim_{s\to\infty, u\to 0} f(s,u) = 0 \quad (\overline{\lim}_{s\to\infty,u\to 0}|f(s,u)| < \infty)$$

U tom slučaju operator F je uvijek ograničen. F je neprekidan akko je funkcija $f(s,u)$ neprekidna po u za svako $s \in \mathbb{N}$ (neprekidna ravnomjerno u odnosu na $s \in \mathbb{N}$). Pri tome važi:

$$\mu_F(r) = \sup_{|u|\leq r} |f(s,u)|$$

$$\omega_F(r,\delta) = \sup_{|u|,|v|\leq r, |u-v|\leq\delta} |f(s,u) - f(s,v)|$$

Teorem 9.1.2. *Operator F djeluje iz l_∞^0 u $l_{q,\tau}$ (l_∞^0, l_∞ respektivno), akko postoji $n \in \mathbb{N}$ i postoji $\delta > 0$ tako da je*

$$|f(s,u)| \le a(s) \quad , \ (s \ge n, |u| \le \delta)$$

za neko $a \in l_{q,\tau}$, ($a \in l_\infty^0$, $a \in l_\infty$). U tom slučaju F je uvijek ograničen. F je neprekidan akko je funkcija $f(s,u)$ neprekidna za svako $s \in \mathbb{N}$ (za svako $s \in \mathbb{N}$, uniformno po $s \in \mathbb{N}$).

Teorem 9.1.3. *Operator F djeluje iz l_∞ u $l_{q,\tau}$ (l_∞^0, l_∞ respektivno) akko za svako $r > 0$ postoji $a_r \in l_{q,\tau}$, ($a_r \in l_\infty^0$, $a_r \in l_\infty$), tako da je*

$$|f(s,u)| \le a_r(s) \quad , \ (|u| \le r \ , \ 0 < r < \infty)$$

U tom slučaju operator F je uvijek ograničen. F je neprekidan akko je funkcija $f(s,u)$ neprekidna za svako $s \in \mathbb{N}$ (za svako $s \in \mathbb{N}$, uniformno po $s \in \mathbb{N}$).

9.2 Komentari i reference

Rezultati izneseni u ovoj glavi ekvivalentni su odgovarajućim rezultatima dobijeni u [11]. Razlog ekvivalentnosti leži u činjenici da posmatrani težinski prostor $l_{\infty,\sigma}$ se poklapa sa prostorom l_∞, kao što je to napomenuto u uvodnoj glavi.

Glava 10

Beskonačni sistemi Hammersteinovog tipa

10.1 Jedna primjena rezultata o operatoru superpozicije

Primjenom *varijacionog metoda* dat ćemo uslove o postojanju rješenja besonačnog sistema jednačina Hammersteinovog tipa na $l_{p,\sigma}$.

Posmatrajmo jednačinu:

$$x(n) = \sum_{s\in\mathbb{N}} k(n,s)f(s,x(s)) \ , \tag{10.1.1}$$

gdje je $k(n,s)$ pozitivno definitno jezgro, tj. beskonačna simetrična matrica. Relacija (10.1.1) je diskretni analogon Hammersteinove integralne jednačine.

Sa K obilježimo linearni operator generisan jezgrom $k(n,s)$

$$K\phi(n) = \sum_{s\in\mathbb{N}} k(n,s)\phi(s) \qquad , \ n\in\mathbb{N} \ . \tag{10.1.2}$$

Neka je $f(s,u)$ Caratheodoryjeva funkcija koja generiše nelinearni operator superpozicije:

$$Fx(s) = f(s,x(s)) \ .$$

Tada jednačina (10.1.1) dobija blik:

$$x = KFx \ . \tag{10.1.3}$$

Pri tome, za $1 < p_0 < 2$ i q_0 takav da $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = 1$, neka važi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} |k(n,s)|^{max\{2,q_0\}} < \infty \ , \tag{10.1.4}$$

onda operator K zadovoljava slijedeće osobine:

(a) Operator K preslikava svaku funkciju iz $l_{p,\sigma}$ u funkciju iz odgovarajućeg $l_{q,\sigma}$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \ p_0 \leq p \leq 2)$.

(b) Operator K, posmatran kao operator iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\sigma}$, $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \ p_0 \leq p \leq 2)$, je neprekidan operator.

(c) Operator K, posmatran na $l_{2,\sigma}$, je samokonjugovan, pozitivno definitan operator.

Pri tome važe slijedeća tvrdjenja:

Teorem 10.1.1. *Operator $A = K^{\frac{1}{2}}$ je neprekidan operator iz $l_{2,\sigma}$ u $l_{q,\sigma}$ za $2 < q < q_0$, $(\frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = 1)$.*

Teorem 10.1.2. *Operator K, posmatran iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\sigma}$, dopušta razlaganje*

$$K = AA^*$$

gdje je A neprekidan operator iz $l_{2,\sigma}$ u $l_{q,\sigma}$, $p_0 < p \leq 2$, a operator A^*, konjugovan operatoru A, djeluje u tom slučaju iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{2,\sigma}$, $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1))$.

Teorem 10.1.3. *Ako je K potpuno neprekidan operator onda je takav i operator $A = K^{\frac{1}{2}}$.*

Pretpostavimo da operator K djeluje iz $l_{q,\sigma}$ u $l_{p,\sigma}$, $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \ q \geq 2)$. Prema Teoremi 10.1.2, operator K dopušta razlaganje

$$K = AA^* \ , \tag{10.1.5}$$

a prema osobini b), on je tada neprekidan, tj. ograničen.
Sa gornjim pretpostavkama jednačinu (10.1.3) možemo sada pisati:

$$x = A^* F A x \tag{10.1.6}$$

na prostoru $l_{2,\sigma}$, u tom smislu što svakom rješenju $\psi \in l_{2,\sigma}$ jednačine (10.1.6) odgovara rješenje $A\psi \in l_{p,\sigma}$ jednačine (10.1.3) i obratno, svakom rješenju $\phi \in l_{p,\sigma}$ jednačine (10.1.3) odgovara rješenje $A^*F\phi \in l_{2,\sigma}$ jednačine (10.1.6). Za funkcional Golomba

$$\Phi(x) = \sum_{s\in\mathbb{N}} \int_0^{x(s)} f(s,u)du \ ,$$

znamo da je $grad\Phi = F$, pa je operator $I - A^*FA$, gradijent funkcionala

$$\Psi(x) = \frac{1}{2}(x,x) - \Phi Ax = \frac{1}{2}(x,x) - \sum_{s\in\mathbb{N}} \int_0^{Ax(s)} f(s,u)du \ , \tag{10.1.7}$$

definisanog na $l_{2,\sigma}$.

Sada možemo iskazati glavni rezultat:

Teorem 10.1.4. *Neka operator (10.1.2) dozvoljava rastav (10.1.5), i neka operator superpozicije F djeluje iz $l_{p,\sigma}$ u $l_{q,\sigma}$. Neka je zadovoljen uslov:*

$$\int_0^u f(s,u)du \leq \frac{a}{2}u^2 + b(s)|u|^{2-\gamma} + c(s) \ , \tag{10.1.8}$$

$s \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{R}$, i gdje je $0 < \gamma < 2$, $b \in l_{\frac{\gamma}{2}}$, $c \in l_1$ i $a < \lambda_0^{-1}$, gdje je λ_0 najveća sopstvena vrijednost operatora K. Tada jednačina (10.1.1) ima bar jedno rješenje u $l_{p,\sigma}$.

Dokaz :

Za dokaz teoreme dovoljno je pokazati da je funkcional (10.1.7) rastući.

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &= \frac{1}{2}(x,x) - \sum_{s\in\mathbb{N}} \int_0^{Ax(s)} f(s,u)du \\
&\geq \frac{1}{2}(x,x) - \frac{a}{2}\sum_{s\in\mathbb{N}}(Ax(s))^2 - \sum_{s\in\mathbb{N}} b(s)|Ax(s)|^{2-\gamma} - \sum_{s\in\mathbb{N}} c(s) \\
&\geq \frac{1}{2}(x,x) - \frac{a}{2}\lambda_0(x,x) - \left(\sum_{s\in\mathbb{N}}(b(s))^{\frac{2}{\gamma}}\right)^{\frac{\gamma}{2}} \lambda_0^{1-\frac{\gamma}{2}}(x,x)^{1-\frac{\gamma}{2}} - \sum_{s\in\mathbb{N}} c(s) \\
&= \frac{1-a\lambda_0}{2}||x||^2 - b||x||^{2-\gamma} - c \ ,
\end{aligned}$$

gdje smo stavili da je $b = \left(\sum_{s\in\mathbb{N}}(b(s))^{\frac{2}{\gamma}}\right)^{\frac{\gamma}{2}} \lambda_0^{1-\frac{\gamma}{2}}$ i $c = \sum_{s\in\mathbb{N}} c(s)$. Jasno je sada da $\Psi(x) \to \infty$, puštajući da $||x|| \to \infty$, tj. funkcional Ψ je rastući. Zbog oblika funkcionala i činjenice da je rastući, on postiže svoju minimalnu vrijednost na $l_{p,\sigma}$, a zbog principa varijacionog metoda, to je i rješenje jednačine (10.1.1). ♣

Uslovi prethodne teoreme su , svakako, zadovoljeni ako funkcija $f(s,u)$ osim uslova (10.1.8), zadovoljava

$$|f(s,u)| \leq a(s) + b|u|^{p-1} \quad , \quad (a \in l_{q,\sigma}, b > 0) \ , \tag{10.1.9}$$

a jezgro $k(n,s)$ zadovoljava

$$\sum_{s\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} |k(n,s)|^{max\{2,q\}} < \infty$$

Uslov (10.1.9) se naziva *klasični uslov p-rasta.*

Prethodni teorem se može iskazati i na slijedeći način:

Teorem 10.1.5. *Neka operator $A = K^{\frac{1}{2}}$ djeluje iz $l_{2,\sigma}$ u $l_{p,\sigma}$ i neka je potpuno neprekidan. Neka operator $F : l_{p,\sigma} \to l_{2,\sigma} \cap l_{q,\sigma}$, i neka je zadovoljen uslov (10.1.8). Tada jednačina (10.1.1) ima bar jedno rješenje.*

Dodatni uslov za operator F je zahtjevan zbog slijedećeg:
Egzistencija rješenja jednačinu (10.1.6) ekvivalentno je postojanju rješenja za jednačinu $\phi = AA^*F\phi$. Da bi smo iz posljednje jednačine prešli u jednačinu $\phi = KF\phi$, neophodno je znati da operator AA^* na elementu $F\phi$ prima vrijednost istu kao i operator K. Operatori AA^* i K primaju iste vrijednosti na $l_{2,\sigma} \cap l_{q,\sigma}$, te odatle i dodatni uslov u pretpostavkama teorema.
Navedimo još jedan slučaj Teorema 10.1.4:

Teorem 10.1.6. *Pretpostavimo da je jezgro $k(n,s)$ ograničeno i neka funkcija $f(s,u)$ zadovoljava uslov (10.1.8). Neka je dalje, za proizvoljno $x \in l_{p,\sigma}$, zadovoljen uslov*

$$\sum_{s\in\mathbb{N}} |f(s,x(s))|^p < \infty \quad (p > 1) \ ,$$

Tada jednačina (10.1.1) ima bar jedno rješenje.

10.2 Komentari i reference

Za rješavanje posmatranog beskonačnog sistema, koristi se poznati varijacioni metod. Suština te metode je da za posmatranu jednačinu

$$Ax = \theta \ , \tag{10.2.1}$$

konstruišemo takav operator A_1, koji je gradijent nekog funkcionala Ψ, zadan u nekom funkcionalnom prostoru, tako da su rješenja jednačine (10.2.1) ujedno i rješenja jednačine $A_1 x = \theta$. Zatim za dati funkcional dokazujemo postojanje minimalne ili maksimalne vrijednosti. Postojanje tačke u kojoj se dostiže ekstrem obezbjedjuje uslov da je $grad\Psi = \theta$, pa je dakle ta tačka rješenje jednačine (10.2.1). Za primjenu ovog metoda neophodno je poznavati dovoljno širok izbor nelinearnih operatora koji se javljaju gradijentima jednostavnih funkcionala. Mi smo ovdje koristili funkcional *Golomba* Φ, koji jeste diferencijabilan i za koga je $grad\Phi = F$ ([16]). Osim toga korištene su osobine linearnog operatora K (Teorem 10.1.1, Teorem 10.1.2 i Teorem 10.1.3) koje su pruzete iz [16].

Teorem 10.1.4 je originalan rezultat i njegova dalja poboljšanja su moguća, s obzirom na konveksnost $\mathcal{L}$-karakteristike djelovanja operatora superpozicije F.

Osim izloženog metoda, koji posmatra klasični uslov p-rasta, moguće je posmatrati i opštiji slučaj *prirodnog* (p, q)*-rasta* ([23]), koji je takodje varijacioni metod.

Od metoda za rješavanje jednačina Hammersteinovog tipa spomenimo još *Sheferov* metod ([32], [35]), kao i metode bazirane na teoriji o fiksnoj tački, od kojih se u daljem radu očekuju novi rezultati. Spomenimo još da se beskonačni sistemi Hammersteinovog tipa često pojavljuju u teoriji slučajnih procesa i teoriji haosa.

Literatura

[1] S. Aljančić : *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu*, Gradjevinska knjiga Beograd, (1979), (323)

[2] J. Appell: *Implicit functions, nonlinear integral equations, and the measure of noncompactness of the superposition operator*, J. Math. Anal. Appl. 83,1 (1981) (251-263)

[3] J. Appell, P.P. Zabrejko : *Nonlinear superposition operators*, Cambridge University Press (1990), (311)

[4] J. Appell, P.P. Zabrejko: *On analyticity conditions for the superposition operator in ideal function spaces*, Uni.Augsburg preprint, (1985), (17)

[5] J.Appell, P.P. Zabrejko : *Über die $\mathcal{L}$-charakteristik nichtlinearer operatoren in räumen integrierbarer funktionen*, Manuscripta Math., (1988), (355-367)

[6] J. Appell, P.P. Zabrejko: *Sharp upper estimates for the superposition operator*, (Russian), Dokladi Akad. Nauk SSSR 27,8 (1983)

[7] J. Appell, I. Massabó, A. Vignoli, P.P. Zabrejko: *Lipschitz and Darbo conditions for the superposition operator in ideal spaces*, Annali Mat. Pura Appl. , (1988), (123-137)

[8] J. Banas, K. Goebel: *Measure of noncopactness in Banach spaces*, New York, Basel, Marcel Dekker (1981)

[9] J. Bergh, J. Löfström: *Interpolation spaces*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, (1976), (207)

[10] F. Dedagić : *O operatorima superpozicije u Banach-ovim prostorima nizova*, Doc. Diss., Priština, (1986)

[11] F. Dedagić , P.P. Zabrejko: *On the superposition operator in l_p spaces*, Sibir.Mat.Zhurn., (1987), (86-98)

[12] N.A. Erzakova: *On the measure noncompactness in Banach spaces*, Doc.Diss. Voronjež, (1983), (100)

[13] P.R. Halmos: *Measure Theory*, Springer, New York, (1974)

[14] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya: *Inequalities*, Cambridge University Press, (1978), (324)

[15] E. Hewitt, K. Stromberg: *Real and abstract Analysis*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, (1965), (476)

[16] M.A. Krasnosel'skij : *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, Gosud.izd.teh.lit. , Moskva (1956)

[17] P.A. Krasnosel'skij, Ja.B. Rutitskij: *Convex functions and Orlicz spaces*, Gosud.izd.teh.lit. , Moskva (1958), (271)

[18] M.A. Krasnosel'skij, Ja. B. Rutitskij, R.M. Sultanov: *On a nonlinear operator which acts in a space of abstract functions*, Izvest.Akad.Nauk Azerbajdzh., (1959), (15-21)

[19] M.A. Krasnosel'skij, P.P. Zabrejko, Je.I. Pustyl'nik, P.Je. Sobolevskij: *Integral operators in spaces of summable functions*, Nauka Moskva, (1966)

[20] M.A. Krasnosel'skij, P.P. Zabrejko: *Geometrical methods of nonlinear analysis*, (Russian), Eng. transl: Springer, New York (1984)

[21] M.A. Krasnosel'skij, G.M. Vajnikko, P.P. Zabrejko, Ja.B. Rutitskij, V.Ja. Statsenko: *Approximate solutions of operator equations*, (Russian), Nauka, Moskva (1969)

[22] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri: *Classical Banach Spaces I* , Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, (1977), (190)

[23] V. Moroz, P.P. Zabrejko: *On the Hammerstein equations with natural growth conditions*, Bel.Fu.Fund. Res. preprint, (1997), (16)

[24] J. Robert: *Continuité d'un opérateur non lineare sur certains espaces de suites*, C.R.Acad.Sci. Paris, (1964), (1287-1290)

[25] I.V. Shragin: *Co-ordinate spaces and the superposition operator in them*, Perm', (1975), (31-75)

[26] J. Toland: *Topics in nonlinear functional analysis*, Univ. Bath, (2003/04)

[27] M.M. Vajnberg:*The operator of V.V. Nemytskij*, Ukrain.Mat.Zhurn., (1955), (363-378)

[28] M.M. Vajnberg:*Variational methods in the study of nonlinear operators*, (Russian), Gostehizdat, Moskva (1956)

[29] M.M.Vajnberg: *On the continuity of some special operators*, (Russian), Doklady Akad. Nauk SSSR 73, 2 (1950)

[30] P.P. Zabrejko: *On the theory of integral operators in ideal function spaces*, Doc.Diss. Voronjež, (1968)

[31] P.P. Zabrejko:*On the differentiability of nonlinear operators in L_p spaces*, (Russian), Doklady Akad. Nauk SSSR 166, 5 (1966) (1039-1042)

[32] P.P. Zabrejko: *Schaefer's method in the theory of Hammerstein integral equations* , Mat. Zbornik Voronjež, (1971), (451-471)

[33] P.P. Zabrejko: *Ideal function spaces*, Ves.Jaroslav.Uni. , (1974), (12-52)

[34] P.P.Zabrejko:*Nonlinear integral operators*, Voronezh. Gos.Univ.Trudy Sem. Funk. Anal. 8 (1966), (1-148)

[35] P.P. Zabrejko, A.I. Povolotskij:*On the theory of Hammerstein equations*, Ukrain.Mat.Zhurn., (1970), (150-162)

[36] P.P. Zabrejko, M.A. Krasnosel'skij: *On the $\mathcal{L}$-characteristic of liner and nonlinear operators*, (Russian), Uspehi Mat. Nauk 19, 5 (1964)

[37] S.W. Wang: *Some properties of the Nemytskij operator*, (Chinese), J. Nanjing Univ. Natur. Sci. Ed. 2 (1981) (161-173)

[38] S.W. Wang: *Differentiability of the Nemytskij operator*, (Russian), Dokladi Akad. Nauk SSSR 150, 6 (1963) (1198-1201)