Sadržaj

1 Diferencijalne jednačine **1**

1.1 Diferencijalne jednačine prvog reda 2

1.1.1 Jednačina sa razdvojenim promjenljivima 3

1.1.2 Homogena jednačina 6

1.1.3 Linearna jednačina 8

1.1.4 Bernoullijeva jednačina 12

1.1.5 Riccatieva diferencijalna jednačina 13

1.1.6 Lagrangeova diferencijalna jednačina 15

1.1.7 Clairautova diferencijalna jednačina 16

1.2 Linearne jednačine višeg reda sa konstantnim koeficijentima 16

1.2.1 Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima 17

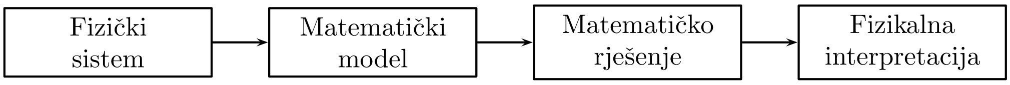
1.2.2 Nehomogena jednačina sa konstantnim koeficijentima. Metod jednakih koeficijenata 19

1.3 Jedna primjena 23

Poglavlje 1
Diferencijalne jednačine

Tipova diferencijalnih jednačina čija se rješenja mogu izraziti pomoću konačnog broja elementarnih funkcija i njihovih integrala ima veoma malo. To posebno vrijedi za jednačine drugog i višeg reda, gdje postoje samo posebni slučajevi koji se mogu riješiti elementarno u gore navedenom smislu. Istorijski gledano, njihov značaj je veliki jer su prva saznanja o diferencijalnim jednačinama i stečena proučavanjem takvih tipova jednačina, počevši od Newtona i Leibnitza. Kako je osnovni momenat njihovog rješavanja uvijek bila integracija kao postupak inverzan izvodu, takvi tipovi jednačina se nazivaju integrabilnim, postupak rješavanja nazivamo integracija, a samo rješenje se zove *integral diferencijalne jednačine.*

U rješavanju nekog inženjerskog problema, koji je najčešće fizikalne prirode, kao prvo pristipamo formulaciji tog problema matematičkim jezikom, u terminima varijabli, funkcija i jednačina. Ovakav način izražavanja nazivamo matematički model posmatranog problema. Kompletan problem od postavljanja modela, njegovog matematičkog rješavanja do interpretacije rezultata, bilo fizikalno ili u nekoj drugoj terminologiji, nazivamo matematičko modelovanje ili jednostavno modelovanje. Modelovanje problema zahtjeva iskustvo koje se stiče posmatranjem mnogih problema. Pri tome računari nam mogu pomoći u rješavanju nekog problema, ali ne i u postavljanju matematičkog modela.



Iz fizike znamo da su mnogi problemi kao što su brzina i ubrzanje ustvari izvodi funkcije. Samim tim su i modeli istih često jednačine u kojima se pojavljuju izvodi nepoznate funkcije. Ovakvi modeli se nazivaju *diferencijalne jednačine.* Prirodno, tada želimo naći rješenje takve jednačine (funkciju čiji izvodi se pojavljuju u jednačini), ispitati njene osobine, nacrtati njen graf, naći njene vrijednosti i interpretirati je fizikalnim jezikom kako bi mogli razumjeti ponašanje sistema opisanog u posmatranom problemu.

U radu sa diferencijalnim jednačinama pravimo razliku i osnovnu podjelu na dvije vrste ovih jednačina.
Obične diferencijalne jednačine (ODE) podrazumijevaju jednačine u kojima se pojavljuju izvodi nepoznate funkcije, prvi i/ili viši, koju uobičajeno zapisujemo $y(x)$ (ili $y(t)$ ako je nezavisna varijabla vrijeme t). Takve jednačine mogu sadržavati osim izvoda i samu funkciju y, neke druge konkretne funkcije kao i konstante. Naprimjer,

$$y' = x^2 + 2 \ , \tag{1.1}$$

$$y'' + 2y = \cos 2x \ , \tag{1.2}$$

$$y'y''' - 5\sqrt{y''} = 0 \ . \tag{1.3}$$

Uobičajeno se nepoznata funkcija u diferencijalnoj jednačini zapisuje samo sa y ($y'y''' - 5\sqrt{y''} = 0$), a ne $y(x)$ ($y'(x)y'''(x) - 5\sqrt{y''(x)} = 0$), jednostavnosti zapisa radi. Ovdje, kao što nam je poznato

od ranije, kada nam je potrebno koristimo notaciju $y' = \frac{dy}{dx}$ ili $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ i slično.
Riječ "obične" pravi razliku od druge vrste diferencijalnih jednačina, a to su *parcijalne diferencijalne jednačine* (PDE) u kojima fugurišu parcijalni izvodi nepoznate funkcije dvije ili više varijabli. Naprimjer,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ ,$$

gdje je u podrazumijevano nepoznata funkcija varijabli x i y (slično kao gore, ne pišemo u jednačini $u(x,y)$). PDE imaju važnu inženjersku primjenu ali su mnogo komplikovanije od ODE, te ćemo se njima baviti u narednim kursevima matematike.

Za običnu diferencijalnu jednačinu kažemo da je *reda* n ako je n-ti izvod funkcije y najviši izvod koji se pojavljuje u jednačini. Koncept "reda" omogućava nam klasifikaciju običnih diferencijalnih jednačina na jednačine prvog, drugog, trećeg ili višeg reda. Tako je jednačina (1.1) prvog reda, jednačina (1.2) drugog i jednačina (1.3) trećeg reda.

1.1 Diferencijalne jednačine prvog reda

U prvom dijelu posmatrat ćemo obične diferencijalne jednačine prvog reda, to jest jednačine u kojima se pojavljuje obavezno y', eventaulno sama funkcija y i/ili bilo koja druga funkcija od x. Drugačije rečeno, to su jednačine oblika

$$F(x, y, y') = 0 \ , \tag{1.4}$$

ili češće zapisana u formi

$$y' = f(x, y) \ . \tag{1.5}$$

Ovu drugu nazivamo *eksplicitna forma*, za razliku od prve koju nazivamo *implicitna forma* jednačine. Naprimjer, jednačinu u implicitnoj formi

$$x^2y' - 2y \ln x = 0 \ ,$$

možemo zapisati u eksplicitnoj formi $y' = \frac{2y \ln x}{x^2}$.

Za funkciju $y = y(x)$ kažemo da je rješenje jednačine (1.4) na otvorenom intervalu (a, b), ako je ona definisana i diferencijabilna na tom intervalu i ako data jednačina postaje identitet kada u nju uvrstimo $y(x)$ i $y'(x)$.

PRIMJER 1 : Iz diferencijalnog računa funkcije jedne varijable znamo da je izvod funkcije $y = ce^{1.5x}$

$$y' = \frac{dy}{dx} = c \cdot 1.5e^{1.5x} = 1.5y \ .$$

Vidimo da je funkcija y rješenje diferencijalne jednačine $y' = 1.5y$. Ova jednačina je obična diferencijalna jednačina tipa $y' = ky$ za $k > 0$, i predstavlja jednačinu eksponencijalnog rasta. Ona odražava naprimjer, širenje zasada bakterija, rast populacije životinja u rezervatu, a može se primjeniti i na rast male ljudske zajednice na velikom području i kao takva je poznata kao Malthusov zakon.
Slično, jednačina $y' = -ky$ za $k > 0$ ima rješenje $y = ce^{-kx}$ i predstavlja jednačinu eksponencijalnog opadanja. Naprimjer, raspad radioaktivne materije.

PRIMJER 2 : Ispitati da li je funkcija $y = \frac{c}{x}$ rješenje diferencijalne jednačine $xy' = -y$ za $x \neq 0$.

Rješenje. Kako je $y' = -\frac{c}{x^2}$, uvrštavanjem u jednačinu imamo

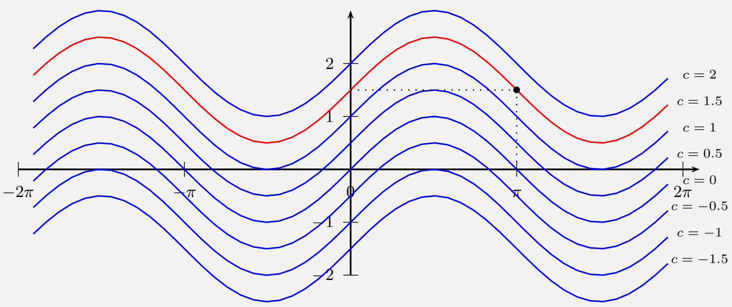
$$\begin{aligned} x\left(-\frac{c}{x^2}\right) &= -\frac{c}{x} \\ -\frac{c}{x} &= -\frac{c}{x} \ . \end{aligned}$$

Dobili smo tačan identitet, te je posmatrana funkcija rješenje diferencijalne jednačine.

U gornjem primjeru vidimo da rješenje diferencijalne jednačine sadrži proizvoljnu konstantu c. Ovakvo rješenje onda nazivamo *generalno rješenje* obične diferencijalne jednačine. Geometrijski gledano, generalno rješenje predstavlja familiju od beskonačno mnogo funkcija koje su rješenja polazne jednačine, od kojih svaku dobijemo za različit izbor konstante c. Izdvajanjem jednog rješenja, uzimajući jedno konkretno c, dobijamo takozvano *partikularno rješenje* jednačine. Dakle, partikularno rješenje ne sadrži nikakve konstante.

Najčešće jedinstveno rješenje, dakle partikularno rješenje, dobijamo iz generalnog rješenja koristeći neki *inicijalni, početni* uslov $y(x_0) = y_0$, sa zadatim konkretnim vrijednostima x_0 i y_0, pomoću koga ustvari određujemo konstantu c.

PRIMJER 3 : Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu $y' = \cos x$.
Iz $y' = \frac{dy}{dx} = \cos x$ imamo $dy = \cos x dx$, pa nakon integriranja, $\int dy = \int \cos x dx$, zaključujemo da je $y = \sin x + c$ generalno rješenje date jednačine. Kao što rekosmo, ovo rješenje predstavlja familiju funkcija čiji su grafici predstavljeni na slici.



Slika 1.1: Familija krivih $y = \sin x + c$

Zahtjevajući da je $y(\pi) = 1.5$, zaključujemo da je $c = 1.5$, čime izdvajamo jedno partikularno rješenje $y = \sin x + 1.5$ (crveno obojeni graf na slici).

Geometrijski gledano, izdvajanje jednog rješenja zahtjeva odrediti onaj graf funkcije (iz familije rješenja) koji prolazi kroz tačku (x_0, y_0). Obična diferencijalna jednačina zajedno sa inicijalnim uslovom

$$y' = f(x, y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \ ,$$

naziva se *Cauchyjev problem* ili *problem sa početnim uslovom*.

Ponekad obična diferencijalna jednačina može imati jedinstveno rješenje koje se ne može dobiti iz generalnog rješenja, nekim izborom konstante. Takav je primjer jednačine $y'^2 - xy' + y = 0$. Prostom provjerom se uvjeravamo da je generalno rješenje zadato sa $y = cx - c^2$. Međutim, rješenje jednačine je i funkcija $y = \frac{x^2}{4}$, a očigledno je da se ovo rješenje ne može dobiti iz generalnog rješenje niti jednim izborom konstante c. Ovakva rješenja diferencijalnih jednačina se nazivaju *singularna rješenja*.

1.1.1 Jednačina sa razdvojenim promjenljivima

To je jednačina kod koje se u (1.5) desna strana može napisati kao proizvod dviju funkcija od kojih jedna zavisi samo od x, a druga samo od y, to jest jednačina koja ima formu

$$y' = f(x)g(y) \ . \tag{1.6}$$

Sljedećim teoremom dati su uslovi za postojanje i jedinstvenost rješenja jednačine (1.6).

Teorem 1.1.1. *Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu (a, b) i neka je funkcija $g(y)$ neprekidna i različita od nule na intervalu (c, d). Tada postoji jedinstveno rješenje jednačine (1.6) koje zadovoljava polazni uslov $y(x_0) = y_0$ $(x_0 \in (a, b),\ y_0 \in (c, d))$ i definisano je u nekoj okolini tačke x_0.*

Primjer 4 : Riješiti jednačinu: $xy' = \dfrac{y}{y+1}$.

Rješenje. Kao prvo, jednačinu dovodimo u oblik

$$y' = \frac{y}{x(y+1)} \ ,$$

iz koga uočavamo da je data jednačina sa razdvojenim promenljivima, gdje su $f(x) = \dfrac{1}{x}$ i $g(y) = \dfrac{y}{y+1}$.
Razdvajamo promjenljive koristeći jednakost $y' = \frac{dy}{dx}$,

$$\frac{(y+1)dy}{y} = \frac{dx}{x} \ .$$

Sada integralimo posljednju jednačinu i rješavanjem integrala na lijevoj i desnoj strani dobijamo generalno rješenje polazne diferencijalne jednačine,

$$y + \ln|y| = \ln|x| + C \ .$$

Primjer 5 : Odrediti ono rješenje diferencijalne jednačine $y' = 6y^2 x$ koje zadovoljava uslov $y(1) = \frac{1}{25}$.

Rješenje. Data diferencijalna jednačina je jednačina sa razdvojenim promjenljivima. Zato prvo razdvojimo promjenljive

$$y' = \frac{dy}{dx} = 6y^2 x \iff \frac{dy}{y^2} = 6xdx \ .$$

Nakon integriranja posljednje jednakosti

$$\int y^{-2}dy = 6\int xdx \ ,$$

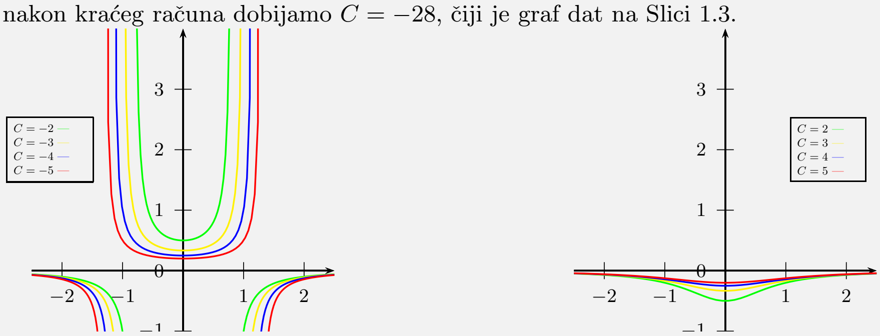
dobijamo $-\dfrac{1}{y} = 3x^2 + C$, odnosno, rješenje diferencijalne jednačine je

$$y(x) = -\frac{1}{3x^2 + C} \ ,$$

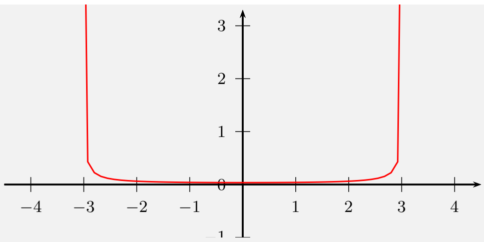
gdje je C proizvoljna realna konstanta. Za razne C imamo različite funkcije rješenja, što je prikazano na Slici 1.2. Naći ono rješenje koje zadovoljava uslov $y(1) = \frac{1}{25}$, znači od svih funkcija izabrati onu za koju je C određen ovim uslovom, to jest

$$\frac{1}{25} = -\frac{1}{3 + C} \ ,$$

odakle nakon kraćeg računa dobijamo $C = -28$, čiji je graf dat na Slici 1.3.



Slika 1.2: Grafici funkcije $y(x) = -\frac{1}{3x^2 + C}$.



Slika 1.3: Graf funkcije $y(x) = -\frac{1}{3x^2-28}$.

Primjer 6 : (**Jednačina sa razdvojenim promjenljivim**) Rezervoar sadrži 1000 litara vode u kojoj je rastvoreno 100 grama soli. U rezervoar se počne ulijevati slana voda brzinom 10 litara u minuti gdje svaki litar vode sadrži 5 grama otopljene soli, a istovremeno slana voda izlazi iz rezervoara brzinom 10 litara u minuti. Mješanjem se otopina u rezervoaru održava homogenom. Odrediti količinu soli u rezervoaru u trenutku t.

Rješenje. Označimo sa $y(t)$ količinu soli u proizvoljnom trenutku t. Njena brzina promjene je

$$y' = \text{stopa priliva soli} - \text{stopa odliva soli}.$$

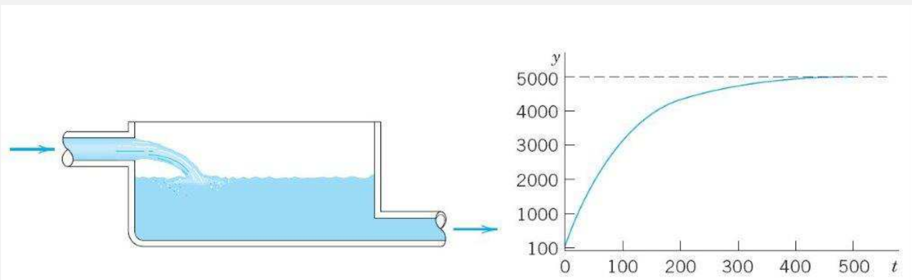
Priliv u minuti je od 50 g soli (5 g soli puta 10 l slane vode). Odliv je 10 litara slane vode što je $10/1000 = 0.01 (= 1\%)$ od ukupne količine rastvora u rezervoaru, a to je količina od $0.01y(t)$. Zbog toga je matematički model posmatranog procesa dat sa

$$y'(t) = 50 - 0.01y(t) = -0.01(y(t) - 5000). \tag{1.7}$$

Jednačina (1.7) je jednačina sa razdvojenim projenljivim koju rješavamo na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{y-5000} &= -0.01dt,\\
\ln|y-5000| &= -0.01t + C_1,\\
y - 5000 &= Ce^{-0.01t}, \quad \text{gdje je} \quad C = e^{C_1},\\
y &= 5000 + Ce^{-0.01t}.
\end{aligned}$$

Budući da na početku rezervoar sadrži 100 g soli to je početni uslov dat sa $y(0) = 100$ što će nam dati jedinstveno rješenje. Ako iskoristimo uslov $y(0) = 100$ dobijamo da je $C = -4900$. Količina soli u rezervoaru u proizvoljnom trenutku t data je sa $y(t) = 5000 - 4900e^{-0.01t}$ i ova funkcija se eksponencijalno približava ka granici od 5000 g.



Primjer 7 : Pretpostavimo da se zimi temperatura tokom dana unutar neke prostorije održava na $70°C$. Grijanje se isključuje u 22:00 te ponovo uključuje u 06:00. Jednog dana u 02:00 unutar prostorije je izmjerena temperatura od $65°C$. Vanjska temperatura je bila $50°C$ u 22:00 koja je pala na $40°C$ u 06:00. Koja je temperatura bila unutar prostorije kada je grijanje uključeno u 06:00?

Rješenje. Eksperimentalno je potvrđeno da je brzina promjene temperature T nekog tijela proporcionalna razlici temperature T i temperature okoline koja ga okružuje (Newtonov zakon hlađenja).

Sa $T(t)$ označimo temperaturu unutar prostrije a sa T_V vanjsku temperaturu. Prema Newtonovom zakonu hlađenja vrijedi

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_V). \tag{1.8}$$

Ovakvo modelovanje je izvršeno pri idealnim uslovima, a korištenje ovog modela na rješavanje našeg problema također može dati vrijedne kvalitativne informacije. Budući da u svakom trenutku t ne znamo vanjsku temperaturu T_V koja varira između $40°C$ i $50°C$, jednačinu (1.8) ćemo riješiti uz podatak da je $T_V = 45°C$, to jest uzet ćemo srednju vanjsku temperaturu u tom periodu. Zbog fizikalnih razloga možemo očekivati da će nam to dati razumnu aproksimaciju temperature prostorije u 06:00. Uz konstantu $T_V = 45°C$, jednačina (1.8) je jednačina sa razdvojenim promjenljivim koju rješavamo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{T-45} &= kdt, \\ \ln|T-45| &= kt + C_1, \\ T - 45 &= Ce^{kt},\ C = e^{C_1}, \\ T(t) &= 45 + Ce^{kt}. \end{aligned}$$

Mi smo izabrali da je u 22:00 $t = 0$ pa je početni uslov $T(0) = 70$ što daje partikularno rješenje T_p:

$$T(0) = 45 + Ce^0 = 70,\ C = 25,\ T_p(t) = 45 + 25e^{kt}.$$

Dalje ćemo iskoristiti uslov da je $T(4) = 65$ što je temperatura nakon $t = 4$ sata, to jest u 02:00. Uz ovaj uslov, dobijamo $T_p(4) = 65 = 45 + 25e^{4k}$ odakle je $k = \frac{1}{4}\ln 0.8 = -0.056$. Dakle, $T_p(t) = 45 + 25e^{-0.056t}$. U 06:00 je 8 sati ($t = 8$) nakon 22:00 pa je $T_p(8) = 45 + 25e^{-0.0568} = 61°C$. Dakle, temperatura u prostoriji se spustila $9°C$ što je bilo razumno i za očekivati.

1.1.2 Homogena jednačina

To je jednačina oblika

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)\ , \tag{1.9}$$

gdje je f neprekidna funkcija u nekom intervalu (a, b). Datu jednačinu riješavamo smjenom

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}\ ,$$

odakle se nalaženjem izvoda po x ima

$$y'(x) = u'(x)x + u(x)\ .$$

Ubacujući posljednje dvije jednakosti u jednačinu (1.9), dobijamo jednačinu

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

koja predstavlja jednačinu sa razdvojnim promjenljivima.

PRIMJER 8 : Riješiti diferencijalnu jednačinu: $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

Rješenje. Prvo uočimo da desnu stranu date jednačine možemo transformisati,

$$y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}\ ,$$

odakle je očigledno da je data jednačina homogena. Sada uvodimo smjenu

$$u = \frac{y}{x}\quad ,\quad y' = u'x + u\ .$$

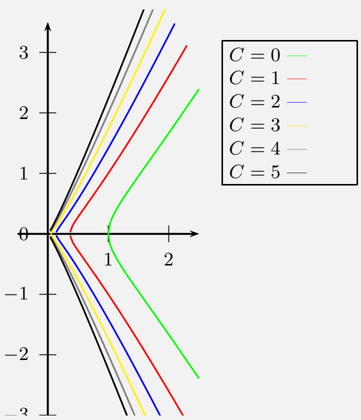
Polazna jednačina sada dobija oblik

$$u'x + u = \frac{1+u}{1-u}\ ,$$

odnosno
$$u' = \frac{1+u^2}{x(1-u)} \ .$$
Posljednja jednačina je jednačina sa razdvojenim promjenljivima, čijim rješavanjem prema ranije izloženom postupku dobijamo
$$arctgu - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|x| + C \ ,$$
odnosno, vraćajući smjenu
$$arctg\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = \ln|x| + C \ .$$

PRIMJER 9 : Odrediti ono rješenje diferencijalne jednačine
$$y' = \frac{4x}{y} + \frac{y}{x} \ ,$$
koje zadovoljava uslov $y(1) = 2$.

Rješenje. Nakon smjene $u = \frac{y}{x}$, odakle je $y' = u'x + u$, dobijamo diferencijalnu jednačinu po u
$$u'x = \frac{4}{u} \ ,$$
a to je jednačina sa razdvojenim promjenljivima
$$udu = \frac{4dx}{x} \ .$$
Integraleći ovu jednačinu dobijamo $\frac{u^2}{2} = 4(\ln|x| + C)$, čije rješenje po u je
$$u(x) = \pm 2\sqrt{\ln|x| + C} \ .$$
Vraćajući se na polaznu funkciju y, imamo
$$y(x) = \pm 2x\sqrt{\ln|x| + C} \ .$$



Slika 1.4: Grafik funkcije $y(x) = \pm 2x\sqrt{\ln|x| + C}$

Koristeći uslov $y(1) = 2$, jasno je da od gornja dva rješenja koristimo ono sa znakom $+$, a onda dobijamo jednačinu po C
$$2\sqrt{C} = 2 \ ,$$
odakle je $C = 1$. Dakle rješenje diferencijalne jednačine je funkcija
$$y(x) = \pm 2x\sqrt{\ln|x| + 1} \ .$$

Ideju rješavanja iz primjera 8 primjenjujemo generalno na rješavanje diferencijalnih jednačina oblika
$$y' = \frac{ax+by}{cx+dy} \ . \tag{1.10}$$

Međutim, ako imamo jednačinu oblika

$$y' = \frac{ax+by+c}{dx+ey+f} \ , \tag{1.11}$$

jasno je da gornja ideja nije primjenljiva. Ali i ovakve jednačine rješavamo na sličan način, prvo ih transformišući sljedećim smjenama.

$$x = u + \alpha \ \ , \ \ y = v + \beta \ ,$$

gdje su α i β proizvoljni realni brojevi. Uvrštavajući ove smjene u jednačinu (1.11), pri čemu je $dy = dv$ i $dx = du$, dobijamo

$$\frac{dv}{du} = v' = \frac{au+bv+a\alpha+b\beta+c}{du+ev+d\alpha+e\beta+f} \ . \tag{1.12}$$

Povoljnim izborom za α i β, birajući ih tako da bude zadovoljen sistem

$$\begin{aligned} a\alpha+b\beta+c &= 0 \\ d\alpha+e\beta+f &= 0 \ , \end{aligned}$$

jednačina (1.11) prelazi u poznati nam oblik jednačine (1.10). Naravno, sistem iz koga određujemo vrijednosti za α i β će imati rješenje ako je njegova determinanta različita od nule, tojest ako vrijedi uslov $ae - bd \neq 0$.

PRIMJER 10 : Rješiti diferencijalnu jednačinu

$$y' = \frac{x+y+2}{x-y-3} \ .$$

Rješenje. Uvodimo smjene $x = u+\alpha$, $y = v+\beta$, te se polazna jednačina transformiše u jednačinu

$$v' = \frac{u+v+\alpha+\beta+2}{u-v+\alpha-\beta-3} \ .$$

Sada rješavamo sistem

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+2 &= 0 \\ \alpha-\beta-3 &= 0 \end{aligned}$$

čija su rješenja $\alpha = \frac{1}{2}$ i $\beta = -\frac{5}{2}$. Dakle, stvarne smjene su

$$x = u + \frac{1}{2} \ \ , \ \ y = v - \frac{5}{2} \ ,$$

koje polaznu jednačinu prevode u diferencijalnu jednačinu

$$v' = \frac{u+v}{u-v} \ .$$

Analogno prethodnom primjeru, rješenje ove jednačine je

$$\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{v}{u}\right| - \frac{v}{u}\right) = \ln|u| + C \ .$$

Vraćajući se na polazne promjenljive dobijamo rješenje polazne jednačine,

$$\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{y+\frac{5}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right| - \frac{y+\frac{5}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right) = \ln\left|x-\frac{1}{2}\right| + C \ ,$$

što je ekvivalentno sa

$$\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{2y+5}{2x-1}\right| - \frac{2y+5}{2x-1}\right) = \ln|x-\frac{1}{2}| + C \ .$$

1.1.3 Linearna jednačina

Diferencijalnu jednačina oblika

$$y' + f(x)y = g(x) \ , \tag{1.13}$$

gdje su f i g proizvoljne neprekidne funkcije, nazivamo *linearna diferencijalna jednačina.*

Posmatrajmo sljedeću tehniku nalaženja rješenja jednačine (1.13), neočekivana ali jako korisna. Pomnožimo nekom (za sada nepoznatom) funkcijom $\mu(x)$ jednačinu (1.13) dakle,

$$\mu(x)y' + \mu(x)f(x)y = \mu(x)g(x) \ . \tag{1.14}$$

Neočekivanu ulogu ove funkcije $\mu(x)$, kakva god ona bila, pojačajmo i zahtjevom

$$\mu(x)f(x) = \mu'(x) \ . \tag{1.15}$$

Stavljajući (1.15) u (1.14), dobijamo

$$\mu(x)y' + \mu'(x)y = \mu(x)g(x) \ , \tag{1.16}$$

i primjećujemo da je tada izraz na lijevoj strani izvod proizvoda, to jest

$$\mu(x)y' + \mu'(x)y = (\mu(x)y)' \ , \tag{1.17}$$

te stavljajući (1.17) u (1.16), imamo

$$(\mu(x)y)' = \mu(x)g(x) \ . \tag{1.18}$$

Integrirajmo sada jednačinu (1.18) po x,

$$\int (\mu(x)y)'dx = \int \mu(x)g(x)dx \ ,$$

odnosno, primjenjujući poznato pravilo za neodređeni integral, slijedi

$$\mu(x)y + C = \int \mu(x)g(x)dx \ . \tag{1.19}$$

Kako nam je cilj naći funkciju $y(x)$, onda iz (1.19) lagano računamo

$$y(x) = \frac{\int \mu(x)g(x)dx + C}{\mu(x)} \ , \tag{1.20}$$

pri čemu smo iskoristili činjenicu da je konstanta integracije C nepoznata, pa smo njen zapis na desnoj strani, jednostavnosti radi, zapisali sa $+C$, a ne kako bi račun dao sa $-C$. Posljednom jednačinom mi smo dobili rješenje jednačine (1.13). Ostaje "samo" da se odgonetne, a šta je ona neočekivana funkcija $\mu(x)$.

Iz jednačine (1.15) imamo

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = f(x) \iff (\ln \mu(x))' = f(x) \ .$$

Opet, integrirajući posljednju jednakost, dobijamo

$$\ln \mu(x) + D = \int f(x)dx \ ,$$

pa po istom principu kao malo prije, možemo pisati

$$\ln \mu(x) = \int f(x)dx + D \ .$$

Eksponencirajući obje strane posljednje jednakosti, i koristeći pravila stepenovanja, imamo

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx + D} = e^D e^{\int f(x)dx} \ .$$

Kako je i e^D konstanta, ne gubeći na opštosti, konačno imamo

$$\mu(x) = De^{\int f(x)dx} \ . \tag{1.21}$$

Uobičajeno se ovakve funkcije sa ovakvom ulogom nazivaju *integracioni faktor*. Stavljajući (1.21) u (1.20), slijedi

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{\int De^{\int f(x)dx} g(x)dx + C}{De^{\int f(x)dx}} \\ &= e^{-\int f(x)dx}\left(\int e^{\int f(x)dx} g(x)dx + \frac{C}{D}\right) , \end{aligned}$$

pa konačno uzimajući da je $\frac{C}{D}$ nova konstanta C, dobijamo krajnji oblik rješenja jednačine (1.13)

$$y(x) = e^{-\int f(x)dx}\left(\int e^{\int f(x)dx} g(x)dx + C\right) . \tag{1.22}$$

Pod pretpostavkom o neprekidnosti funkcija $f(x)$ i $g(x)$ na intervalu (a, b), imamo postojanje i jedinstvenost rješenje jednačine (1.13) koje zadovoljava polazni uslov $y(x_0) = y_0$ ($x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$) i definisano je u (a, b). To rješenje je dato sa (1.22).

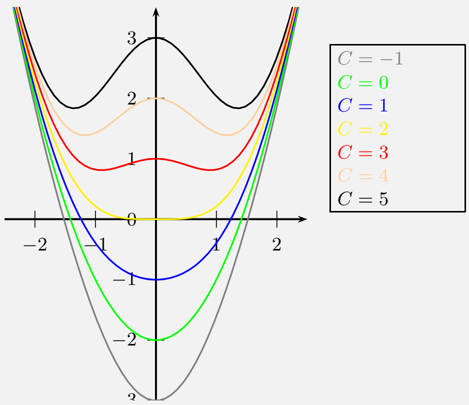
PRIMJER 11 : Riješiti diferencijalnu jednačinu: $y' + xy - x^3 = 0$ i odrediti ono rješenje koje zadovoljava uslov $y(0) = 1$.

Rješenje. Dovedimo jednačinu na zahtijevani oblik

$$y' + xy = x^3 .$$

To je linearna jednačina kod koje je $f(x) = x$ i $g(x) = x^3$. Sada je rješenje dato sa

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int x dx}\left(C + \int x^3 e^{\int x dx} dx\right) \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}}\left(C + \int x^3 e^{\frac{x^2}{2}} dx\right) \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}}\left(C + (x^2 - 2)e^{\frac{x^2}{2}}\right) \end{aligned}$$



Slika 1.5: Grafik funkcije $y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(C + (x^2 - 2)e^{\frac{x^2}{2}}\right)$

Postavljeni uslov daje nam jednačinu po C

$$1 = 1 \cdot (C + (0 - 2) \cdot 1) ,$$

iz koje dobijamo $C = 3$, a to je graf obojen crvenom bojom na Slici 1.5.

PRIMJER 12 : Posmatrajmo problem sa početnim uslovom:

$$y' - \frac{1}{2} = 2\sin(3t) , \; y(0) = y_0 .$$

Ako je t vremenska varijabla, interpretirati ponašanje rješenja gornje diferencijalne jednačine kada $t \to$

$+\infty$, u zavisnosti od inicijalne vrijednosti y_0.

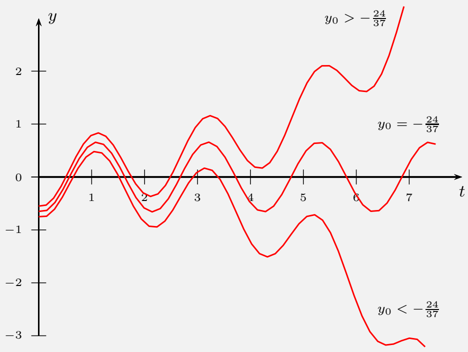
Rješenje. Posmatrana diferencijalna jednačina $y' - \frac{1}{2} = 2\sin(3t)$ je linearna diferencijalna jednačina kod koje je $f(t) = -\frac{1}{2}$ i $g(t) = 2\sin(3t)$, te je generalno rješenje dato sa

$$\begin{aligned} y = y(t) &= e^{\int \frac{1}{2}dt}\left(\int e^{-\int \frac{1}{2}dt} 2\sin(3t)dt + C\right) \\ &= e^{\frac{t}{2}}\left(2\int e^{-\frac{t}{2}}\sin(3t)dt + C\right) \\ &= -\frac{24}{37}\cos(3t) - \frac{4}{37}\sin(3t) + Ce^{\frac{t}{2}}\ . \end{aligned}$$

Koristeći se inicijalnim uslovom $y(0) = y_0 = -\frac{24}{37} + C$, dobijamo da je $C = y_0 + \frac{24}{37}$, odnosno da je partikularno rješenje

$$y(t) = -\frac{24}{37}\cos(3t) - \frac{4}{37}\sin(3t) + \left(y_0 + \frac{24}{37}\right)e^{\frac{t}{2}}\ .$$

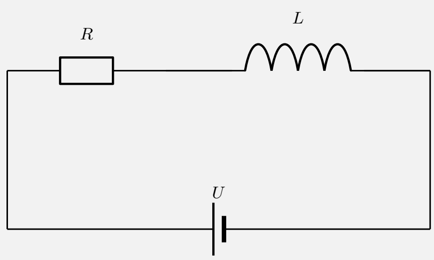
Vidimo da se rješenje sastoji od tri sabirka od kojih su prva dva konačne vrijednosti za bilo koje $t \geq 0$, pa i kada $t \to +\infty$, a da treći sabirak neograničeno raste ili neograničeno opada ili ga uopšte nema u zavisnosti od toga kakav je faktor $y_0 + \frac{24}{37}$.



Prikažimo ovo tabelom.

y_0	Ponašanje funkcije kada $t \to +\infty$
$y_0 < -\frac{24}{37}$	$y(t) \to -\infty$.
$y_0 = -\frac{24}{37}$	$y(t)$ ostaje konačna veličina.
$y_0 > -\frac{24}{37}$	$y(t) \to +\infty$.

PRIMJER 13 : Posmatrajmo RL-kolo koje ima konstantu elektromotornu silu $E = 48V$ i koje se sastoji od otpornika otpora $R = 11\Omega$ i induktora induktiviteta $L = 0.1H$ u serijskoj vezi, sa početnom strujom jednakom nula. Trenutna vrijednost struje $I(t)$ u kolu uzrokuje pad napona RI preko opornika (Ohmov zakon) i pad napona LI' preko provodnika, a suma ova dva pada napona jednaka je elektromotornoj sili (Kirhhoffov zakon).



Slika 1.6: RL kolo

Rješenje. Dakle, prema ova dva zakona model RL-kola je dat sa $LI' + RI = E$, to jest u standardnoj formi sa linearnom diferencijalnom jednačinom

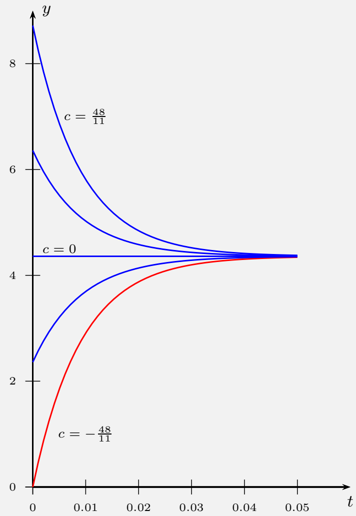
$$I' + \frac{R}{L} I = \frac{E}{L} \tag{1.23}$$

čije je opšte rješenje dato sa

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left(\int e^{\frac{R}{L}t}\frac{E}{L}dt + C\right) = e^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{E}{L}\frac{e^{\frac{R}{L}t}}{\frac{R}{L}} + C\right) = \frac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}\ . \tag{1.24}$$

Analizom opšteg rješenja (1.24) zaključujemo da se $I(t)$ približava ka $\frac{E}{R}$ brže što je $\frac{R}{L}$ veće. U našem slučaju je $\frac{R}{L} = 110$ pa je bribližavanje veoma brzo i to rastuće ako je $I(0) < \frac{48}{11}$ ili opadajuće ako je $I(0) > \frac{48}{11}$. Ako je $I(0) = \frac{48}{11}$ tada je rješenje konstanta. Dakle, u našem slučaju dobijamo

$$I(t) = \frac{48}{11} + Ce^{-110t}\ .$$



Početni uslov $I(0) = 0$ daje $C = -\frac{48}{11}$ pa je partikularno rješenje (crveni graf na slici) dato sa

$$I(t) = \frac{48}{11}\left(1 - e^{-110t}\right)\ .$$

Primjer 14 : Strujni krug se sastoji od izvora napona $E(t) = 3\sin 2t$ (promjenljiv napon), otpornika otpora $R = 10\Omega$ i induktora induktiviteta $L = 0.5H$, te početnom strujom $I = 6A$. Odrediti jačinu struje u strujnom kolu u proizvoljnom trenutku t.

Rješenje. Linearna diferencijalna jednacina (1.23) koja modeluje naše strujno kolo je data sa

$$I'(t) + 20I(t) = 6\sin 2t\ ,$$

i ona predstavlja linearnu diferencijalnu jednačinu. Njeno opšte rjesenje je dato sa

$$I(t) = Ce^{-20t} + \frac{30}{101}\sin 2t - \frac{3}{101}\cos 2t\ .$$

Uz početni uslov $I(0) = 6$ dobijamo partikularno rješenje

$$I(t) = \frac{609}{101}e^{-20t} + \frac{30}{101}\sin 2t - \frac{3}{101}\cos 2t\ .$$

1.1.4 Bernoullijeva jednačina

To je jednačina oblika

$$y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}\ , \tag{1.25}$$

gdje je α proizvoljan realan broj različit od 0 i od 1 (u oba ova slučaja jednačina (1.25) bi se svela na tip linearne diferencijalne jednačine).

Jednačinu (1.25) riješavamo smjenom

$$z(x) = (y(x))^{1-\alpha} ,$$

odakle se dobija $z'(x) = (1-\alpha)(y(x))^{-\alpha}y'(x)$. Iz posljednje dvije jednakosti jednostavno se dobija

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad , \quad y' = \frac{1}{1-\alpha}z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}z'$$

čijim uvrštavanjem u (1.25) i elementarnim računom imamo

$$z' + (1-\alpha)f(x)z = (1-\alpha)g(x) ,$$

čime smo dobili linearnu jednačinu po z.

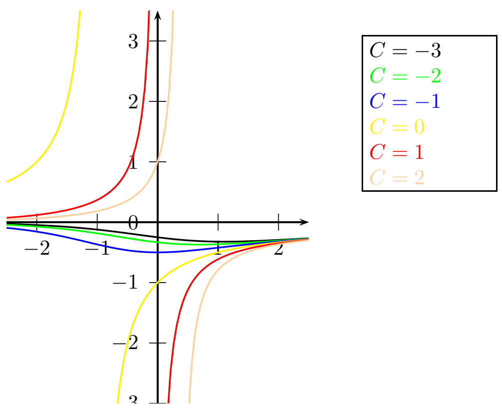
Primjer 15 : Riješiti diferencijalnu jednačinu: $y' - y = xy^2$.

Rješenje. Data jednačina je Bernoullijeva jednačina sa $\alpha = 2$, pa uvodimo smjenu

$$z = y^{1-2} = y^{-1} .$$

Sada računamo potrebne zamjene, $y = z^{-1}$ i $y' = -z^{-2}z'$, čijim uvrštavanjem u polaznu jednačinu dobijamo $-z^{-2}z' - z^{-1} = xz^{-2}$. Množenjem posljednje jednakosti sa $-z^2$ imamo $z' + z = -x$, a to je linearna jednačina čije je rješenje $z = e^{-x}(C - (x+1)e^x)$, odakle vraćajući se na polaznu funkciju y imamo

$$y(x) = \frac{1}{e^{-x}(C - (x+1)e^x)} .$$



Slika 1.7: Graf funkcije $y(x) = \frac{1}{e^{-x}(C-(x+1)e^x)}$

1.1.5 Riccatieva diferencijalna jednačina

Jednačina oblika

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) , \tag{1.26}$$

naziva se Riccatieva diferencijalna jednačina. Ovaj tip jednačine se ne može riješiti u opštem slučaju. Postoji nekoliko situacija kada se ova jednačina svodi na već poznate nam jednačine.
Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$ poznate konstante i $f(x)$ poznata funkcija. Ako su $p(x) = af(x)$, $q(x) = bf(x)$ i $r(x) = cf(x)$, tada se jednačina (1.26) svodi na oblik

$$y' = f(x)(ay^2 + by + c) ,$$

a to je jednačina sa razdvojenim promjenljivim.
Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$ poznate konstante i $p(x) = \frac{a}{x^2}$, $q(x) = \frac{b}{x}$ i $r(x) = c$, tada se jednačina (1.26) svodi na oblik

$$y' = a\frac{y^2}{x^2} + b\frac{y}{x} + c ,$$

a to je homogena jednačina.
Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$ poznate konstante i $p(x) = a$, $q(x) = \frac{b}{x}$ i $r(x) = \frac{c}{x^2}$, tada se jednačina (1.26) svodi na oblik

$$y' = ay^2 + \frac{b}{x}y + \frac{c}{x^2} \ ,$$

koja se smjenom $y = \frac{z}{x}$, gdje je z nova nepoznata funkcija, svodi na jednačinu sa razdvojenim promjenljivim.

Riccatieva jednačina se uvijek može riješiti ako je poznato njeno jedno partikularno rješenje y_1. Tada uvodimo smjenu

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \ ,$$

gdje je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija. Riccatieva diferencijalna jednačina se transformiše u linearnu diferencijalnu jednačinu. Zaista, tada je

$$y' = y_1' - \frac{z'}{z^2} \ ,$$

pa uvrštavajući izraze za y i y' u jednačinu (1.26) imamo

$$y_1' - \frac{z'}{z^2} = py_1^2 + 2py_1\frac{1}{z} + p\frac{1}{z^2} + qy_1 + q\frac{1}{z} + r \ .$$

Imajući u vidu da je y_1 jedno rješenje polazne jednačine, nakon sređivanja ovog izraza dobijamo,

$$z' + (2py_1 + q)z = -p \ ,$$

a to je linearana diferencijalna jednačina po z.

Primjedba 1.1.1. Uz poznavanje jednog partikularnog rješenja y_1, polaznu Riccatijevu jednačinu bi mogli rješavati i smjenom $y = y_1 + z$, a time bi se polazna jednačina svela na Bernoullijevu jednačinu.

PRIMJER 16 : Naći opšte rješenje diferencijalne jednačine

$$y' = \frac{1}{1-x^3}y^2 - \frac{x^2}{1-x^3}y - \frac{2x}{1-x^3}$$

ako je $y_1(x) = ax^2$ jedno partikularno rješenje i $a \in \mathbb{R}$ konstanta koju treba odrediti.

Rješenje. Iz $y_1(x) = ax^2$ dobijemo da je $y_1'(x) = 2ax$ pa zamjenom u jednačinu dobijamo

$$2ax = \frac{1}{1-x^3}a^2x^4 - \frac{x^2}{1-x^3}ax^2 - \frac{2x}{1-x^3} \ ,$$

i sređivanjem

$$2(a+1)x - a(a+1)x^4 = 0 \ .$$

Ova jednakost vrijedi samo ako je $a + 1 = 0$, tojest $a = -1$.

Dakle, partikularno rješenje jednačine je $y_1(x) = -x^2$. Uvođenjem smjene $y = y_1 + \frac{1}{z} = -x^2 + \frac{1}{z}$ zadana jednačina se tranformiše u linearnu diferencijalnu jednačinu

$$z' - \frac{3x^2}{1-x^3}z = -\frac{1}{1-x^3} \ ,$$

čije je opšte rješenje

$$z(x) = \frac{C-x}{1-x^3} \ .$$

Opšte rješenje zadane Riccatieve diferencijalne jednačine je

$$y = -x^2 + \frac{1-x^3}{C-x} = \frac{1-Cx^2}{C-x} \ .$$

1.1.6 Lagrangeova diferencijalna jednačina

Jednačina oblika

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \ , \tag{1.27}$$

gdje su φ i ψ zadate funkciji i pri čemu je $\varphi(y') \neq y'$, naziva se Lagrangeova diferencijalna jednačina. Ako su funkcije $\varphi, \psi \in C^1(a, b)$, tada koristeći smjenu $y' = u$, jednačina (1.27) postaje, $y = x\varphi(u) + \psi(u)$. Diferenciranjem ove jednačine imamo,

$$dy = dx\varphi(u) + x\varphi'(u)du + \psi'(u)du \ . \tag{1.28}$$

Iz smjene $y' = \frac{dy}{dx}$ imamo da je $dy = udx$, pa stavljajući to u (1.28) i nakon sređivanja dobijamo

$$(\varphi(u) - u)dx + (x\varphi'(u) + \psi'(u))du = 0 \ ,$$

odakle dobijamo diferencijalnu jednačinu po x,

$$\frac{dx}{du} = \frac{x\varphi'(u) + \phi'(u)}{u - \varphi(u)} \ .$$

Uz pretpostavku da je $u - \varphi(u) \neq 0$ za svako $u \in (u_1, u_2)$, to je linearna diferencijalna jednačina

$$x' + \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u) - u}x = -\frac{\psi'(u)}{\varphi(u) - u} \ ,$$

koja ima opšte rješenje oblika $x(u) = CA(u) + B(u)$, gdje su $A(u)$ i $B(u)$ odgovarajuće funkcije.

Opšte rješenje Lagrangeove diferencijalne jednačine je dato u parametarskom obliku sa

$$\begin{aligned} x(u) &= CA(u) + B(u) \\ y(u) &= (CA(u) + B(u))\varphi(u) + \psi(u), \ \ u \in (u_1, u_2). \end{aligned}$$

Ako je u_0 rješenje jednačine $\varphi(u) - u = 0$, onda je funkcija $y = u_0 x + \varphi(u_0)$ rješenje Lagrangeove diferenecijalne jednačine koje može biti i singularno.

PRIMJER 17 : Naći opšte rješenje diferencijalne jednačine

$$y = xy'^2 + y'^2 \ .$$

Rješenje. Uvodenjem smjene $y' = u$ dobijamo jednačinu $y = xu^2 + u^2$. Diferenciranjem dobijamo $y' = u = u^2 + 2uu'x + 2uu'$ odakle je

$$(u^2 - u)dx + 2u(x + 1)du = 0 \ .$$

Ovo je linearna diferencijalna jednačina po x, pa za $u^2 - u \neq 0$, dobijamo

$$\frac{dx}{du} + \frac{2}{u-1}x = \frac{2}{u-1} \ .$$

Rješenje ove jednačine je $x = \frac{C}{(u-1)^2} - 1$, te je $y = \frac{Cu^2}{(u-1)^2}$. Opšte rješenje jednačine dato u parametarskom obliku je

$$\begin{aligned} x(u) &= \frac{C}{(u-1)^2} - 1 \\ y(u) &= \frac{Cu^2}{(u-1)^2}. \end{aligned}$$

Eliminacijom parametra u, u ovom slučaju to je moguće, dobijamo opšte rješenje u eksplicitnom obliku $y = (\sqrt{x+1} + c)^2$.

1.1.7 Clairautova diferencijalna jednačina

Jednačina oblika

$$y = xy' + \psi(y') \ , \tag{1.29}$$

naziva se Clairautova diferencijalna jednačina. Primjetimo odma da je ova jednačina specijalan slučaj Lagrangeove jednačine kada je $\varphi(y') = y'$. Ako je funkcija $\psi(u)$ definisana na intervalu (u_1, u_2), onda je opšte rješenje jednačine dato sa $y = Cx + \psi(C)$. Clairautova diferencijalna jednačina može imati i drugih rješenja. Naime, neka je funkcija $\psi \in C^2(u_1, u_2)$ i $\psi''(u) \neq 0$ za svako $u \in (u_1, u_2)$. Uvođenjem parametra $y' = u$ dobijamo jednačinu

$$(x + \psi'(u))du = 0 \ .$$

Ako je $du = 0$, to jest $u = C$ dobijamo opšte rješenje. Ako je $x + \psi'(u) = 0$ onda je funkcija

$$\begin{aligned} x(u) &= -\psi'(u) \\ y(u) &= -u\psi'(u) + \psi(u), \ \ u \in (u_1, u_2) \ , \end{aligned}$$

parametarsko rješenje jednačine. Ovo rješenje je singularno.

PRIMJER 18 : Naći opšte rješenje diferencijalne jednačine

$$y = xy' - \frac{1}{4}y'^2 \ .$$

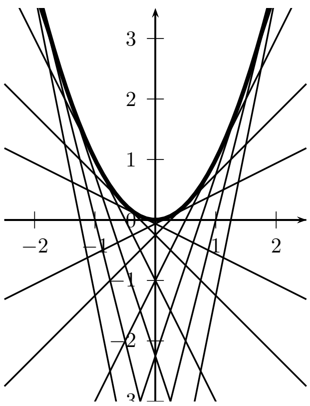
Rješenje. Opšte rješenje ove jednačine je dato sa

$$y = Cx - \frac{1}{4}C^2 \ ,$$

pri čemu je $C \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta. Ali, kako je $\psi(C) = -\frac{1}{4}C^2$ onda je $\psi''(C) = -\frac{1}{2} \neq 0$, pa singularna rješenja dobijamo eliminacijom parametra C iz sistema jednačina

$$\begin{aligned} y &= Cx - \frac{1}{4}C^2 \\ 0 &= x - \frac{1}{2}C. \end{aligned}$$

Iz druge jednačine vidimo da je $C = 2x$, a time je singularno rješenje polazne jednačine dato sa $y = x^2$.



Slika 1.8: Opšte rješenje $y = Cx - \frac{1}{4}C^2$ (tanke linije) i singularno rješenje $y = x^2$ (debela linija)

1.2 Linearne jednačine višeg reda sa konstantnim koeficijentima

Opšti oblik linearne jednačine n-tog reda je

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x) \ ,$$

gdje za funkcije $f(x)$ i $a_i(x)$ $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ pretpostavljamo da su neprekidne funkcije na nekom segmentu I.

Mi ćemo se ovdje baviti isključivo linearnim jednačinama višeg reda kod kojih su funkcije $a_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ konstantne funkcije (realne konstante), to jest razmatraćemo linearne jednačine n-tog reda sa konstantnim koeficijentima,

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x) \ .$$

1.2.1 Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

Kao prvo riješit ćemo odgovarajuću homogenu jednačinu, to jest jednačinu oblika

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0 \ . \tag{1.30}$$

Tražeći rješenje u obliku

$$y(x) = e^{rx} \ ,$$

gdje je $r \in \mathbb{R}$, polazna jednačina postaje

$$(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + ... + a_n) e^{rx} = 0 \ .$$

Kako je $e^{rx} \neq 0$, iz posljednje jednačine dobijamo jednačinu

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + ... + a_n = 0 \tag{1.31}$$

koju nazivamo *karakteristična jednačina* polazne homogene jednačine. Karakteristična jednačina je polinom stepena n, pa ona ima n rješenja r_i $(i = 1, 2, ..., n)$.

Teorem 1.2.1. *Neka su $r_1, r_2, ..., r_s$ različita rješenja karakteristične jednačine (1.31), sa višestrukostima $m_1, m_2, ..., m_s$, pri čemu je $m_1 + m_2 + ... + m_s = n$. Tada su funkcije*

$$e^{r_i x}, x e^{r_i x}, x^2 e^{r_i x}, ..., x^{m_i - 1} e^{r_i x} \ , \ i = 1, 2, ..., s \tag{1.32}$$

rješenja jednačine (1.30) i pri tome su ta rješenja linearno nezavisna.

Primjetimo da pojedina rješenja karakteristične jednačine mogu biti i kompleksni brojevi. Kako nas zanimaju samo realna, to će nam trebati sljedeća tvrdnja koja se jednostavno dokazuje.

Teorem 1.2.2. *Ako je $y(x) = u(x) + iv(x)$ rješenje jednačine (1.30) tada su njen realni i njen imaginarni dio takođe rješenja te jednačine.*

Pod ovim imamo u vidu sljedeće: Ako je $r_k = \alpha + i\beta$, tada je

$$y(x) = e^{r_k x} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) \ ,$$

pa ako je $y(x)$ rješenje polazne homogene jednačine, tada su to i $e^{\alpha x} \cos \beta x$ i $e^{\alpha x} \sin \beta x$. Treba još naglasiti da ako je jedno od rješenja komleksan broj $\alpha + i\beta$, tada postoji i rješenje karakteristične jednačine koje je oblika $\alpha - i\beta$. Pri tome, na osnovu gore rečenog, tom rješenju odgovara rješenje polazne jednačine koje se do na znak razlikuje od rješenja koje dobijemo pomoću rješenja $\alpha + i\beta$ karakteristične jednačine. Ovo znači da ćemo paru konjugovano-kompleksnih rješenja $\alpha \pm i\beta$ karakteristične jednačine, dodjeljivati jedan par rješenja polazne jednačine, $e^{\alpha x} \cos \beta x$ i $e^{\alpha x} \sin \beta x$.

Sa gornja dva teorema smo načelno opisali sva rješenja jednačine (1.30). Sljedećom teoremom dajemo i konačni oblik rješenja ove jednačine.

Teorem 1.2.3. *Neka su $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ linearno nezavisna rješenja (rješenja dobijena na osnovu Teorema 1.2.1) i Teorema 1.2.2 jednačine (1.30). Tada je funkcija*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) \ ,$$

opšte rješenje jednačine (1.30).

PRIMJER 19 : Riješiti diferencijalnu jednačinu: $y''' - 3y' + 2y = 0$.

Rješenje. Rješenja tražimo u obliku $y = e^{rx}$ pa je karakteristična jednačina data sa

$$r^3 - 3r + 2 = (r-1)^2(r+2) = 0 \ .$$

Različita rješenja ove jednačine su $r_1 = 1$, višestrukosti $m_1 = 2$ i $r_2 = -2$, višestrukosti $m_2 = 1$, dakle ukupno imamo $m_1 + m_2 = 3$ rješenja karakteristične jednačine.

Rješenju $r_1 = 1$ odgovaraju funkcije e^x i xe^x (zbog višestrukosti 2, Teorem 1.2.1), a rješenju $r_2 = -2$ odgovara samo funkcija e^{-2x} jer je $m_2 = 1$. Sada je rješenje polazne homogene jednačine, na osnovu Teorem 1.2.3, dato sa

$$y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-2x} \ .$$

PRIMJER 20 : Riješiti diferencijalnu jednačinu:

$$y^{(6)} - 2y^{(5)} + 4y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 2y' + 2y = 0 \ .$$

Rješenje. Odgovarajuća karakteristična jednačina je

$$r^6 - 2r^5 + 4r^4 - 4r^3 + 5r^2 - 2r + 2 = (r^2+1)^2(r^2 - 2r + 2) = 0 \ .$$

Rješenja karakteristične jednačine su $r_{1/2} = \pm i$, višestrukosti $m_{1/2} = 2$ i $r_{3/4} = 1 \pm i$, višestrukosti $m_{3/4} = 1$. Funkcije koje odgovaraju paru $r_{1/2}$ konjugovano-kompleksnih rješenja su

$$\cos x \ , \ \sin x \ , x\cos x \ , x\sin x \ ,$$

a funkcije koje odgovaraju drugom paru su

$$e^x\cos x \text{ i } e^x\sin x \ .$$

Rješenje polazne jednačine je dato sa

$$y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + x(C_3\cos x + C_4\sin x) + e^x(C_5\cos x + C_6\sin x) \ .$$

PRIMJER 21 : Riješiti diferencijalnu jednačinu

$$y''' - 5y'' - 22y' + 56y = 0 \ ,$$

a zatim odrediti ono rješenje koje zadovoljava uslov

$$y(0) = 1 \ , \ y'(0) = -2 \ , \ y''(0) = -4 \ .$$

Rješenje. Karakteristična jednačina zadate diferencijalne jednačine glasi

$$r^3 - 5r^2 - 22r + 56 = (r+4)(r-2)(r-7) = 0 \ ,$$

i njena rješenja su

$$r_1 = -4 \ , \ r_2 = 2 \ , \ r_3 = 7 \ .$$

Rješenja su realna i različita (višestrukosti 1), pa je rješenje jednačine

$$y(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^{2x} + C_3e^{7x} \ .$$

Nalazeći prvi i drugi izvod rješenja $y(x)$, postavljeni uslovi nam daju sljedeći sistem jednačina po nepoznatim konstantama C_1, C_2 i C_3,

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 + C_3 = 1 \\ y'(0) &= -4C_1 + 2C_2 + 7C_3 = -2 \\ y''(0) &= 16C_1 + 4C_2 + 49C_3 = -4 \ . \end{aligned}$$

Rješenje ovog sistema je

$$C_1 = \frac{14}{33}\ ,\ C_2 = \frac{13}{15}\ ,\ C_3 = -\frac{16}{55}\ ,$$

te je traženo rješenje

$$y(x) = \frac{14}{33}e^{-4x} + \frac{13}{15}e^{2x} - \frac{16}{55}e^{7x}\ .$$

1.2.2 Nehomogena jednačina sa konstantnim koeficijentima. Metod jednakih koeficijenata

Sada ćemo razmatrati nehomogenu jednačinu n-tog reda sa konstantnim koeficijentima

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny = f(x)\ . \tag{1.33}$$

Rješavanje ove jednačine se odvija u tri koraka.
Prvi korak: Rješavamo odgovarajuću homogenu jednačinu

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny = 0\ ,$$

na način izložen u prethodnoj sekciji. Pri tome dobijamo odgovarajuće *homogeno rješenje* $y_h(x)$.
Drugi korak: Nalazimo bar jedno *partikularno rješenje* nehomogene jednačine (1.33), koje ćemo obilježavati sa $y_p(x)$.
Treći korak: Rješenje polazne nehomogene jednačine je tada dato sa

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)\ .$$

Prvi korak smo već obrazložili u prethodnoj sekciji. Ovdje ćemo sada dati način određivanja partikularnog rješenja jednačine, to jest objasnit ćemo drugi korak navedenog postupka. Primjetimo da je treći korak samo forma zapisa konačnog (opšteg) rješenja polazne diferencijalne jednačine.

Metoda spomenuta u naslovu, *metod jednakih koeficijenata*, bazira se na činjenici da kada izjednačavamo dva izraza, da će se jednakost postići ako su koeficijenti uz odgovarajuće objekte jednaki. Naprimjer, polinom $ax^2 + bx + c$ bit će jednak polinomu $2x - 3$, to jest

$$ax^2 + bx + c = 2x - 3\ ,$$

ako i samo ako su koeficijenti uz x^2, uz x i slobodni članovi, na lijevoj i desnoj strani jednakosti jednaki,

$$a = 0\ ,\ b = 2\ ,\ c = -3\ .$$

Na isti način razmišljamo ako su u pitanju bilo kakvi objekti, ne obavezno polinomi. Tako imamo,

$$A\cos x + be^x - 3 = 3\cos x - e^x + C \iff A = 3\ ,\ b = -1\ ,\ C = -3\ .$$

Pokazuje se da ovaj metod možemo primjeniti za određivanje partilkularnog rješenja za neke specijalne oblike funkcije $f(x)$ jednačine (1.33). Sada ćemo dati pregled tih specijalnih slučajeva.

1. Neka je $f(x) = e^{\alpha x}$.

   Ukoliko α nije rješenje karakteristične jednačine, partikularno rješenje tražimo u obliku

   $$y_p(x) = Ae^{\alpha x}\ ,$$

   gdje je $A \in \mathbb{R}$ konstanta koju treba odrediti.

PRIMJER 22 : Rješiti jednačinu: $y'' - y = e^{2x}$.

Rješenje. Karakteristična jednačina je $r^2 - 1 = 0$ i njena su rješenja $r_1 = 1$ i $r_2 = -1$, oba višestrukosti 1, te je homogeno rješenje dato sa $y_h = C_1e^x + C_2e^{-x}$.

U ovom slučaju je $\alpha = 2$ i vidimo nije rješenje karakteristične jednačine te partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p = Ae^{2x}$. Nalazeći odgovarajuće izvode ove funkcije i ubacujući u polaznu jednačinu, dobijamo

$$4Ae^{2x} - Ae^{2x} = e^{2x} \iff 3Ae^{2x} = e^{2x}\ .$$

prema metodu jednakih koeficijenata zaključujemo da je $3A = 1$. Dakle, $A = \frac{1}{3}$, a odgovarajuće partikularno rješenje je $y_p = \frac{1}{3}e^{2x}$.

Konačno, rješenje polazne jednačine je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x} \ .$$

Ukoliko α jeste rješenje karakteristične jednačine i to višestrukosti m, onda partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = Ax^m e^{\alpha x} \ .$$

Primjer 23 : Rješiti jednačinu: $y'' - y = e^x$.

Rješenje. Karakteristična jednačina je $r^2 - 1 = 0$ i rješenja su $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, oba sa višestrukostima 1. Homogeno rješenje je $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

Sada je $\alpha = 1 = r_1$ (višestrukosti 1) pa partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p = Axe^x$. Kako je $y_p'' = 2Ae^x + Axe^x$, ubacujući ove podatke u polaznu jednačinu imamo

$$2Ae^x + Axe^x - Axe^x = e^x \iff 2Ae^x = e^x \ .$$

Dakle, $2A = 1$ te je $A = \frac{1}{2}$. Odgovarajuće partikularno rješenje je $y_p = \frac{1}{2}xe^x$, te je opšte rješenje polazne jednačine

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x \ .$$

2. Neka je $f(x) = P_k(x)$ (polinom stepena k).

   Opet razlikujemo dva slučaja:
   Ako su sva rješenja karakteristične jednačine različita od nule, onda partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p(x) = Q_k(x)$, to jest u obliku polinoma k-tog stepena čije koeficijente treba odrediti.

Primjer 24 : Riješiti jednačinu: $y'' - 3y' + 2y = x + 1$.

Rješenje. Karakteristična jednačina je $r^2 - 3r + 2 = 0$ i njena rješenja su $r_1 = 1$ ($m_1 = 1$) i $r_2 = 2$ ($m_2 = 1$), te je $y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Kako nula nije korijen karakteristične jednačine ($r_i \neq 0$), a desna strana je polinom prvog stepena, partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p(x) = Ax + B$. Sada su $y_p' = A$ i $y_p'' = 0$, pa ubacujući to u polaznu jednačinu imamo,

$$-3A + 2Ax + 2B = x + 1 \iff 2Ax + (-3A + 2B) = x + 1 \ ,$$

odakle izjednačavajući odgovarajuće koeficijente dobijamo sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2A &= 1 \\ -3A + 2B &= 1 \ . \end{aligned}$$

Rješavanjem ovog sistema dobijamo tražene koeficijente, $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{5}{4}$, pa je partikularno rješenje dato sa $y_p(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{4}$, a opšte rješenje polazne jednačine je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{x}{2} + \frac{5}{4} \ .$$

Ako je nula rješenje karakteristične jednačine višestrukosti m, onda partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p(x) = x^m Q_k(x)$.

Primjer 25 : Riješiti jednačinu: $y''' + 2y' = x - 1$.

Rješenje. Karakteristična jednačina je $r^3 + 2r = 0$ i njena rješenja su $r_1 = 0$ ($m_1 = 1$), $r_{2/3} = \pm i\sqrt{2}$ ($m_{2/3} = 1$). Rješenje homogene jednačine je $y_h(x) = C_1 + C_2 \cos\sqrt{2}x + C_3 \sin\sqrt{2}x$.

Kako je 0 ($r_1 = 0$) korijen karakteristične jednačine višestrukosti 1, partikularno rješenje ne tražimo u obliku polinoma prvog stepena, nego kao $y_p(x) = x(Ax + B)$. Sad su $y_p' = 2Ax + B$, $y_p'' = 2A$ i $y_p''' = 0$, pa stavljajući sve ovo u polaznu jednačinu imamo

$$4Ax + 2B = x - 1 \ .$$

Izjednačavajući odgovarajuće koeficijente dobijamo $A = \frac{1}{4}$ i $B = -\frac{1}{2}$, te je partikularno rješenje dato sa $y_p(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$. Konačno rješenje je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 + C_2 \cos\sqrt{2}x + C_3 \sin\sqrt{2}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x \ .$$

3. Neka je $f(x) = P_k(x)e^{\alpha x}$.

   Ukoliko α nije rješenje karakteristične jednačine, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = Q_k(x)e^{\alpha x} \ .$$

   Ukoliko α jeste rješenje karakteristične jednačine i to višestrukosti m, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = x^m Q_k(x)e^{\alpha x} \ .$$

Primjer 26 : Riješiti jednačinu: $y'' - 2y' + y = xe^{-x}$.

Rješenje. Karakteristična jednačina je $r^2 - 2r + 1 = 0$ i njeno rješenje je $r_1 = 1$ $(m_1 = 2)$. Rješenje homogene jednačine je $y_h(x) = e^x(C_1 + C_2x)$.

Kako $\alpha = -1$ nije korijen karakteristične jednačine, partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p(x) = (Ax + B)e^{-x}$. Sad su $y_p' = (-Ax + A - B)e^{-x}$ i $y_p'' = (Ax - 2A + B)e^{-x}$, pa stavljajući sve ovo u polaznu jednačinu imamo

$$(4Ax - 4A + 4B)e^{-x} = xe^{-x} \ .$$

Izjednačavajući odgovarajuće koeficijente dobijamo sistem $4A = 1$ i $-4A + 4B = 0$. Njegovo rješenje je $A = \dfrac{1}{4}, B = \dfrac{1}{4}$, a partikularno rješenje je tada $y_p(x) = \frac{1}{4}e^{-x}(x + 1)$. Opšte rješenje polazne diferencijalne jednačine je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^x(C_1 + C_2x) + \frac{1}{4}e^{-x}(x + 1) \ .$$

Primjer 27 : Riješiti jednačinu: $y'' - 2y' + y = xe^{x}$.

Rješenje. Karakteristična jednačina je $r^2 - 2r + 1 = 0$ i njeno rješenje je $r_1 = 1$ $(m_1 = 2)$. Rješenje homogene jednačine je $y_h(x) = e^x(C_1 + C_2x)$.

Kako $\alpha = 1$ korijen karakteristične jednačine i to višestrukosti dva, partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p(x) = x^2(Ax + B)e^{-x}$. Sad su $y_p' = [B(2 + x) + Ax(3 + x)]xe^{-x}$ i $y_p'' = ((2 + 4x + x^2)B + Ax(6 + 6x + x^2))e^{-x}$, pa stavljajući sve ovo u polaznu jednačinu imamo

$$(6Ax + 2B)e^x = xe^x \ .$$

Izjednačavajući odgovarajuće koeficijente dobijamo $6A = 1$ i $2B = 0$, tojest $A = \dfrac{1}{6}, B = 0$, te je partikularno rješenje $y_p(x) = \frac{1}{6}x^3e^x$. Konačno rješenje je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^x(C_1 + C_2x) + \frac{1}{6}x^3e^x \ .$$

4. Neka je $f(x) = e^{\alpha x}(a\sin\beta x + b\cos\beta x)$.

   Ukoliko ne postoji rješenje karakteristične jednačine oblika $r = \alpha \pm i\beta$, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(A\sin\beta x + B\cos\beta x) \ ,$$

   gdje su $A, B \in \mathbb{R}$ koeficijenti koje treba odrediti.

Ako postoji rješenje karakteristične jednačine oblika $r = \alpha \pm i\beta$, višestrukosti m, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = x^m e^{\alpha x}(A \sin \beta x + B \cos \beta x) \ .$$

PRIMJER 28 : Riješiti jednačinu: $y'' - y = e^x(\sin x + 2\cos x)$.

Rješenje. Karakteristična jednačina je $r^2 - 1 = 0$ i njena rješenje su $r_1 = 1$ $(m_1 = 1)$ i $r_2 = -1$ $(m_2 = 1)$ Rješenje homogene jednačine je $y_h(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}$.

Kako $1 + i$ nije korijen karakteristične jednačine, partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p(x) = e^x(A \sin x + B \cos x)$. Sad su $y_p' = e^x[(A-B)\sin x + (A+B)\cos x]$ i $y_p'' = e^x(-2B \sin x + +2A \sin x)$, pa stavljajući sve ovo u polaznu jednačinu imamo

$$e^x((-A - 2B)\sin x + (2A - B)\cos x) = e^x(\sin x + 2\cos x) \ .$$

Izjednačavajući odgovarajuće koeficijente dobijamo sistem

$$\begin{aligned} -A - 2B &= 1 \\ 2A - B &= 2, \end{aligned}$$

čije rješenje je $A = \dfrac{3}{5}$, $B = -\dfrac{4}{5}$. Dakle, partikularno rješeneje je $y_p(x) = e^x(\frac{3}{5}\sin x - \frac{4}{5}\cos x)$. Konačno rješenje je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}) + e^x\left(\frac{3}{5}\sin x - \frac{4}{5}\cos x\right) \ .$$

PRIMJER 29 : Riješiti jednačinu: $y'' - 2y' + 2y = e^x(\sin x + 2\cos x)$.

Karakteristična jednačina je $r^2 - 2r + 2 = 0$ i njena rješenje su $r_{1/2} = 1 \pm i$ $(m_1 = 1)$. Rješenje homogene jednačine je $y_h(x) = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

Kako je $1+i$ korijen karakteristične jednačine višestrukosti jedan, partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p(x) = xe^x(A \sin x + B \cos x)$. Sad su $y_p' = e^x[(Ax - Bx + A)\sin x + (Ax + Bx + B)\cos x]$ i $y_p'' = e^x[(2Ax + 2A + 2B)\sin x + (-2Bx + 2A - 2B)\cos x]$, pa stavljajući sve ovo u polaznu jednačinu imamo

$$e^x(-2B \sin x + 2A \cos x) = e^x(\sin x + 2\cos x) \ .$$

Izjednačavajući odgovarajuće koeficijente dobijamo $-2B = 1$ i $2A = 2$, to jest $A = 1, B = -\dfrac{1}{2}$ i partikularno rješenje je $y_p(x) = xe^x(\sin x - \frac{1}{2}\cos x)$. Konačno rješenje je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + xe^x\left(\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right) \ .$$

5. Neka je $f(x) = P_k(x)e^{\alpha x}(a \sin \beta x + b \cos \beta x)$.

   Ukoliko ne postoji rješenje karakteristične jednačine oblika $r = \alpha \pm i\beta$, partikularno rješenje tražimo u obliku

   $$y_p(x) = e^{\alpha x}(Q_k^1(x)\sin \beta x + Q_k^2(x)\cos \beta x) \ ,$$

   gdje su Q_k^1 i Q_k^2 polinomi istog stepena kao polinom P_k, čije koeficijente treba odrediti.

   Ako postoji rješenje karakteristične jednačine oblika $r = \alpha \pm i\beta$, višestrukosti m, partikularno rješenje tražimo u obliku

   $$y_p(x) = x^m e^{\alpha x}(Q_k^1(x)\sin \beta x + Q_k^2(x)\cos \beta x) \ .$$

Sa ovim smo iscrpili mogućnosti primjene metode jednakih koeficijenata za nalaženje partikularnog rješenja nehomogene jednačine višeg reda sa konstantnim koeficijentima. Spmenimo još samo jednu situaciju. Naime, ukoliko je funkcija na desnoj strani jednačine zbir više funkcija koje su nekog oblika od gore spomenutih,

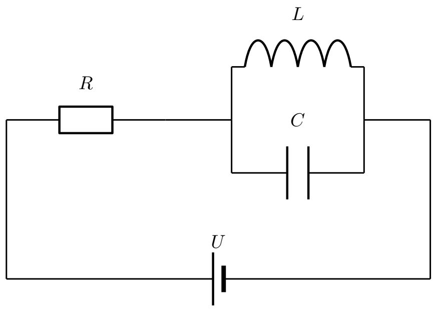
$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_l(x) \ , \tag{1.34}$$

tada se služimo sljedećim rasuđivanjem:
Neka je $y_{p_1}(x)$ partikularno rješenje kada bi desna strana bila samo funkcija f_1, $y_{p_2}(x)$ partikularno rješenje ako je desna strana samo funkcija f_2 i tako za svaku funkciju koja je sabirak na desnoj strani. Tada partikularno rješenje nehomogene jednačine čija desna strana ima oblik (1.34), tražimo u obliku

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_l}(x) \ .$$

1.3 Jedna primjena

Neka je zadato RLC kolo kao na slici 1.9 i neka su poznate veličine $R(t), L(t), C(t)$ i $U(t)$, sve u opštem slučaju zavisne o vremenskoj promjenljivoj t. Neka treba izračunati napon u_R na otporniku $R(t)$.



Slika 1.9: RLC kolo

Kako su u opštem slučaju sve veličine (struje (i), naponi (u) i dr.) vremenski ovisne, jednostavnosti radi izostavljaćemo zapise varijable (npr. $i = i(t)$). Jednačine kola su

$$i_R = i_L + i_C \tag{1.35}$$

$$u_R = i_R R \tag{1.36}$$

$$i_C = C u'_C \tag{1.37}$$

$$u_L = L i'_L \tag{1.38}$$

$$u_L = u_C \tag{1.39}$$

$$u_L + u_R = U \tag{1.40}$$

Iz jednačine (1.35), nalaženjem izvoda, imamo

$$i'_R = i'_L + i'_C \ .$$

Koristeći jednakosti (1.38), (1.36) i (1.37), izražavanjem veličine struje iz njih, gornja jednakost postaje

$$\left(\frac{u_R}{R}\right)' = \frac{u_L}{L} + (C u'_C)' \ .$$

Napone u_L i u_C možemo izraziti preko jednačina (1.39) i (1.40), pa posljednja jednakost postaje

$$\left(\frac{u_R}{R}\right)' = \frac{U - u_R}{L} + (C(U - u_R)')' \ .$$

Nalaženjem odgovarajućih izvoda, dobijamo

$$\frac{u'_r R - u_R R'}{R^2} = \frac{U - u_R}{L} + C'(U' - u'_R) + C(U'' - u''_R) \ .$$

Sređivanjem posljednje jednačine po izvodima funkcije u_R, konačno dobijamo jednačinu

$$C u''_R + \left(\frac{1}{R} + C'\right) u'_R + \left(\frac{1}{L} - \frac{R'}{R^2}\right) u_R = \frac{U}{L} + C'U' + CU'' \ ,$$

koja predstavlja nehomogenu linearnu jednačinu drugog reda.

Ako pretpostavimo da su veličine otpora, induktivnosti i kapaciteta konstantne, a da je napon promjenljiv, npr. $U(t) = \sin t$, gornja diferencijalna jednačina postaje nehomogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

$$Cu_R'' + \frac{1}{R}u_R' + \frac{1}{L}u_R = \left(\frac{1}{L} - C\right)\sin t \ .$$

Karakteristična jednačina odgovarajuće homogene jednačine je

$$Cr^2 + \frac{1}{R}r + \frac{1}{L} = 0 \ ,$$

čija su rješenja

$$r_{1,2} = \frac{-\frac{1}{R} \pm \sqrt{\frac{1}{R^2} - \frac{4C}{L}}}{2C} \ .$$

Diskusiju sada vršimo po diskriminanti jednačine, to jest po izrazu $\dfrac{1}{R^2} - \dfrac{4C}{L}$.

Ako je $\dfrac{1}{R^2} - \dfrac{4C}{L} > 0$, rješenja su realna i različita, $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$, te je homogeno rješenje

$$y_h = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \ .$$

Ako je $\dfrac{1}{R^2} - \dfrac{4C}{L} = 0$, rješenja su realna i jednaka, $r_1 = r_2 = r = -\dfrac{1}{2RC} \in \mathbb{R}$, te je homogeno rješenje

$$y_h = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt} \ .$$

Ako je $\dfrac{1}{R^2} - \dfrac{4C}{L} < 0$, rješenja su konjugovano-kompleksni brojevi $\alpha \pm i\beta$, pa je homogeno rješenje

$$y_h = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) \ .$$

Primjetimo da rješenja karakteristične jednačine ne mogu biti konjugovano-kompleksni brojevi $\alpha \pm i\beta$, gdje je $\alpha = 0$. Ovo onda znači da u sva tri slučaja partikularno rješenje nehomogene jednačine bi tražili u obliku

$$y_p = A \cos t + B \sin t \ .$$

Očigledno je da odnosi veličina R, L i C (diskriminanta karakteristične jednačine) diktiraju oblik rješenja diferencijalne jednačine, a time i ponašanje napona na otporniku.