Sadržaj

Poglavlje

1 Numerički nizovi

1.1 Definicija i osnovni pojmovi

Termin "numerički", odnosi se na to da ćemo mi u ovom poglavlju posmatrati samo nizove brojeva. Konkretnije, posmatrat ćemo samo nizove ralnih brojeva, pa bi ovdje još precizniji termin bio "realni numerički nizovi".

Definicija 1.1.1. *Svako preslikavanje* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*, skupa prirodnih brojeva u skup realnih brojeva, nazivamo realnim nizom. Broj koji se ovim preslikava-njem dodjeljuje prirodnom broju* n *označavamo sa* $a(n)$*, ili češće sa* a_n *i nazivamo ga* n*-ti član niza. Pri tome broj* n *u oznaci* a_n *nazivamo indeksom člana niza. Ako je specificirana zavisnost* a_n *od* n*, onda se* a_n *naziva opštim članom niza.*
Za niz čiji su članovi $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ *koristit ćemo oznaku* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *ili kratkoće radi samo* (a_n)*.*

Na isti način možemo definisati nizove kompleksnih brojeva, nizove funkcija ili uopšteno nizove elemenata proizvoljnog skupa. U ovom dijelu mi ćemo se ograničiti na posmatranje samo realnih numeričkih nizova.

PRIMJER 1 : Niz

$$1, 2, 3, ..., n, n+1, ...$$

je niz prirodnih brojeva. Niz

$$1, 3, 5, ..., 2n+1, ...$$

je niz neparnih prirodnih brojeva, a

$$1, 4, 9, 16, 25, ...$$

je niz kvadrata prirodnih brojeva.

Niz je potpuno određen svojim opštim članom. Naprimjer, ako je opšti član niza dat sa $x_n = \frac{n}{n+1}$, niz je u potpunosti određen i njegovi članovi su $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ...$, ili ako želimo odrediti stoti član ovog niza, $x_{100} = \frac{100}{101}$.

Za određivanje niza nije neophodno da postoji formula kojom se ekspli-citno određuje opšti član x_n u zavisnosti od n. Naprimjer, ako je x_n n-ti po redu prost broj, niz (x_n) je korektno definisan, iako ne znamo formulu za određivanje n-tog člana tog niza. Isto tako možemo govoriti da je niz (a_n) zadat tako da je a_n n-ta cifra u decimalnom razvoju broja $\sqrt{2}$, mada formulu za n-tu cifru tog razvoja ne znamo eksplicitno.

Prosti brojevi do 101: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101

$\sqrt{2} = 1,414213562373095048801688724209698078569671875376948073176679737 99...$

Znati konačno mnogo prvih članova niza nije dovoljno za jednoznačno određi-vanje niza. Naprimjer, ako je dato prvih pet članova nekog niza

$$0, 7, 26, 63, 124,$$

pravilo po kome su konstruisani ovi članovi može ali i ne mora da važi za šesti, sedmi i dalje članove ovog niza.

Primjer 2 : Odgovoriti na pitanje koje se stalno pojavljuje u testovima inteligencije, "nastavite niz":

1. 0, 1, 0, 1, 0, ?
2. 3, 5, 7, ?
3. 1, 2, 3, 4, ?

Odgovor na postavljeno pitanje u sva tri slučaja može biti 10, a možda i bilo koji drugi broj! Naime, iako je "logičan" odgovor da je nastavak prvog niza broj 1, ako posmatramo niz sa opštim članom

$$x_n = \frac{5n^5}{24} - \frac{83n^4}{24} + \frac{521n^3}{24} - \frac{1525n^2}{24} + \frac{1021n}{12} - 40\ ,$$

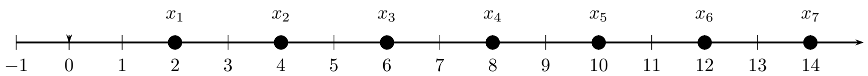
prvih pet njegovih članova je 0, 1, 0, 1, 0, a šesti je 10. Bez obzira koliko dugačak konačan niz brojeva imamo, može se naći pravilo da sljedeći član niza bude bilo koji broj.
U drugom zadatom nizu "logičan" odgovor je broj 9, ali ako posmatramo opšti član

$$x_n = \frac{n^3}{6} - n^2 + \frac{23n}{6}\ ,$$

opet ćemo primjetiti da su prva tri člana 3, 5 i 7, ali je četvrti opet 10.
Pokušati odrediti opšti član niza koji će imati prvih četiri člana kao u 3., a da peti bude 10.

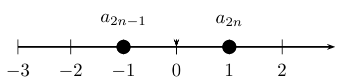
1.1.1 Predstavljanje nizova

Predstavljati nizove možemo na dva načina. Iz samog opisa niza kao liste brojeva dobijamo prvi način, predstavljajući članove niza na realnoj pravoj. Tako bi niz $(2, 4, 6, ..., 14)$, naznačavajući tačkama članove niza, bio predstavljen kao na slici



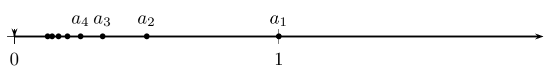
Slika 1.1: Predstavljanje niza na realnoj pravoj.

Predstavljati beskonačne nizove na ovaj način bio bi problem jer bi se često gubila predstava o nizu. Tako za niz $(-1, 1, -1, 1, ...)$ slikom bi bile predstavljene samo dvije tačke, a oznakama a_{2n} i a_{2n-1} bi sugerisali parne i neparne pozicije članova našeg niza.



Slika 1.2: Niz $a_n = (-1)^n$ predstavljen na realnoj pravoj.

Još teže bi bilo predstaviti niz $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$. Označili bi prvih nekoliko članova niza, a dalje članove bi smo samo naznačili tačkama.

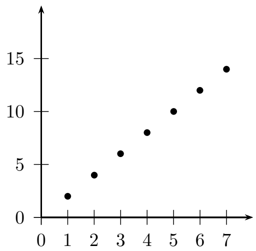


Slika 1.3: Nepraktičnost predstavljanja niza na realnoj pravoj.

Bolja, preglednija varijanta predstavljanja niza proizilazi iz činjenice da niz možemo shvatiti i kao preslikavanje (čak je i definisan tako). Ovdje pod preslikavanjem shvatamo činjenicu da članove niza numerišemo po njihovim pozicijama. Tako niz $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ možemo predstaviti tabelom

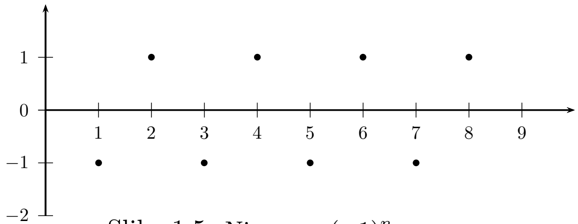
n	1	2	3	...	k	...
x_n	x_1	x_2	x_3	...	x_k	...

Ovo znači da niz možemo posmatrati kao preslikavanje $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, gdje dogovorno koristimo oznaku x_n, a ne uobičajenu oznaku za funkcije $x(n)$. Domen ovog preslikavanja je skup prirodnih brojeva i kad god je domen preslikavanja skup $\mathbb{N}$, takvo preslikavanje nazivamo niz. Sve ovo znači da sada možemo koristiti sve osobine funkcija, ali takođe i pojmove uvedene sa njima. Ovo prije svega znači da niz možemo predstaviti u obliku grafa. Tako bi niz $(2, 4, 6, ..., 14)$, predstavljen grafom izgledao kao na sljedećoj slici

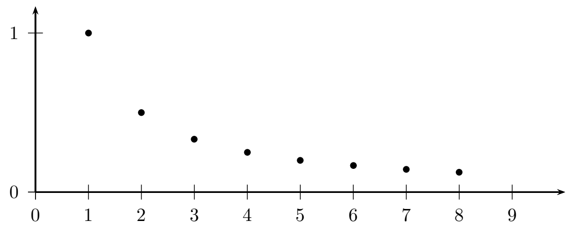


Slika 1.4: Grafički predstavljen niz sa opštim članom $x_n = 2n$.

Ovo je sada puno pogodniji način za predstavljanje beskonačnih nizova. Grafički predstavljen niz $(-1, 1, -1, 1, ...)$ dat je na slici 1.5, a niz $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ predstavljen je slikom 1.6.



Slika 1.5: Niz $x_n = (-1)^n$.



Slika 1.6: Niz $x_n = \frac{1}{n}$.

Primjetimo da sada nemamo potrebu za pisanjem članova niza. Jednostavnim čitanjem sa lijeva u desno imamo članove niza: prvi, drugi, treći itd.

1.1.2 Konvergencija nizova

U matematičkoj analizi proučava se ponašanje članova niza kada njihov indeks neograničeno raste, to jest kada indeks "teži u beskonačnost". Ova naizgled jednostavna problematika fundamentalna je za proučavanje osobina realnih i kompleksnih brojeva, skupova i funkcija, a samim tim i u konkretnim primjenama matematike.

Ideja je da se proučava "gomilanje" članova niza oko neke konkretne vrijednosti. Tako naprimjer, članovi nizova $\left(\frac{1}{n}\right)$ i $\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ "gomilaju se" oko nule, to jest sve su bliže nuli kako indeks n postaje veći, što možemo naslutiti ako izračunamo po nekoliko članova ovih nizova,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ... \qquad -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, ... \,.$$

Za članove niza čiji je opšti član dat sa $x_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$ ne bismo mogli tvrditi da su sve bliže nuli kada se n povećava jer je naprimjer

$$0 < x_{2n-1} = \frac{1}{2n-1} < \frac{3}{2n} = x_{2n} \ ,$$

iz čega vidimo da je x_{2n} na većoj udaljenosti od nule nego njemu prethodeći član. Međutim, i ovde se može uočiti neko gomilanje oko nule, što se vidi ako se izračuna nekoliko prvih članova niza, $1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$. Naime, ako izaberemo proizvoljno malen broj $\varepsilon > 0$, svi članovi niza će biti manji od ε, samo ako posmatramo dovoljno "daleke" članove u datom nizu. Zaista, nije teško vidjeti da za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x_n = \frac{2+(-1)^n}{n} \leq \frac{3}{n} \ ,$$

pa je dovoljno posmatrati članove niza čiji je indeks $n > \frac{3}{\varepsilon}$, da bi bilo zadovoljeno $x_n < \varepsilon$.
Primjetimo da smo u gornjem primjeru pokazali da za proizvoljno $\varepsilon > 0$ svi članovi niza, počevši od nekog indeksa n_0, zadovoljavaju nejednakost $x_n < \varepsilon$, to jest oni se gomilaju oko tačke 0. Ovo je globalna ideja kojom se uvodi pojam konvergencije.

Definicija 1.1.2. *Kažemo da je realan broj a granična vrijednost ili limes niza (x_n) ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji prirodan broj n_0, takav da za svaki prirodan broj $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \varepsilon$, što jednostavnije izražavamo formalno-logičkim zapisom*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon) \ . \tag{1.1}$$

Gornju činjenicu zapisujemo sa

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \quad \textit{ili} \quad x_n \to a \ (n \to +\infty) \ .$$

Ako je $\lim_{n\to+\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, kažemo da niz (x_n) konvergira ka a ili da teži ka a, kada n teži u beskonačnost.

Dakle, numerički niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan ako i samo ako postoji $\lim_{n\to+\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$. Kasnije ćemo vidjeti da je moguće utvrditi da je niz konvergentan, a da pri tome ne znamo njegovu graničnu vrijednost. Za sada jedini način da odredimo graničnu vrijednost nekog niza je da pretpostavimo (izračunavanjem prvih nekoliko članova niza) da je $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, za neko a, a zatim da to dokažemo provjeravajući uslov iz Definicije 1.1.2.

PRIMJER 3 : U primjeru ispred Definicije 1.1.2 smo pokazali da je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2+(-1)^n}{n} = 0 \ .$$

Na sličan način se pokazuje da je $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ ili $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Pokažimo prvu relaciju.
Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Nejednakost $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ekvivalentna je sa $n > \frac{1}{\varepsilon}$, pa ako stavimo da je

$$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \ ,$$

(funkcija $[x]$, čita se "antije od x", predstavlja cijeli dio od x), uslov iz Definicije 1.1.2 bit će zadovoljen za svako $n \in \mathbb{N}$ koji zadovoljava uslov $n \geq n_0$, to jest važit će $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$. Ovaj niz i njegovu graničnu vrijednost ističemo kao bitne za dalje razmatranje.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0}$$

Postoji više ekvivalentnih oblika uslova (1.1). Tako možemo pisati

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ |x_n - a| < \varepsilon\ ,$$

gdje u dijelu "$(\forall n \geq n_0)$" podrazumijevamo da je $n \in \mathbb{N}$. Takođe, znak "$<$" u (1.1) možemo zamijeniti sa znakom "$\leq$", a znak "$\geq$" znakom "$>$". Osim toga, umjesto "$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)$" možemo pisati "$(\exists y_0 \in \mathbb{R})(\forall n \geq y_0)$". Ovu posljednju zamjenu naročito dobro možemo koristiti da bi izbjegli korištenje funkcije "$[\cdot]$" ("antije").

Primjer 4 : Neka je $x_n = 2^{\frac{1}{n}}$. Posmatramo li nekoliko prvih članova ovog niza

$$x_1 = 2^1 = 2\ ,\ x_2 = 2^{\frac{1}{2}} = 1,41...\ ,\ x_3 = 2^{\frac{1}{3}} = 1,26...\ ,$$

$$x_4 = 2^{\frac{1}{4}} = 1,19...\ ,\ ...\ , x_{10} = 2^{\frac{1}{10}} = 1,07...\ ,$$

vidimo da se vrijednosti umanjuju i da se "kreću" ka 1, to jest "osjećamo" da je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$. Ali ovakvo razmišljanje ni u kom slučaju ne predstavlja dokaz ove tvrdnje. Da bi to dokazali razmišljajmo ovako:
kako je $x_n = 2^{\frac{1}{n}} > 1$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada je nejednakost $|2^{\frac{1}{n}} - 1| < \varepsilon$ ekvivalentna sa $2^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$, što nakon logaritmovanja daje ekvivalentno $n > \frac{\log 2}{\log(1+\varepsilon)}$. Ovo onda znači da za svako $\varepsilon > 0$, postoji $y_0 = \frac{\log 2}{\log(1+\varepsilon)}$, takav da je za svaki prirodan broj n, za koga vrijedi $n \geq y_0$, zadovoljena nejednakost $|x_n - 1| < \varepsilon$. Prema Definiciji 1.1.2 imamo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Na sličan način se pokazuje sljedeći važan limes

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1\quad ,\quad (a > 0).}$$

Šta više, vrijedi

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1\ .}$$

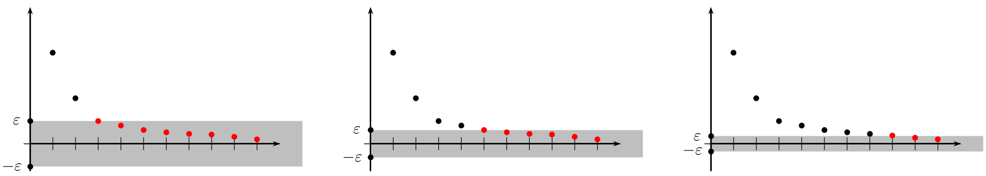
Konvergenciju niza možemo mnogo bolje razumijeti ako se poslužimo pojmom okoline tačke.

Definicija 1.1.3. *Okolina tačke $a \in \mathbb{R}$ je proizvoljan otvoren interval koji sadrži tačku a.*
Otvoreni interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ dužine 2ε sa centrom u tački $a \in \mathbb{R}$, naziva se simetrična ε-okolina tačke a ili samo ε-okolina tačke a.

Definicija 1.1.4. *Kažemo da skoro svi članovi niza imaju neku osobinu P ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svako $n \geq n_0$, x_n ima osobinu P.*

Drugačije rečeno, skoro svi članovi niza imaju osobinu P ako je imaju svi članovi niza počev od nekog indeksa ili što je isto kao da kažemo da tu osobinu imaju svi članovi niza osim njih konačno mnogo.
Nejednakost $|x_n - a| < \varepsilon$, koristeći poznati stav za apsolutnu vrijednost, možemo zapisati i kao $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, što je opet ekvivalentno sa tim da $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Koristeći sve rečeno, Definiciju 1.1.2 možemo iskazati ekvivalentno u sljedećem obliku.

Definicija 1.1.5. *Kažemo da niz (x_n) konvergira ka tački $a \in \mathbb{R}$ ako se u svakoj ε-okolini tačke a nalaze skoro svi članovi niza.*



Slika 1.7: Izvan ε-okoline nalazi se konačno mnogo članova niza.

Ako se skoro svi članovi niza nalaze u nekoj ε_0-okolini tačke a, onda to isto važi i za svaku ε-okolinu, gdje je $\varepsilon > \varepsilon_0$. Iz ovoga je jasno da je uslov Definicije 1.1.2 ili njoj ekvivalentne Definicije 1.1.5, dovoljno pokazati za malo ε, odnosno za $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, gdje je ε_0 proizvoljan pozitivan broj.

PRIMJER 5 : Niz čiji je opšti član $x_n = (-1)^n$ nije konvergentan. Zaista, pretpostavimo suprotno, to jest da je za neko $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. Kako su svi članovi datog niza jednaki ili 1 ili -1, to znači da se oba ta broja moraju nalaziti u proizvoljnoj ε-okolini tačke a. Međutim, to očigledno nije moguće jer izaberemo li $\varepsilon < \frac{1}{2}$ tada nije moguće da oba broja i 1 i -1 budu u intervalu $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, čija je dužina manja od 1.

1.2 Osobine konvergentnih nizova

Pored pitanja o egzistenciji granične vrijednosti niza, drugo najvažnije pitanje je njena jedinstvenost. To iskazujemo sljedećim tvrđenjem.

Teorem 1.2.1

Ako niz ima graničnu vrijednost onda je ona jedinstvena.

Dokaz : Pretpostavimo da vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \quad \text{i} \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = b \; .$$

Ako je $a \neq b$, onda postoji $\varepsilon > 0$ takvo da ε-okoline oko tačaka a i b budu disjunktne (dovoljno je uzeti da je $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$). Na osnovu Definicije 1.1.5 zaključujemo onda da su svi članovi niza (x_n), počev od nekog indeksa n_1, u ε-okolini broja a, ali isto tako bi morali svi članovi našeg niza, počev od nekog indeksa n_2, biti u ε-okolini tačke b. Ako posmatramo članove niza čiji su indeksi veći i od n_1 i od n_2, zaključili bi smo da se oni nalaze i u jednoj i u drugoj ε-okolini, što nije u saglasnosti sa disjunktnošću tih okolina. ■

Definicija 1.2.1. *Za niz (x_n) kažemo da je ograničen odozgo ako vrijedi:*

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) \; x_n \leq M \; .$$

Niz je ograničen odozdo ako vrijedi:

$$(\exists m \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) \; x_n \geq m \; .$$

Da je niz ograničen, shvatamo da je ograničen i odozgo i odozdo. Ipak, dajemo formalnu definiciju ograničenosti niza.

Definicija 1.2.2. *Za niz (x_n) kažemo da je ograničen ako je skup svih elemenata tog niza ograničen, tojest ako postoji realan broj $M \geq 0$ takav da je $|x_n| \leq M$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Ovo zapisujemo sa*

$$(\exists M \geq 0)(\forall n \in \mathbb{N})\ |x_n| \leq M\ .$$

Teorem 1.2.2

Svaki konvergentan niz je ograničen.

Dokaz : Neka je niz (x_n) konvergentan, to jest neka je $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, naprimjer neka je $\varepsilon = 1$. Na osnovu definicije konvergencije, svi članovi niza, počev od nekog indeksa n_0, pripadaju okolini $(a-1, a+1)$, odnosno van ove okoline se nalazi konačno mnogo članova niza. Neka je m_1 najmanja vrijednost i M_1 najveća vrijednost od tih konačno mnogo članova koji su van okoline. Označimo sa $m = \min\{a-1, m_1\}$ i $M = \max\{a+1, M_1\}$. Tada očigledno vrijedi

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ m \leq x_n \leq M\ ,$$

što predstavlja ograničenost niza. ■

Ograničenost niza je prema Teoremi 1.2.2, potreban uslov konvergencije. Da to nije i dovoljan uslov, pokazuje primjer niza $((-1)^n)$ koji jeste ograničen, ali kao što je ranije pokazano nije konvergentan.
U sljedećim teoremama pokazat ćemo vezu limesa i osnovnih algebarskih operacija. U mnogim dokazima koji slijede koristit ćemo se poznatom osobinom nejednakosti trougla, naime ako znamo da je $|a-b| < \varepsilon$ i $|b-c| < \varepsilon$, tada imamo

$$|a-c| = |a-b+b-c| \leq |a-b| + |b-c| < 2\varepsilon\ .$$

Teorem 1.2.3

Neka su dati nizovi (x_n) i (y_n).

1. Ako je $x_n = c \in \mathbb{R}$ za skoro svako $n \in \mathbb{N}$, tada je $\lim_{n\to+\infty} x_n = c$.
2. Neka je $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ i $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ i neka su a, b i c proizvoljni realni brojevi. Tada važi:
   (a) $\lim_{n\to+\infty}(ax_n + by_n) = ax + by$.
   (b) $\lim_{n\to+\infty}(x_n + c) = x + c$.
   (c) $\lim_{n\to+\infty}(x_n \cdot y_n) = x \cdot y$.
   (d) $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$, ako je $y \neq 0$ i $y_n \neq 0$, za $n \in \mathbb{N}$.
   (e) $\lim_{n\to+\infty}(x_n)^k = x^k$, za $k \in \mathbb{N}$.

Dokaz : Tvrđenje 1. je posljedica činjenice da se broj c nalazi u svakoj svojoj okolini.
2. Neka je $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ i $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Počevši od nekog indeksa n_1 svi članovi niza (x_n) su u ε-okolini tačke x. Isto tako, od nekog indeksa n_2 svi članovi niza (y_n) su u ε-okolini tačke y. Stavimo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Tada su za svako $n \geq n_0$ ispunjene obje nejednakosti

$$|x_n - x| < \varepsilon \ \text{ i } \ |y_n - y| < \varepsilon\ ,$$

pa iz nejednakosti trougla slijedi za $n \geq n_0$

$$|ax_n + by_n - (ax + by)| = |ax_n - ax + by_n - by| \leq |a||x_n - x| + |b||y_n - y| \leq (|a| + |b|)\varepsilon \ .$$

Kako je $|a| + |b|$ fiksan realan broj, a ε proizvoljan malen broj, to je i $(|a| + |b|)\varepsilon$ proizvoljno malen broj pa vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty}(ax_n + by_n) = ax + by \ .$$

Tvrđenje (b) u 2. je direktna posljedica tvrđenja 2.(a) i 1. uzimajući $y_n = c$ i stavljajući da je $a = b = 1$.
Dokažimo tvrđenje (c). Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Primjenom nejednakosti trougla imamo

$$|x_ny_n - xy| = |x_ny_n - xy_n + xy_n - xy| \leq |y_n||x_n - x| + |x||y_n - y| \ . \tag{1.2}$$

Na osnovu Teorema 1.2.2, postoji realan broj $M \geq 0$, takav da je $|y_n| \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Sada kao i u dokazu tvrđenja (a), postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za $n \geq n_0$, $|x_n - x| < \varepsilon$ i $|y_n - y| < \varepsilon$, pa iz (1.2) imamo

$$|x_ny_n - xy| \leq (M + |x|)\varepsilon$$

čime je tvrđenje dokazano.
Dokažimo i tvrdnju (d). Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$, gdje je $y \neq 0$. Ponovo primjenom nejednakosti trougla imamo

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| = \left|\frac{x_ny - y_nx}{y_ny}\right| &\leq \frac{|x_ny - xy| + |xy - y_nx|}{|y_n||y|} \\ &= \frac{|y||x_n - x| + |x||y_n - y|}{|y_n||y|} \ .\end{aligned} \tag{1.3}$$

Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji n_0, takvo da je $|x_n - x| < \varepsilon$ i $|y_n - y| < \varepsilon$ čim je $n \geq n_0$. Prema tome, brojilac posljednjeg razlomka je manji od $(|x| + |y|)\varepsilon$.
Kako je $y \neq 0$, postoji neko $\delta > 0$ takvo da interval $(-\delta, \delta)$ nema zajedničkih tačaka sa intervalom $(y - \delta, y + \delta)$ (npr. uzeti $\delta = \frac{|y|}{2}$). U intervalu $(y - \delta, y + \delta)$ nalaze se svi članovi niza (y_n) počevši od nekog indeksa n_1, pa je $|y_n| \geq \delta$ za $n \geq n_1$, pa je imenilac u posljednjem razlomku u (1.3) veći od $\delta|y|$.
Dakle, ako je $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ onda je

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| \leq \frac{|x| + |y|}{\delta|y|}\varepsilon \ ,$$

pri čemu δ ne zavisi od ε. Time je dokaz završen. (Tvrdnju pod (e) dokazati samostalno) ■

Ilustrujmo primjenu gornjeg tvrđenja na nekoliko primjera.

Primjer 6 : Izračunati: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3}$.
Kako je

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^3 \ ,$$

koristeći pravilo 2.(d) i poznati nam limes imamo

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3} = 0^3 = 0 \ .$$

PRIMJER 7 : Izračunati: $\lim_{n\to+\infty}\left(3\cdot 2^{\frac{1}{n}}+2\cdot 3^{\frac{1}{n}}\right)$.
Koristeći pravilo 2.(a) i ranije pokazani limes niza $(\sqrt[n]{a})$ imamo da je

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(3\cdot 2^{\frac{1}{n}}+2\cdot 3^{\frac{1}{n}}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\left(3\cdot 2^{\frac{1}{n}}\right)+\lim_{n\to+\infty}\left(2\cdot 3^{\frac{1}{n}}\right)\\ &= 3\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2}+2\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3}\\ &= 3\cdot 1+2\cdot 1=5\ .\end{aligned}$$

PRIMJER 8 : Izračunati: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+6\right)$.
Koristeći pravilo 2.(b) imamo

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+6\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to+\infty}6=0+6=6\ .$$

Među konvergentnim nizovima, posebnu ulogu imaju nizovi koji konvergiraju ka nuli.

Definicija 1.2.3. *Niz (x_n) za koga važi $\lim_{n\to+\infty}x_n=0$, nazivamo nula-niz.*

Zapravo, ispitivanje proizvoljnog konvergentnog niza se može svesti na ispiti-vanje nula-niza. O tome govori naredno tvrđenje.

Teorem 1.2.4

Niz (x_n) konvergira ka $a\in\mathbb{R}$ ako i samo ako niz (x_n-a) konvergira ka 0.

Dokaz : Neka je $\lim_{n\to+\infty}x_n=a$. Na osnovu Teorema 1.2.3 2.(b) je

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n-a)=\lim_{n\to+\infty}x_n-a=0\ .$$

Obratno, ako je $\lim_{n\to+\infty}(x_n-a)=0$, tada je

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}(x_n-a+a)=\lim_{n\to+\infty}(x_n-a)+a=a\ .\clubsuit$$

■

PRIMJER 9 : Za niz sa opštim članom $x_n=\frac{n}{n-1}$ je $\lim_{n\to+\infty}x_n=1$. Dakle, niz $(x_n-1)_{n\in\mathbb{N}}$ je nula niz.
Zaista, $\frac{n}{n-1}-1=\frac{1}{n-1}$, te je $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n-1}=0$.

Teorem 1.2.5

Zbir, razlika i proizvod dva nula-niza je ponovo nula-niz.

Dokaz ove jednostavne činjenice ostavljen je čitaocu za vježbu, ali primjetimo da kod proizvoda dva niza uslove možemo oslabiti.

Teorem 1.2.6

Neka je (x_n) proizvoljan nula-niz i neka je (y_n) proizvoljan ograničen niz (ne obavezno konvergentan). Tada je niz (z_n), gdje je $z_n = x_n \cdot y_n$ $(n \in \mathbb{N})$, nula-niz.

Dokaz : Kako je niz (y_n) ograničen, to postoji realan broj $M > 0$ takav da je za svako $n \in \mathbb{N}$, $|y_n| \leq M$. Iz konvergencije niza (x_n) ka nuli slijedi da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da je za sve $n \geq n_0$ zadovoljeno $|x_n| < \varepsilon$. Na osnovu svega ovoga zaključujemo da će za $n \geq n_0$ vrijediti

$$|z_n| = |x_n \cdot y_n| = |x_n||y_n| < M\varepsilon \ ,$$

a što znači da niz (z_n) konvergira ka nuli. ■

PRIMJER 10 : Izračunati: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos n}{n}$.

Označimo sa $z_n = \dfrac{\cos n}{n} = \dfrac{1}{n}\cos n$. Kako je niz sa opštim članom $x_n = \frac{1}{n}$ nula-niz, a niz sa opštim članom $y_n = \cos n$ je ograničen ($\cos x \leq 1$), to je na osnovu gornje teoreme niz (z_n) nula-niz, tojest vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n} = 0 \ .$$

Sljedećim tvrdnjama uspostavlja se veza između limesa i relacije poretka.

Teorem 1.2.7

Neka je (x_n) proizvoljan niz.

1. Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x > p$ $(< p)$, tada je $x_n > p$ $(< p)$ za skoro svako $n \in \mathbb{N}$.

2. Ako je niz (x_n) converegentan i ako je $x_n > p$ $(< p)$, za skoro svako $n \in \mathbb{N}$, onda je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \geq p$ $(\leq p)$.

Dokaz :

1. Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ i neka je $a > p$. Stavimo li da je $\varepsilon = \frac{a-p}{2}$, svi brojevi koji pripadaju intervalu $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ su veći od p, ali skoro svi članovi niza (x_n) su u toj ε-okolini i time je tvrđenje dokazano. Slučaj kada je $a < p$ dokazuje se analogno.

2. Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ i neka je $x_n > p$ za skoro svako n. Ako bi bilo $a < p$, to bi na osnovu dokazanog pod 1) značilo da je $x_n < p$ za skoro svako n, što je očigledna kontradikcija. Dakle mora biti $a \geq p$. ♣

■

Prethodni teorem najčešće ćemo koristiti za slučaj $p = 0$. Naime, ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ pozitivan (negativan) broj, tada su skoro svi članovi niza pozitivni (negativni). Ako su skoro svi članovi niza pozitivni (negativni), tada je granična vrijednost niza nenegativna (nepozitivna).

PRIMJER 11 : Posmatrajmo niz $(\frac{1}{n})$. Svi članovi niza su pozitivni, $\frac{1}{n} > 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$, ali $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Ovim se potvrđuje slijedeće, ako je $x_n > p$ za skoro svako n onda je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \geq p$, to jest prelaskom na granični proces znak stroge nejednakosti se "slabi" na znak "$\geq$".

Kao posljedicu gornje teoreme imamo

Posljedica 1.2.8. *Ako svi članovi konvergentnog niza (x_n) pripadaju segmentu $[a,b]$, tada i $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \in [a,b]$.*

1.3 Beskonačne granične vrijednosti

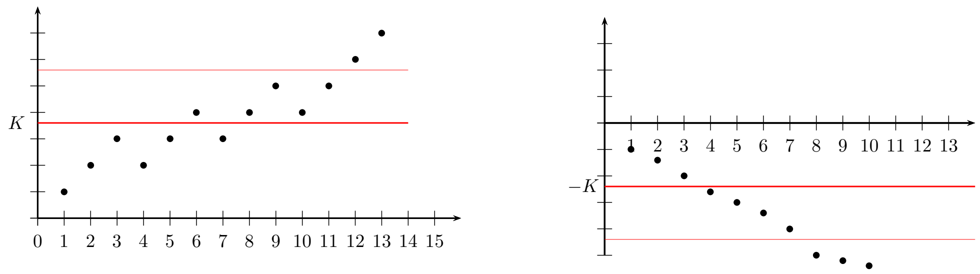
Definicija 1.3.1. *Kažemo da niz* (x_n) *divergira ka plus beskonačnosti, u oznaci* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$*, ako vrijedi*

$$(\forall K > 0)(\exists n_0(K) \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) x_n > K \ .$$

Kažemo da niz (x_n) *divergira ka minus beskonačnosti, u oznaci* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$*, ako vrijedi*

$$(\forall K > 0)(\exists n_0(K) \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) x_n < -K \ .$$

U oba slučaja kažemo da niz određeno divergira.



Slika 1.8: Određeno divergentni nizovi.

Definicija 1.3.1 postaje analogna Definiciji 1.1.2 ako se uvede pojam okoline beskonačnosti. Pod okolinom od $+\infty$ podrazumijevamo proizvoljan interval $(K, +\infty)$ i analogno pod okolinom od $-\infty$ podrazumijevamo proizvoljan interval $(-\infty, -K)$, za neko $K \in \mathbb{R}^+$.
Na osnovu ovoga možemo reći da niz određeno divergira ka $+\infty$ ako su skoro svi članovi niza u proizvoljnoj okolini od $+\infty$.
Sada možemo izvršiti selekciju svih nizova u odnosu na konvergenciju. Svaki realni niz spada u jednu od klasa:

- Niz je konvergentan (granična vrijednost mu je neki realan broj).
- Niz je određeno divergentan (granična vrijednost mu je ili $+\infty$ ili $-\infty$).
- Niz je neodređeno divergentan (nema ni konačnu ni beskonačnu graničnu vrijednost).

PRIMJER 12 : Posmatrajmo geometrijski niz $x_n = q^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Za koje $q \in \mathbb{R}$ je dati niz konvergentan?
Ako je $q = 1$ tada je naš niz konstantan ($x_n = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$), pa mu je i granična vrijednost jednaka 1. Dakle, niz je u ovom slučaju konvergentan.
Za $q = -1$ dobijamo niz sa opštim članom $x_n = (-1)^n$, za koga je već ranije pokazano da nema graničnu vrijednost, to jest niz je neodređeno divergentan.
Neka je $|q| < 1$. Sada, da bi za proizvoljno $\varepsilon > 0$ bilo $|q^n - 0| < \varepsilon$, mora biti

$$|q|^n < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ n \log|q| < \log\varepsilon \ \Leftrightarrow \ n > \frac{\log\varepsilon}{\log|q|}$$

(u posljednjo ekvivalenciji je došlo do obrtanja znaka nejednakosti jer je $\log|q| < 0$). Dakle, za proizvoljan $\varepsilon > 0$, ako važi $n > \frac{\log\varepsilon}{\log|q|}$ ($y_0 = \frac{\log\varepsilon}{\log|q|}$), onda je $|q^n| < \varepsilon$, pa je $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$. Niz je konvergentan.
Ako je $q > 1$, čim je $n > \frac{\log K}{\log q}$, onda je $q^n > K$, za proizvoljno K, pa je $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, to jest niz je određeno divergentan.
Za $q < -1$, članovi niza sa parnim stepenom su pozitivni, a sa neparnim stepenom su negativni. Ali svi članovi po apsolutnoj vrijednosti rastu u beskonačnost. Dakle niz je

neodređeno divergentan.

Sljedeći teorem je na određen način proširenje Teorema 1.2.3.

Teorem 1.3.1

Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$ i neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$. Tada vrijedi:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n + y_n) = +\infty$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n \cdot y_n) = sgnx \cdot \infty \ (x \neq 0)$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 0$.
4. Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ i ako su skoro svi članovi niza (x_n) pozitivni, tada je $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x_n} = +\infty$.

U Teoremu 1.2.3 smo govorili o konvergentnim nizovima. Gornji teorem je proširenje u tom smislu što možemo direktno računati limese kombinacije dva niza i ako je jedan od nizova određeno divergentan. Postoje kombinacije dva niza kada se rezultat ne može direktno odrediti kao u slučajevima opisanim u ovim teoremama. Tada kažemo da je granična vrijednost neodređena ili da je neodređenog tipa. To međutim ni u kom slučaju ne znači da granična vrijednost ne postoji, već samo da se ne može unaprijed odrediti primjenom pravila datih u ovim teoremama.

Primjer 13 : Za niz sa opštim članom $x_n = \dfrac{n^2+3n-2}{2n^2+5n+4}$ imamo neodređenost tipa $\frac{\infty}{\infty}$ jer i brojilac i imenilac divergiraju ka $+\infty$, kada n teži u beskonačnost. Dijeljenjem i brojioca i imenioca sa n^2 vrijednost razlomka se neće promjeniti, pa je

$$x_n = \frac{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}{2+\frac{5}{n}+\frac{4}{n}}\ .$$

Primjenom pravila Teorema 1.2.3 dobijamo da je

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}\ .$$

Primjer 14 : Izračunati: $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

Ako bi smo limesom "prošli" kroz malu zagradu i pokušali primjeniti Teorem 1.2.3 ili Teorem 1.3.1, dobili bi izraz oblika $\infty - \infty$ za koga nemamo odluku čemu je jednak. Zato se poslužimo racionalizacijom izraza pod limesom, a tek onda primjenimo Teorem 1.3.1.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) &= \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0\ .\end{aligned}$$

Postoji sedam tipova neodređenosti, a to su:

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}\ ,\ \frac{0}{0}\ ,\ 0\cdot\infty\ ,\ \infty-\infty\ ,\ 1^{\infty}\ ,\ \infty^0\ ,\ 0^0\ .}$$

1.4 Monotoni nizovi

Definicija 1.4.1. *Za niz (x_n) kažemo da je*

- *strogo monotono rastući ako za skoro sve članove niza vrijedi $x_{n+1} > x_n$.*
- *monotono rastući (neopadajući) ako za skoro sve članove niza vrijedi $x_{n+1} \geq x_n$.*
- *strogo monotono opadajući ako za skoro sve članove niza vrijedi $x_{n+1} < x_n$.*
- *monotono opadajući (nerastući) ako za skoro sve članove niza vrijedi $x_{n+1} \leq x_n$.*

Za niz koji posjeduje bilo koju od navedenih osobina kažemo da je monoton niz.

Najčešće tehnike ispitivanja monotonosti su posmatranje količnika ili razlike dva uzastopna člana niza. Tako naprimjer, ako je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan i ako su skoro svi članovi niza pozitivni, imamo

$$x_{n+1} - x_n \begin{cases} > 0 & \Rightarrow \text{ niz je strogo monotono rastući} \\ \geq 0 & \Rightarrow \text{ niz je neopadajući} \\ < 0 & \Rightarrow \text{ niz je strogo monotono opadajući} \\ \leq 0 & \Rightarrow \text{ niz je nerastući} \end{cases} .$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \begin{cases} > 1 & \Rightarrow \text{ niz je strogo monotono rastući} \\ \geq 1 & \Rightarrow \text{ niz je neopadajući} \\ < 1 & \Rightarrow \text{ niz je strogo monotono opadajući} \\ \leq 1 & \Rightarrow \text{ niz je nerastući} \end{cases} .$$

Primjetimo da će rezoni biti drugačiji ako posmatramo nizove čiji su skoro svi članovi negativni (smjerove svih nejednakosti treba obrnuti).

PRIMJER 15 : Niz $x_n = \frac{1}{n}$ je strogo monotono opadajući jer za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0 .$$

PRIMJER 16 : Niz $x_n = \frac{n}{n+1}$ je strogo monotono rastući jer je za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = 1 + \frac{1}{n^2+2n} > 1 .$$

PRIMJER 17 : Neka je opšti član niza dat sa $x_n = \frac{n}{1-2n}$. Primjetimo da je za svako $n \in \mathbb{N}$ $x_n < 0$, to jest radimo sa nizom čiju su svi članovi negativni. Ako posmatramo količnik dva uzastopna člana,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{n+1}{1-2(n+1)}}{\frac{n}{1-2n}} = \frac{-2n^2-n+1}{-2n^2-n} = 1 - \frac{1}{2n^2+n} < 1 ,$$

kao što smo napomenuli, zaključak iz ove informacije je da niz strogo monotono raste.

Za monotone nizove imamo veoma jednostavne kriterijume konvergencije koje dajemo sljedećim teoremama.

Teorem 1.4.1

Svaki monoton niz je ili konvergentan ili određeno divergentan (ima konačnu ili beskonačnu graničnu vrijednost).

Primjetimo odma da obrat u gornjem teoremu ne mora da vrijedi. Naime, niz može biti konvergentan, ali ne mora biti monoton. Dovoljno je posmatrati niz sa opštim članom $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, koji je nula-niz, ali nije monoton jer mu članovi "skaču" oko nule (parni su pozitivni, a neparni su negativni).

Teorem 1.4.2

Svaki monoton i ograničen niz je konvergentan.

U ovom teoremu treba razlikovati dva slučaja:

1. Ako je niz monotono rastući, zahtijevamo ograničenost odozgo.
2. Ako je niz monotono opadajući, zahtijevamo da je niz ograničen odozdo.

Primjer 18 : Posmatrajmo niz $x_n = \dfrac{n}{a^n}$ $(a > 1)$.
Kako je za dovoljno veliko $n \in \mathbb{N}$, $n \cdot a \geq n + 1$, to je

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n \cdot a} < 1 \ ,$$

zaključujemo da je niz strogo monotono opadajući.
Za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ je $x_n = \frac{n}{a^n} > 0$, pa je dati niz ograničen odozdo.
Prema gornjem teoremu je dati niz konvergentan, tojest $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$. Pustimo li u izrazu

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{a^{n+1}} = \frac{n+1}{n \cdot a} x_n$$

da n teži u beskonačnost imali bismo da vrijedi $x_0 = \dfrac{x_0}{a}$, a zbog $a > 1$ ovo je moguće samo ako je $x_0 = 0$, pa je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{a^n} = 0 \quad , \quad a > 1 \ .$$

Primjer 19 : Pokažimo da je niz $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ rastući i ograničen odozgo.
Jednostavnim računom se ima

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+2}{n+1}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \ .$$

Na osnovu Bernoullijeve nejednakosti[a] je

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{(n+1)^2} \ , \ n \geq 2 \ ,$$

pa imamo

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{n+2}{n+1}\left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} > 1 \ .$$

Dakle niz je strogo monotono rastući.
Ako sada posmatramo i niz $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, zbog veze $y_n = x_n \cdot (1 + \frac{1}{n})$, očigledna je nejednakost $x_n \leq y_n$ za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$. Pokazati da je niz (y_n) strogo monotono opadajući, ostavljeno je čitaocu za vježbu. Iz ovoga onda zaključujemo da je bilo koji član niza (y_n) gornje ograničenje niza (x_n). Kako je niz (y_n) monotono opadajući, svi njegovi članovi su manji od prvog člana (svaki sljedeći je manji od prethodnog), pa možemo reći da je $x_n \leq y_1 = 4$ za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$.
Iz monotonosti i ograničenosti niza (x_n) zaključujemo njegovu konvergenciju.

Primjetimo da slično vrijedi i za niz (y_n). Naime, kako je niz (x_n) monotono rastući, svi njegovi članovi su veći od x_1. Tada za monotono opadajući niz (y_n) imamo da je $x_1 = 2 \leq y_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$ tojest, on je i ograničen odozdo te je i on konvergentan niz. Zbog veze $y_n = x_n \cdot (1 + \frac{1}{n})$ jasno je da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n \ .$$

[a](**Bernoullijeva nejednakost**) Neka je $n \in \mathbb{N}$ i x realan broj veći od -1. Tada vrijedi

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \ .$$

Graničnoj vrijednosti niza (x_n) iz gornjeg primjera dajemo posebno ime (po matematičaru Euleru[1]), a ističemo i njegovu važnost za računanje mnogih drugih limesa.

Definicija 1.4.2 (Eulerov broj)**.**

$$\boxed{e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ .}$$

Broj e je jedna od najvažnijih konstanti $e = 2.71828182845904523536028747135234678 23767326727267274728\ldots$

Niz sa opštim članom $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ je forme stepena čija osnova je $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ i koja teži ka 1 (kada $n \to \infty$), a eksponent je n koji teži ka $+\infty$ (kada $n \to \infty$). Time je granični proces niza (x_n) oblika 1^∞ koji je jedan od navedenih neodređenih oblika.

PRIMJER 20 : Izračunati $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^n$.

Razmatrajući osnovu i eksponent opšteg člana niza čiju graničnu vrijednost treba izračunati, vidimo da je limes oblika 1^∞. Ovakvi oblici se rješavaju pomoću definicije Eulerovog broja.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\left[\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \\
&= e^{\frac{1}{2}} \cdot 1 = \sqrt{e} \ .
\end{aligned}$$

1.5 Alati za izračunavanje limesa

Sada ćemo dati dva veoma korisna tvrđenja za izračunavanje limesa. U pravim rukama ona su zaista moćan alat.

Teorem 1.5.1: Teorem o lopovu i dva policajca

Neka su (x_n) i (y_n) nizovi za koje vrijedi

1. $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = A$.
2. Za skoro svako $n \in \mathbb{N}$ je $x_n \leq z_n \leq y_n$.

Tada i niz (z_n) ima graničnu vrijednost i važi $\lim_{n\to+\infty} z_n = A$.

[1]Leonhard Euler, 1707-1783 švicarski matematičar

Dokaz : Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = A$. Pretpostavimo prvo da je $A \in \mathbb{R}$. Tada za fiksno $\varepsilon > 0$, postoji $n_1 \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq n_1$, x_n pripada ε-okolini tačke A. Takođe postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da se svi članovi niza (y_n) počev od y_{n_2} pa na dalje, nalaze u istoj ε-okolini (jer oba niza konvergiraju ka istoj tački). Ako sada izaberemo da je $n' = \max\{n_1, n_2\}$, onda su članovi oba niza za $n \geq n'$ u okolini $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.
Kako je za skoro sve n zadovoljeno $x_n \leq z_n \leq y_n$, to postoji $n'' \in \mathbb{N}$, tako da je za sve $n \geq n''$ zadovoljeno $x_n \leq z_n \leq y_n$. Ako sada stavimo da je $n_0 = \max\{n', n''\}$, onda je za sve $n \geq n_0$ zadovoljeno

$$A - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < A + \varepsilon \ ,$$

ali ovo za niz (z_n) znači da su mu skoro svi članovi u okolini $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$, odnosno to znači $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = A$.
Ako je $A = +\infty$, potrebna nam je samo nejednakost $x_n \leq z_n$. Zaista, zbog $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, za svako K, postoji n_1, takav da je za $n \geq n_1$, $x_n > K$. Ako je $x_n \leq z_n$ za $n \geq n_2$, onda je za $n > \max\{n_1, n_2\}$ zadovoljeno $z_n \geq x_n > K$, a odavde slijedi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$.
Slučaj kada je $A = -\infty$ dokazuje se analogno i ostavljen je čitaocu za vježbu. ■

PRIMJER 21 : Ispitati konvergenciju niza $z_n = \dfrac{\ln(1+n)}{1+n^2}$.
Matematičkom indukcijom se pokazuje da vrijedi $\ln(1+n) < n$ (šta više, vrijedi $\log(1+x) < x$ za proizvoljan $x > 0$). Koristeći to imamo,

$$0 \leq \frac{\ln(1+n)}{1+n^2} \leq \frac{n}{1+n^2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \ .$$

Ako označimo sa $x_n = 0$, $y_n = \frac{1}{n}$, onda su uslovi gornje teoreme zadovoljeni, pa zaključujemo da je

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 0 = \lim_{n\to+\infty} z_n \ .$$

PRIMJER 22 : Izračunati: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$.
Kako važi

$$3^n \leq 2^n + 3^n \leq 3^n + 3^n = 2 \cdot 3^n \ ,$$

tada je

$$3 \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq 3\sqrt[n]{2} \ .$$

Ako označimo sa $x_n = 3$ i sa $y_n = 3\sqrt[n]{2}$, tada očigledno važi

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 3 \ ,$$

pa na osnovu teoreme o lopovu i dva policajca vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3 \ .$$

Druga od "alatki" je poznati Stolzov teorem i primjenjuje se kod izračunavanja limesa količnika, tojest kod izračunavanja limesa oblika $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$.

Teorem 1.5.2: Stolzov teorem

Neka su dati nizovi (x_n) i (y_n) i neka su zadovoljeni uslovi:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.

2. Niz (y_n) je monotono rastući, to jest $y_{n+1} \geq y_n$ za skoro svako n.
3. Postoji konačna ili beskonačna granična vrijednost $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

Tada postoji i $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ i važi jednakost

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$$

PRIMJER 23 : Izračunati: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{3^n}$.
Označimo sa $x_n = n$ i sa $y_n = 3^n$. Jasno je da vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$. osim toga je $3^{n+1} > 3^n$, to jest niz (y_n) je monotono rastući. Kako je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1-n}{3^{n+1}-3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\cdot 3^n} = 0\ ,$$

dakle zadovoljeni su uslovi Stolzove teoreme pa vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3^n} = 0\ .$$

PRIMJER 24 : Izračunati $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$.
Označimo sa $x_n = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ i $y_n = n^3$. Kako je $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1$, niz (y_n) je monotono rastući. Pri tome je $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$, te su zadovoljena prva dva uslova Stolzove teoreme.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2)-(1^2+2^2+\cdots+n^2)}{(n+1)^3-n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3-n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{3n^2+3n+1} = \frac{1}{3}\ .
\end{aligned}$$

Dakle, postoji $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ i onda je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3} = \frac{1}{3}\ .$$

1.6 Podnizovi

Ako iz niza (x_n) izdvojimo beskonačno mnogo članova u istom redoslijedu u kome se pojavljuju u datom nizu, dobijeni niz se naziva podnizom niza (x_n). Naprimjer, ako u nizu (x_n) posmatramo samo njegove parne članove, dobijamo podniz (x_{2k}) ili ako posmatramo svaki sedmi član imamo podniz (x_{7k}). Formalna definicija podniza je

Definicija 1.6.1. *Neka je dat niz (x_n) i neka je $n_1, n_2, ..., n_k, ...$ strogo monotono rastući niz prirodnih brojeva. Tada kažemo da je (x_{n_k}) podniz niza (x_n).*

Podniz (x_{n_k}) može se posmatrati kao niz sa indeksima $k = 1, 2, ...$ pa sve što je do sada rečeno za nizove važi i za podnizove. Neposredno iz definicije podniza slijedi

Teorem 1.6.1

Ako niz (x_n) ima graničnu vrijednost x_0, tada i bilo koji podniz (x_{n_k}) datog niza ima graničnu vrijednost x_0.

Obrat u gornjem tvrđenju ne vrijedi, to jest ako neki podniz (x_{n_k}) niza (x_n) ima graničnu vrijednost, sam niz ne mora imati graničnu vrijednost. Jednostavan primjer za to je niz $x_n = (-1)^n$. Njegovi podnizovi (x_{2k}) i (x_{2k-1}) su konstantni nizovi i kao takvi konvergentni dok sam niz, kao što je to pokazano ranije, nije konvergentan. U ovom dijelu ćemo se upravo baviti odnosom između konvergencije niza i konvergencije njegovih podnizova.

Definicija 1.6.2. *Za tačku $a \in \mathbb{R}^*$ kažemo da je tačka nagomilavanja niza (x_n) ako postoji podniz (x_{n_k}) datog niza koji konvergira ka tački a.*

Primjer 25 : Posmatrajmo niz sa opštim članom $x_n = \sin \frac{2n\pi}{3}$.
Posmatramo li članove niza sa indeksima $n = 3k$ $(k \in \mathbb{N})$, dobijamo podniz (x_{3k}) koji je konstantan niz $(x_{3k} = \sin \frac{6k\pi}{3} = \sin 2k\pi = 0)$ te kao takav i konvergentan ka 0.
Posmatramo li članove niza sa indeksima $n = 3k-1$, dobijamo podniz (x_{3k-1}) koji je konstantan niz $(x_{3k-1} = \sin \frac{2(3k-1)\pi}{3} = \sin\left(2k\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2})$ te kao takav i konvergentan ka $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Posmatramo li članove niza sa indeksima $n = 3k-2$, dobijamo podniz (x_{3k-2}) koji je konstantan niz $(x_{3k-2} = \sin \frac{2(3k-2)\pi}{3} = \sin\left(2k\pi - \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2})$ te kao takav i konvergentan ka $\frac{1}{2}$.

Dakle, tačke 0, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\frac{1}{2}$ su tačke nagomilavanja niza (x_n).

Tačku nagomilavanja možemo definisati i na sljedeći način.

Definicija 1.6.3. *Tačka $a \in \mathbb{R}^*$ je tačka nagomilavanja niza (x_n) ako vrijedi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m > n)\ |x_m - a| < \varepsilon\ .$$

Iz ove druge definicije vidimo i razliku između pojma limesa i pojma tačke nagomila-vanja. Naime, limes niza ima osobinu da se u svakoj njegovoj okolini nalaze skoro svi članovi niza (van te okoline nalazi se samo konačno mnogo članova niza), dok se u proizvoljnoj okolini tačke nagomilavanja niza nalazi "samo" beskonačno mnogo članova niza (pa ih i van te okoline može biti beskonačno mnogo). Naravno, limes niza, ako postoji, uvijek je njegova tačka nagomilavanja (i to jedina), dok obrat ne mora da važi.
Napomenimo ovde još jednu važnu razliku između pojma tačke nagomilavanja niza (x_n) i tačke nagomilavanja skupa vrijednosti niza $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Naprimjer, kao što smo to vidjeli već, niz $x_n = (-1)^n$ ima dvije tačke nagomilavanja $x' = 1$ i $x'' = -1$, dok skup vrijednosti tog niza $\{-1, 1\}$ nema niti jednu tačku nagomilavanja jer je on konačan skup.
Sljedećim važnim teoremom utvrđujemo egzistenciju tačaka nagomilavanja proizvoljnog niza.

Teorem 1.6.2: (Bolzano-Weierstrassov teorem)

1. Svaki ograničen niz realnih brojeva ima bar jednu tačku nagomilavanja u skupu $\mathbb{R}$.
2. Svaki niz realnih brojeva ima bar jednu tačku nagomilavanja u $\mathbb{R}^*$.

Dokaz :

1. Neka je niz (x_n) ograničen. To znači da postoje $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a \leq x_n \leq b$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Ako dati niz ima samo konačno mnogo različitih elemenata, onda mora postojati podniz čiji su svi elementi međusobno jednaki (konstantni podniz) i taj je konvergentan, to jest dati niz ima tačku nagomilavanja.

   Pretpostavimo sada da dati niz ima beskonačno mnogo različitih elemenata. Neka je c_1 središnja tačka segmenta $[a, b]$. U bar jednom od dijelova $[a, c_1]$ ili $[c_1, b]$ mora biti beskonačno mnogo članova niza (u suprotnom niz bi imao konačno mnogo različitih elemeata). Ako je to segment $[a, c_1]$, uvedimo oznake $a = a_1, c_1 = b_1$, a ako je to segment $[c_1, b]$, stavimo $a_1 = c_1$ i $b_1 = b$. Ako oba segmenta sadrže beskonačno mnogo članova niza, onda je svejedno koju varijantu izaberemo. Ponovimo postupak sa novodobijenim segmentom $[a_1, b_1]$; označimo

sredinu segmenta sa c_2 i onaj dio u kome se nalazi beskonačno mnogo članova niza označimo sa $[a_2, b_2]$. Beskonačnim ponavljanjem ovakve konstrukcije dolazimo do niza segmenta $[a_n, b_n]$ $(n \in \mathbb{N})$, za koje nije teško utvrditi da čine familiju zatvorenih umetnutih segmenata, pa na osnovu Cantorovog aksioma, presjek ovih segmenata je neprazan, šta više zbog $b_n - a_n \to 0 (n \to +\infty)$, taj presjek je jdinstvena tačka c.
Neka je $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$ proizvoljan. Kako i $[a_2, b_2]$ sadrži beskonačno mnogo članova našeg niza, mora postojati element $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ sa indeksom $n_2 > n_1$. Postupak dalje ponavljamo analogno: Ako je izabran $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, onda $x_{n_{k+1}}$ biramo iz $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ tako da je $n_{k+1} > n_k$.
Na ovaj način smo formirali podniz (x_{n_k}) niza (x_n), za koga važi $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$. Kako je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = c$, to je na osnovu teoreme "o lopovu i dva policajca" i $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = c$.
Dakle, (x_{n_k}) je konvergentan podniz pa (x_n) ima tačku nagomilavanja.

2. Slučaj kada je niz (x_n) ograničen pokazali smo u 1.
Pretpostavimo zato da dati niz nije ograničen, npr. odozgo. Tada za svaki prirodan broj k, postoji beskonačno mnogo članova niza koji su veći od k. Neka je x_{n_1} proizvoljan član niza koji je veći od 1. Od elemenata koji su veći od 2 izaberimo jedan čiji je indeks $n_2 > n_1$. Uopšte, ako smo odredili $x_{n_{k-1}}$, onda x_{n_k} biramo tako da je veći od k i da je $n_k > n_{k-1}$.
Ovakvom konstrukcijom dobili smo podniz (x_{n_k}) sa osobinom da je za proizvoljno $k \in \mathbb{N}$, $x_{n_k} > k$, pa je samim tim $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = +\infty$. Slučaj kada niz nije ograničen odozdo potpuno je analogan gornjem slučaju. ♣

■

Ako sa $T(x_n)$ označimo skup svih tačaka nagomilavanja niza (x_n), onda na osnovu Bolzano-Weierstrassove teoreme zaključujemo da je on neprazan u $\mathbb{R}^*$. Koja je gornja granica broja elemenata ovog skupa neće nas zanimati, iako treba reći da se mogu konstruisati nizovi koji imaju proizvoljno mnogo tačaka nagomilavanja, šta više, postoje nizovi za koje je svaka tačka iz $\mathbb{R}$, njihova tačka nagomilavanja.

Lema 1.6.3. *Neka je (x_n) proizvoljan niz. Ako je x_0 tačka nagomilavanja skupa $T(x_n)$, onda je $x_0 \in T(x_n)$.*

Teorem 1.6.4

Za proizvoljan niz (x_n), skup $T(x_n)$ ima maksimum i minimum u $\mathbb{R}^*$.

Dokaz : Na osnovu Teorema 1.6.2 skup $T(x_n)$ nije prazan, pa na osnovu aksioma potpunosti ima supremum i infimum. Ako je $T(x_n)$ konačan (to jest ima konačno mnogo elemenata) tvrđenje je trivijalno. Pretpostavimo zato da je to beskonačan skup. Ako $a = \sup T(x_n)$ nije maksimum skupa (to jest $a \notin T(x_n)$), onda na osnovu karakterizacije supremuma, tačka a bi bila tačka nagomilavanja skupa $T(x_n)$, ali onda bi na osnovu Leme 1.6.3 $a \in T(x_n)$, što je očigledno kontradikcija. Dakle, supremum skupa $T(x_n)$ pripada tom skupu pa je on maksimum skupa.
Analogno se izvodi dokaz za infimum. ■

Definicija 1.6.4. *Najveća tačka nagomilavanja niza (x_n) zove se gornji limes ili limes superior niza i označava se sa*

$$\limsup x_n \quad \textit{ili} \quad \overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n\ .$$

Najmanja tačka nagomilavanja niza (x_n) zove se donji limes ili limes inferior i označava se sa

$$\liminf x_n \quad \textit{ili} \quad \underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n\ .$$

Sljedeći teorem nam daje jednu karakterizaciju novouvedenih pojmova.

Teorem 1.6.5

Neka je (x_n) proizvoljan realan niz i neka je $\limsup x_n = \overline{x}$. Tada važi:

1. $(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ x_n < \overline{x} + \varepsilon$,
ili riječima rečeno; za svako $\varepsilon > 0$ su skoro svi članovi niza (x_n) manji od $\overline{x} + \varepsilon$.

2. $(\forall\, \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m > n)\ x_m > \overline{x} - \varepsilon$,
   ili za svako $\varepsilon > 0$ postoji beskonačno mnogo članova niza (x_n) koji su veći od $\overline{x} - \varepsilon$.
3. Ako tačka x^* zadovoljava uslove 1. i 2. tada je $x^* = \limsup x_n$.

Dokaz :

1. Ako ova tvrdnja ne bi bila tačna, to bi značilo da niz (x_n) ima beskonačno mnogo članova u intervalu $[\overline{x} + \varepsilon, +\infty)$. Ako te članove shvatimo kao podniz našeg niza, onda bi taj podniz imao tačku nagomilavanja koja takođe pripada tom intervalu, a što bi bila kontradikcija sa maksimalnošću limesa superior.
2. Za dokaz ove tvrdnje dovoljno je primjetiti da je skup $(\overline{x}-\varepsilon, +\infty)$ okolina tačke $\overline{x}$ i primjeniti Definiciju 1.6.3.
3. Pretpostavimo da postoje dva različita broja $\overline{x}$ i x' koji zadovoljavaju 1. i 2. (neka je recimo $\overline{x} < x'$). Uzmimo proizvoljno $x \in (\overline{x}, x')$. Kako $\overline{x}$ zadovoljava 1., to je $x_n < x$ za sve $n > n_0$. Ali tada u okolini $(x, +\infty)$ ima samo konačno mnogo članova niza, pa x' ne zadovoljava uslov 2. Dakle, ne mogu postojati dvije tačke koje zadovoljavaju oba uslova. ♣

■

Primjer 26 : Posmatrajmo niz $x_n = (-1)^n$.
$T(x_n) = \{-1, 1\}$ pa je $\limsup x_n = 1$, a $\liminf x_n = -1$.
Primjetimo da je skup vrijednosti niza $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$ i da on kao konačan skup nema tačaka nagomilavanja.

Primjer 27 : Posmatrajmo niz $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.
Skup vrijednosti niza je $\left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$. Nije teško vidjeti da je supremum ovog skupa jednak $\frac{1}{2}$ i da je infimum skupa -1. Međutim, kako je ovo konvergentan niz, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, to je $T(x_n) = \{0\}$, pa važi

$$\limsup x_n = \liminf x_n = 0\ .$$

Primjer 28 : Posmatrajmo niz $x_n = n^{(-1)^n}$.
Podniz (x_{2k}) našeg niza je niz čiji je opšti član $x_{2k} = 2k$ i on teži ka $+\infty$ kada k teži u beskonačnost. S druge strane podniz $x_{2k+1} = \frac{1}{2k+1} \to 0$ kada $k \to +\infty$, pa je dakle $T(x_n) = \{0, +\infty\}$, odakle zaključujemo da važi

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = +\infty\quad ,\quad \underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = 0\ .$$

Konstatujmo najzad da iz navedenih tvrđenja neposredno slijedi sljedeća tvrdnja.

Teorem 1.6.6

Neka je (x_n) proizvoljan realan niz.

1. Niz (x_n) ima graničnu vrijednost, konačnu ili beskonačnu, ako i samo ako je $\overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n$, to jest ako i samo ako niz ima samo jednu tačku nagomilavanja.
2. Niz (x_n) konvergira (to jest ima konačnu graničnu vrijednost) ako i samo ako je $\overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = x_0 \in \mathbb{R}$, tojest ako i samo ako ima samo jednu tačku nagomilavanja i ta je konačan broj.

Poglavlje

2 Numerički redovi

2.1 Definicija i osobine numeričkog reda

Neka je dat beskonačan niz realnih brojeva $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ Izraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \ , \tag{2.1}$$

naziva se beskonačnim redom s opštim članom a_n, ili realnim numeričkim redom. Najčešće ćemo jednostavno govoriti numerički red ili samo red. Izraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ čitamo "sumiramo članove a_n kada se n mijenja od 1 do ∞". Veličinu n u datom izrazu nazivamo brojač i ona je fiktivna veličina u tom smislu da smo umjesto slova n mogli izabrati proizvoljno drugo slovo, a da se smisao izraza ne gubi, naprimjer $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{z=1}^{\infty} a_z$.

U opštem slučaju sumiranje vršimo počev od nekog indeksa n_0, tojest posmatramo red $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$. Redu (2.1) pridružujemo zbirove

$$s_1 = a_1 = \sum_{i=1}^{1} a_i$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = \sum_{i=1}^{2} a_i$$

....

$$s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$$

....

koje nazivamo parcijalnim sumama reda (2.1), to jest za izraz

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

kažemo da je n-ta parcijalna suma reda (2.1).

Definicija 2.1.1. *Ako postoji i konačan je* $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$*, niza* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *parcijalnih suma reda (2.1), tada kažemo da je red konvergentan i da mu je suma jednaka* s *i pišemo*

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ .$$

Za red koji ne konvergira (bilo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \pm\infty$*, bilo da taj limes ne postoji) kažemo da je divergentan red.*

Primjer 29 : Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, gdje je $q \neq 0$.
Dati red se naziva geometrijskim redom. Njegova n-ta parcijalna suma je

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \ ,$$

ako je $q \neq 1$.
Neka je $|q| < 1$. Za ovakav izbor q-a je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, te vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{1-q} \ .$$

Ako je $|q| \geq 1$ dati red divergira. Zaista, ako je $q > 1$, onda je $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$. Ako je $q < -1$, tada za parne n, q^n teži u $+\infty$, a za neparne n teži u $-\infty$, te granična vrijednost od s_n ne postoji.
Specijalno, ako je $q = -1$ imamo red čija je n-ta parcijalna suma

$$s_n = 1 - 1 + 1 - 1 + ... \pm 1 = \begin{cases} 1 & , \quad n \text{ paran broj} \\ 0 & , \quad n \text{ neparan broj} \end{cases}$$

pa u ovom slučaju $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ ne postoji, to jest red je divergentan.

Ako je $q = 1$ posmatrani red je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ i on je očigledno divergentan.

Primjer 30 : Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
Opšti član datog reda možemo zapisati sa

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n \ ,$$

te je n-ta parcijalna suma jednaka

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (\ln(n+1) - \ln n) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1) \ .$$

Odavde sada imamo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$, pa je dati red divergentan.

Uporedo sa redom (2.1) posmatrajmo i red

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \ , \tag{2.2}$$

koga nazivamo n-ti ostatak reda (2.1) i označavamo ga sa r_n. Veza konvergencije reda (2.1) i konvergencije reda (2.2) data je u sljedećoj teoremi.

Teorem 2.1.1

1. Red (2.1) konvergira ako i samo ako konvergira red (2.2).
2. Red (2.1) konvergira ako i samo ako njegov ostatak r_n teži nuli kada $n \to +\infty$.

Dokaz :

1. Označimo sa s_n n-tu parcijalnu sumu reda (2.1) i sa s'_k k-tu parcijalnu sumu reda (2.2). Očigledno tada vrijedi jednakost $s'_k = s_{n+k} - s_n$.
   Ako je $\lim\limits_{k\to+\infty} s_{n+k} = s$, onda je $\lim\limits_{k\to+\infty} s'_k = s - s_n$, tj. iz konvergencije reda (2.1) slijedi konvergencija reda (2.2).
   Iz $\lim\limits_{k\to+\infty} s'_k = s'$ imali bi da je $\lim\limits_{k\to+\infty} s_{n+k} = s' + s_n$, pa važi i obrat.

2. Red (2.1) možemo zapisati kao

   $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s_n + r_n \ .$$

   Ako taj red konvergira i ima sumu s, onda je $r_n = s - s_n$, odakle je

   $$\lim_{n\to+\infty} r_n = \lim_{n\to+\infty} (s - s_n) = 0 \ .$$

   Obratno, ako ostatak r_n teži ka nuli kada $n \to +\infty$, iz prvog dijela teoreme slijedi da red (2.1) konvergira.

■

Teorem 2.1.1 pod 1. nam govori da odbacivanje konačnog broja članova nekog reda hoće uticati eventualno na sumu tog reda u smislu promjene vrijednosti te sume, ali neće uticati na njegovu konvergenciju.

PRIMJER 31 : Za geometrijski red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ vidjeli smo da konvergira za $|q| < 1$ i da je

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \ .$$

U kontekstu gornje primjedbe o odbacivanju konačnog broja sabiraka reda i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ će biti konvergentan, pri čemu je

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n - q^0 = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q} \ .$$

U opštem slučaju vrijedi formula

$$\boxed{\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n = \frac{q^{n_0}}{1-q} \text{ za } |q| < 1}$$

Dakle, konvergencija se ne mijenja, a vrijednost sume reda će se promijeniti.

Jedan od najopštijih kriterijuma konvergencije numeričkih redova navodimo u sljedećem tvrđenju.

Teorem 2.1.2: Cauchyjev kriterijum konvergencije

Red (2.1) konvergira ako i samo ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, p \in \mathbb{N})(n > n_0 \;\Rightarrow\; |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon) \ .$$

Dokaz ove tvrdnje nećemo izvoditi, a može se naći u [3]. Primjetimo ipak da ovaj stav govori, pojednostavljeno rečeno, da je za konvergenciju reda (2.1) neophodno i dovoljno da proizvoljna p-ta parcijalna suma, proizvoljnog n-tog ostatka reda se može učiniti proizvoljno malenom, što naravno direktno koincidira sa tvrđenjima u Teoremi 2.1.1.

Teorem 2.1.3

Neka su dati redovi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$. Tada vrijedi:

1. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira, tada konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} a x_n$ $(a \in \mathbb{R})$ i pri tome vrijedi
$$\sum_{n=1}^{\infty} a x_n = a \sum_{n=1}^{\infty} x_n \ .$$

2. Ako oba reda konvergiraju, tada konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$ i pri tome vrijedi:
$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \ .$$

Dokaz :

1. Označimo sa $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, a sa $S_n = a x_1 + a x_2 + \cdots + a x_n$. Iz egzistencije granične vrijednosti $\lim_{n \to +\infty} s_n$ slijedi
$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} a s_n = a \lim_{n \to +\infty} s_n = a s \ .$$

2. Neka je $s'_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ i $s''_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$. Neka je
$$\lim_{n \to +\infty} s'_n = s' \quad \text{i} \quad \lim_{n \to +\infty} s''_n = s'' \ .$$
Ako sa S_n označimo n-tu parcijalnu sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$, imamo
$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} S_n &= \lim_{n \to +\infty} ((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \cdots + (x_n + y_n)) \\ &= \lim_{n \to +\infty} ((x_1 + \cdots x_n) + (y_1 + \cdots y_n)) = \lim_{n \to +\infty} s'_n + \lim_{n \to +\infty} s''_n \\ &= s' + s'' \ . \end{aligned}$$

■

Sljedećom tvrdnjom dajemo neophodan uslov konvergencije numeričkog reda.

Teorem 2.1.4: Neophodan uslov konvergencije reda

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira, onda vrijedi $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Dokaz : Neka je red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergentan. To znači da je niz njegovih parcijalnih suma konvergentan. Iz jednakosti $s_n - s_{n-1} = x_n$ $(n > 1)$, direktno slijedi

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} s_n - \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = 0 \ .$$

■

Da navedeni neophodan uslov konvergencije reda nije i dovoljan, pokazat ćemo primjerom.

Primjer 32 : Posmatrajmo harmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
Opšti član ovog reda je $x_n = \frac{1}{n}$ i očigledno je $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.
Primjetimo kao prvo da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \ . \tag{2.3}$$

Grupišemo li članove našeg reda na slijedeći način

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) + \cdots \ ,$$

koristeći (2.3), svaka suma u zagradama je veća od $\frac{1}{2}$, pa je suma svih takvih brojeva beskonačna, to jest dati red je divergentan.

Spomenimo ovdje jedan važan red:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ je konvergentan ako je } \alpha > 1, \text{ a divergentan ako je } \alpha \leq 1}$$

Teorem 2.1.4 često koristimo za dokazivanje divergencije nekog reda i to tako što ga koristimo kao kontrapoziciju. Naime, naše tvrđenje je oblika $p \Rightarrow q$, gdje je p iskaz "red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira", a iskaz q je "$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$". Kako zakon kontrapozicije tvrdi $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$, onda imamo tvrđenje,

Posljedica 2.1.5. *Ako je* $\lim_{n\to+\infty} x_n \neq 0$, *tada je red* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *divergentan.*

Primjer 33 : Ispitajmo konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.

Kako je
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0\ .$$
Dakle, opšti član reda ne teži ka 0, pa po navedenoj posljedici polazni red nije konvergentan.

2.2 Redovi sa nenegativnim članovima

Ako su skoro svi članovi reda (x_n) nenegativni, onda za red
$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$$
kažemo da je red sa nenegativnim članovima. Specifičnost ovih redova je u tome što je niz (s_n) parcijalnih suma datog reda monotono rastući niz, pa je za konvergenciju tog niza, na osnovu Teorema 1.4.2, dovoljna još i ograničenost tog niza.

Teorem 2.2.1

Red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ s nenegativnim članovima je konvergentan ako i samo ako je niz njegovih parcijalnih suma ograničen.

PRIMJER 34 : Posmatrajmo red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.
Ovo je red sa pozitivnim članovima, pa je za njegovu konvergenciju dovoljno utvrditi ograničenost niza parcijalnih suma. Posmatrajmo zato
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}\ .$$
Kako je $1 - \frac{1}{n+1} < 1$, zaključujemo da je niz (s_n) ograničen, to jest polazni red je konvergentan.
Šta više, ovdje imamo da je
$$s = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1\ .$$

Stvarna potreba u radu sa redovima je utvrđivanje njihove konvergencije, češće nego određivanje same sume tog reda. U tom cilju nam je od interesa imati nekakve kriterije za utvrđivanje konvergencije. U narednim teoremama dat ćemo neke najčešće korištene kriterije.

Teorem 2.2.2: Kriterij upoređivanja

Neka za opšte članove redova sa nenegativnim članovima $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (1) i $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ (2), postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za $n \geq n_0$, $x_n \leq y_n$. Tada vrijedi,

1. iz konvergencije reda (2) slijedi konvergencija reda (1),
2. iz divergencije reda (1) slijedi divergencija reda (2).

Dokaz ove tvrdnje ostavljen je čitaocu za vježbu.

Primjer 35 : Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{4n^4+2n^2+1}$.

Kako je

$$x_n = \frac{3n}{4n^4+2n^2+1} \leq \frac{3n}{4n^4} = \frac{3}{4n^3} \leq \frac{1}{n^3} = y_n \ ,$$

a kako je red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergentan, to je i polazni red, na osnovu kriterija upoređivanja, konvergentan.

Primjer 36 : Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n+1}{2^n}$.

Kako je

$$x_n = \frac{n3^n+1}{2^n} \geq \frac{n3^n}{2^n} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n = y_n \ ,$$

a red $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ je divergentan, to je i polazni red, na osnovu kriterija upoređivanja, divergentan.

Teorem 2.2.3: D'Alambertov kriterij

1. Ako za red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ postoje $n_0 \in \mathbb{N}$ i $q \in \mathbb{R}$, takvi da je za $n \geq n_0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q < 1 \ ,$$

   dati red je konvergentan.
   Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da je za $n \geq n_0$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$, dati red je divergentan.

2. Neka za članove datog reda postoji $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$. Tada, ako je $l < 1$ dati red je konvergentan, a ako je $l > 1$ dati red je divergentan.

Primjer 37 : Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{3^n}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^2+(n+1)+1}{3^{n+1}}}{\frac{n^2+n+1}{3^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n+3}{3(n^2+n+1)} = \frac{1}{3} < 1 \ ,$$

pa na osnovu D'Alambertovog kriterija je polazni red konvergentan.

Teorem 2.2.4: Cauchyjev korijeni kriterij

1. Ako za red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ postoje $n_0 \in \mathbb{N}$ i $q \in \mathbb{R}$, takvi da je za $n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{x_n} \leq q < 1 \ ,$$

tada je dati red konvergentan.
Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da je za $n \geq n_0$, $\sqrt[n]{x_n} \geq 1$, tada je dati red divergentan.

2. Neka postoji $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$. Tada, ako je $l < 1$ red konvergira, a ako je $l > 1$ red divergira.

Primjer 38 : Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+n+1}{n^2-1}\right)^n$.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+n+1}{n^2-1}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n^2+n+1}{n^2-1}\right) = 2 > 1 ,$$

pa na osnovu Cauchyjevog korijenog kriterija zaključujemo da je dati red divergentan.

Kada primjenjujemo neki od kriterija konvergencije, stvar je iskustva. Ono što treba primjetiti je da i u D'Alambertovom i u Cauchyjevom korijenom kriteriju, ako je $l = 1$ kriteriji ne daju odluku o konvergenciji reda. Tada su nam za ispitivanje konvergencije potrebni ili neki drugi alati (npr. kriterij upoređivanja), ili neki bolji kriterijumi. Jedan od tih boljih kriterija je i naredni navedeni, a kao jedan od najboljih ovdje ćemo samo spomenuti poznati Gaussov kriterij o kome se može pogledati u [2].

Teorem 2.2.5: Kummerov kriterij

Neka je (c_n) niz pozitivnih realnih brojeva, takav da je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ divergentan i neka je dat red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. Označimo sa $K_n = c_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - c_{n+1}$, gdje je x_n opšti član reda ($n \in \mathbb{N}$).

1. Ako postoji $\delta \geq 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$, takvi da je za $n \geq n_0$, $K_n \geq \delta$, onda dati red konvergira.
Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da je za $n \geq n_0$, $K_n \leq 0$, onda dati red divergira.

2. Neka postoji $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = l$. Ako je $l > 0$ red konvergira, a ako je $l < 0$ rad divergira.

Specijalno, ako u Kummerovom kriteriju izaberemo da je $c_n = n$ ($n \in \mathbb{N}$), dobijamo kriterij koji se naziva Raabeov kriterij konvergencije i on glasi:
Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za $n \geq n_0$ ispunjeno $n\left(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\right) \geq q > 1$, onda je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergentan.
Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da je za $n \geq n_0$ ispunjeno $n\left(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\right) \leq 1$, dati red je divergentan.
Naravno, i ovaj kriterij dajemo u formi koja je praktičnija za upotrebu, a ona glasi, ako postoji

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\right) = l ,$$

onda je polazni red konvergentan za $l > 1$, a divergentan za $l < 1$.
Primjetimo takođe da izborom niza $c_n = 1$ ($n \in \mathbb{N}$), imamo D'Alambertov kriterij, stim da se posmatra kada je $l > 0$ ili $l < 0$.

2.3 Redovi sa proizvoljnim članovima

Posmatrajmo proizvoljan niz realnih brojeva $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Posmatrajmo redove,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \ , \tag{2.4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \ . \tag{2.5}$$

Za red (2.4) razlikovat ćemo dvije vrste konvergencije.

Definicija 2.3.1. *Ako red (2.5) konvergira, kažemo da red (2.4) konvergira apsolutno. Za red (2.4) kažemo da konvergira uslovno ako je on konvergentan, a pri tome ne konvergira apsolutno.*

Teorem 2.3.1

Ako je red (2.5) konvergentan, konvergentan je i red (2.4).

Dokaz : Dokaz slijedi na osnovu Cauchyjevog opšteg kriterija konvergencije redova i nejednakosti

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p}| \leq |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \cdots + |x_{n+p}| \ .$$

■

Od svih redova sa proizvoljnim članovima mi ćemo se pozabaviti jednom specijalnom klasom, a to su redovi oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots + (-1)^{n+1} c_n + \cdots \ ,$$

gdje su c_n realni brojevi istog znaka (pozitivni ili negativni). Ovakve redove nazivamo alternativnim redovima.

Teorem 2.3.2: Leibnitzov kriterij

Neka je dat alternativni red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$. Ako je niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotono opadajući i ako je $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$, tada je red konvergentan.

PRIMJER 39 : Posmatrajmo alternativni red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Koristeći notaciju u Leibnitzovom kriteriju, imamo da je niz zadat sa $x_n = \frac{1}{n}$, monotono opadajući jer za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = x_n \ ,$$

i $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Sada na osnovu Leibnitzovog kriterija zaključujemo da je dati red konvergentan. Šta više, on je uslovno konvergentan jer red sa apsolutnim vrijednostima, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentan.

PRIMJER 40 : Ispitati konvergenciju reda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$.

Posmatrajmo funkciju $f(x) = \frac{1}{x - \ln x}$. Za $x > 1$ vrijedi

$$f'(x) = -\frac{x-1}{x(x - \ln x)^2} < 0 \ .$$

Iz ovoga zaključujemo da je funkcija strogo monotono opadajuća za $x > 1$ te će vrijediti $x_n = f(n) > f(n+1) = x_{n+1}$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Pri tome je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n - \ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln \frac{e^n}{n}} = 0 \ .$$

Dakle, zadovoljena su oba uslova Leibnitzovog kriterija te dati red konvergira.

Komentar:

Posmatrajmo još jednom uslovno konvergentan red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Označimo sa s sumu tog reda dakle,

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} \cdots$$

Pomnožimo gornju jednakost sa 2,

$$2s = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \frac{2}{11} - \frac{1}{6} \cdots$$

Grupišimo u gornjoj jednakosti na desnoj strani sabirke sa istim imeniocem, naprimjer $\frac{2}{3}$ i $-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$ i $-\frac{1}{5}$. Izračunavajući ta grupisanja dobijamo

$$2s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} \cdots$$

Dakle, $2s = s$ iz čega onda imamo $2 = 1$!?

Ovaj neočekivani (nemoguć) rezultat nam govori da u uslovno konvergentnom redu ne smijemo preslagati sabirke, to jest zakoni komutativnosti i asocijativnosti za beskonačno mnogo sabiraka su upitni.

Bibliografija

[1] Fehim Dedagić : Matematička analiza (Prvi dio), Univerzitetska knjiga, Tuzla 2005.

[2] D. Adnađević, Z. Kadelburg : Matematička analiza I, Nauka, Beograd 1995.

[3] M. Merkle : Matematička analiza Teorija , Beograd 1996.