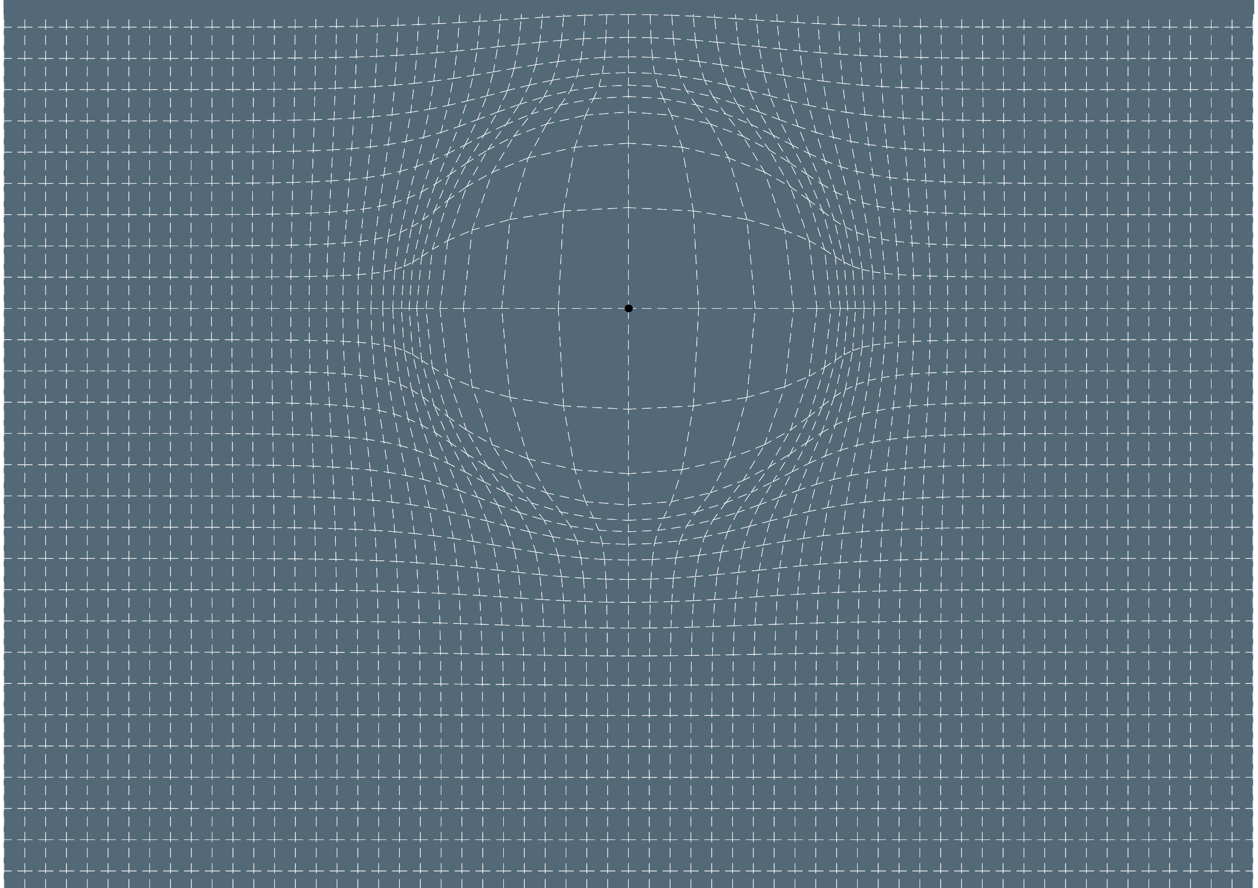
2019.

Nermin Okičić Enes Duvnjaković

METRIČKI PROSTORI



2019.

Nermin Okičić Enes Duvnjaković

METRIČKI PROSTORI

Udžbenik Univerziteta u Tuzli
Manualia Universitatis Studiorum Tuzleansis

Tuzla, 2019.

METRIČKI PROSTORI

Nermin Okičić
Enes Duvnjaković

Izdavač:
NAM Tuzla

Za izdavača:
Sevlid Hurtić

Urednik:
Nermin Okičić

Recenzenti:
Dr. sc. Mehmed Nurkanović, redovni profesor
Dr. sc. Vedad Pašić, vanredni profesor
Dr. sc. Amra Rekić-Vuković, docent

Štampa:
SUTON Široki Brijeg

Tiraž:
100 primjeraka

CIP – Katalogizacija u publikaciji
Nacionalna i univerzitetska biblioteka
Bosne i Hercegovine, Sarajevo

515.124(075.8)

OKIČIĆ, Nermin
Metrički prostori / Nermin Okičić, Enes Duvnjaković, - Tuzla: NAM, 2019. -
203 str.: graf. prikazi; 25 cm

Bilješke uz tekst. - Bibliografija: str.201. - Registar.

ISBN 978-9958-661-26-6
1. Duvnjaković, Enes
COBISS.BH-ID 26988038

Odlukom Senata Univerziteta u Tuzli br. 03-6970-7.3/18 od 19.12.2018. godine odobrava se upotreba u nastavi udžbenika pod naslovom "Metrički prostori", autora Dr.sc. Nermina Okičića, vanrednog profesora i Dr.sc. Enesa Duvnjakovića, vanrednog profesora za potrebe teorijske nastave nastavnog predmeta "Metrički prostori" koji se sluša na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Tuzli.

Predgovor

Iako možda svako od nas ima svoju predstavu o prostoru, svima je iz svakodnevnog života poznato, makar iskustveno, šta znači prostor, a šta rastojanje. Prostor uobičajeno shvatamo kao neko mjesto gdje se odigravaju događaji, a pod rastojanjem shvatamo ”najkraću” dužinu između dvije tačke. Prirodno, u prostor postavljamo i koordinatni sistem, a u okviru njega biramo tačku za koju kažemo da ”od nje počinje sve”, koordinatni početak. Takođe je svima dobro poznato da se rastojanje između dvije tačke u prostoru koji doživljavamo, određuje čuvenom Pitagorinom teoremom:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \ ,$$

gdje je d rastojanje, a x_i, y_i i z_i $(i \in \{1,2\})$, koordinate tačaka između kojih mjerimo rastojanje.
Sve je ovo ”jednostavno” i dobro poznato iz svakodnevnog života, ali ”jednostavan” je i prostor u kome mislimo da živimo. To je samo jedan specijalan slučaj opšteg pojma prostora i načina mjerenja rastojanja.

Ideja o objektima koji postoje i obitavaju u nekom prostoru je od temeljne važnosti za ljudska bića da bi razumjeli svoje okruženje, svemir. Nije samo da su u svakodnevnom i stvarnom životu ovakve pojave usko povezane s prostor-vremenom koga opisuje fizika, nego su i apstraktni pojmovi objekata rutinski oslikani, prepušteni mašti, kao nešto što postoji u konceptualnim prostorima. Ta mašta je implicitna u jeziku koji koristi geometrijske i prostorne uslove za opisivanje stvari. Pored rastojanja u fizičkim prostorima, možemo govoriti o približavanju tangente ka objektu, o bliskim rodbinskim vezama, o vicu koji ide predaleko, ili nekim drugim idejama u kojima koristimo pojam blizine, daljine ili rastojanja. Psihologija povezanosti između mjesta, pravca, smjera i udaljenosti u fizičkom prostoru, i apstraktnih ideja u našem umu, ima velike važnosti za razvojne funkcije čovjeka.

Posmatrajmo nekoliko primjera poznatih nam iz matematičke analize.

Primjer. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Funkcija f je neprekidna u tački $a \in \mathbb{R}$ ako za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da je $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, kad god je $|x - a| < \delta$.*

Primjer. *Neka je $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Za $L\in\mathbb{R}$ kažemo da je granična vrijednost funkcije F, kada se tačka $X(x_1,x_2)$ približava tački $A(a_1,a_2)$, ako za proizvoljno $\varepsilon>0$, postoji $\delta>0$, ako je $0<\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}<\delta$ onda je $|F(x_1,x_2)-L|<\varepsilon$.*

Primjer. *Kažemo da niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka x^* ako za proizvoljno $\varepsilon>0$ postoji $n\in\mathbb{N}$, tako da je za svako $n\geq n_0$, $|x_n-x^*|<\varepsilon$.*

Iskazujući gornje činjenice običnim govorom, u prvom primjeru tvrdimo da je vrijednost funkcije $f(x)$ proizvoljno blizu vrijednosti $f(a)$, čim je tačka x dovoljno blizu tački a. U drugom primjeru tvrdimo da će $F(x_1,x_2)$ biti kako god hoćemo blizu vrijednosti L, samo treba tačka $X(x_1,x_2)$ biti dovoljno blizu tački $A(a_1,a_2)$. U trećem primjeru vidimo da su skoro svi članovi niza proizvoljno blizu vrijednosti x^*. Očigledno da u sva tri gornja primjera nisu toliko bitna algebarska svojstva realne prave i realne ravni, koliko činjenica da smo u stanju mjeriti rastojanja između tačaka u datim skupovima.

Ideje granične vrijednosti i neprekidnosti koje smo izučavali u ranijim kursevima Matematičke analize, a tiču se Euklidskih prostora, bitne su i u drugim prostorima, naprimjer u prostorima funkcija ili prostorima nizova. Obje ove ideje vezane su za pojam blizine. Ovo ćemo mnogo bolje shvatiti i razumjeti ako pojam blizine definišemo u terminima neke funkcije *rastojanja.* Ovakav koncept nas dovodi do pojma metričkih prostora.

Metrički prostori su specijalna vrsta topoloških prostora. Svaki metrički prostor može se na prirodan način snabdjeti topologijom koja ovisi o metrici tog metričkog prostora. Prema tome, metrički prostori daju bogat izvor primjera u topologiji, a uz to mnoge primjene topologije u analizi su date putem metričkih prostora.

Ova knjiga prvenstveno je namijenjena studentima četvrte godine prvog ciklusa studija matematike i u potpunosti prati silabus predmeta "Metrički prostori" na Odsjeku matematika Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Tuzli, te je namijenjena da bude udžbenik na tom predmetu. Dakako, nadamo se da će ova knjiga biti interesantna i korisna i drugima koje se bave matematikom i matematičkim istraživanjima.

U prvom poglavlju uvodi se pojam rastojanja (metrike) genezom uslova (aksioma) na funkciju koja bi trebala predstavljati alat za mjerenje rastojanja među elementima proizvoljnog skupa. Na taj način dati su pojmovi prametrike i prametričkih prostora, pseudometrike i pseudometričkih prostora, ultrametrike i ultrametričkih prostora, a na kraju je dat i zbirni pregled geneze metrike.

U drugom poglavlju definisan je pojam metrike i metričkih prostora, navedene osnovne osobine, te slikovito date konstrukcija metrike na produkt prostoru i izvođenje pojma metrike iz pseudometrike. Naveden je veći broj primjera važnijih metričkih prostora, koji su korišteni u drugim predmetima iz matematičke analize, te objašnjen pojam ograničenosti skupa u metričkom prostoru. Uveden je pojam potprostora metričkog prostora i ekvivalentosti metrika na istom skupu. Pojam neprekidnosti i tipovi neprekidnosti su obrađeni

u okviru posebne sekcije, kao i pojam konvergencije u metričkim prostorima.
Poglavlje 3 je posvećeno pojmu kompletnosti metričkih prostora, zatim problemati-ci kompletiranja metričkog prostora, kao i pojmu kategorijalnosti skupova uz navođenje veoma bitnog Baireov teorema.
U četvrtom poglavlju uveden je pojam separabilnosti metričkog prostora i navedene osobine separabilnih prostora.
Povezanost metričkih prostora je posebno specificirana osobina metričkih prostora, koja je razrađena u petom poglavlju, navođenjem definicije i osobina povezanosti, komponenti povezanosti i objašnjavanjem pojma putne povezanosti, kao i veze putne povezanosti i povezanosti.
U poglavlju 6 detaljno je obrađena kompaktnost u metričkim prostorima, gdje su u okviru posebnih sekcija uvedeni: definicija kompaktnosti i karakterizacije, neprekidnost funkcije na kompaktnim skupovima, lokalna kompaktnost i jedan specijalni kriterij relativne kompaktnosti na prostoru neprekidnih funkcija.
Poglavlje 7 je veoma važno poglavlje u sagledavanju cijele problematike date u knjizi. Osim što sadrži detaljnu pripremu za formulaciju Banachovog teorema o fiksnoj tački, dat je i veliki broj primjena ovog teorema, posebno u numeričkoj matematici.
Osmo poglavlje je svojevrsni dodatak teoriji metričkih prostora, budući da se bavi pitanjem uvođenja metrike u normiranim prostorima. U posebnim sekcijama su obrađeni Banachovi prostori (kompletni, normirani, vektorski prostori) i konveksnost u normiranim prostorima. Na kraju, u Dodatku 1, je dat primjer L_p prostora koji slikovito demonstrira korištenje ranije usvojenih matematičkih pojmova i metoda.

Recenzenti ovog univerzitetskog udžbenika: Prof.dr.sc. Mehmed Nurkanović, Prof.dr.sc. Vedad Pašić i Doc.dr.sc. Amra Rekić-Vuković, uložili su dosta svog profesionalnog znanja i truda, te svojim stručnim sugestijama značajno doprinijeli da ova univerzitetska knjiga u konačnici bude preglednija i sadržajnija. Prijatna nam je dužnost i čast da im izrazimo iskrenu zahvalnost na pomoći i saradnji.
Zahvalni smo kolegi Doc.dr.sc. Elvisu Barakoviću na tehničkoj podršci i saradnji u toku izrade ove knjige.
Zahvalni smo izdavaču knjige na strpljenju i profesionalno urađenom poslu.

Autori

Za Nadinu i Esmu ...

Sadržaj

1 Predmetrički prostori

U ovom prvom dijelu pokušat ćemo doći do pojma rastojanja genezom uslova (aksioma) na funkciju koja bi trebala predstavljati alat za mjerenje rastojanja, odnosno doći do prirodnih zahtjeva, ali takođe i minimalnog broja istih, na metriku ili metričku funkciju. To će rezultirati nizom prostora koji "prethode" metričkim prostorima i predstavljat će prirodan uvod ka pojmu metričkog prostora.

1.1 Prametrički prostori

U daljem što slijedi podrazumijevat ćemo da je X proizvoljan apstraktan i neprazan skup. Zahtjev za nepraznošću je prirodan jer želimo da mjerimo "rastojanja" između objekata.

Definicija 1.1

Neka je X proizvoljan skup. Ako funkcija $d : X \times X \to \mathbb{R}$, za proizvoljne $x, y \in X$ zadovoljava uslove

$(M1)$ $0 \leq d(x,y) < +\infty$,

$(M2')$ $x = y \implies d(x,y) = 0$,

tada kažemo da je d prametrika na skupu X.

Uređeni par (X,d), gdje je X neprazan skup i d prametrika, nazivamo prametrički prostor.

Primjer 1. *Skup $X = \{0,1\}$ je sa funkcijom definisanom na sljedeći način:*

$$d(0,1) = 1 \ , \ d(1,0) = 0 \ , \ d(0,0) = 0 \ i \ d(1,1) = 0 \ ,$$

prametrički prostor. Da se u ovo uvjerimo, treba pokazati da su zadovoljeni uslovi dati gornjom definicijom.

$(M1)$ *Kako vrijednost funkcije d može biti jedino 1 ili 0, a oba ova broja su veća ili jednaka nuli, to je ovaj uslov zadovoljen.*

$(M2')$ *Ovaj uslov vrijedi jer je $d(0,0) = 0$ i $d(1,1) = 0$.*

Dakle, data funkcija je prametrika na skupu X, a uređeni par (X,d) je prametrički prostor. $\diamondsuit$

Kod prametričkog prostora zahtijevamo dvije najelementarnije osobine mjerenja rastojanja, da je rastojanje njegovih elemenata nenegativno i konačno, i da je rastojanje elementa od "samog sebe" jednako 0. Međutim, u prametričkom prostoru, kontrapozicijom uslova $(M2')$ imamo da ako je $d(x,y) \neq 0$, tada su elementi različiti, ali ako je $d(x,y) = 0$, tada ne znamo u kakvom su odnosu ti elementi. Drugačije rečeno, u prametričkom prostoru nismo u stanju sa sigurnošću razlikovati objekte datog skupa. Pojačavanjem uslova $(M2')$ dobijamo mogućnost detekcije različitih elemenata prostora, a to rezultira i novim prostorom.

Definicija 1.2

Neka je X proizvoljan skup. Ako funkcija $d : X \times X \to \mathbb{R}$, za proizvoljne $x,y \in X$ zadovoljava uslove

$(M1)$ $0 \leq d(x,y) < +\infty$,

$(M2)$ $d(x,y) = 0 \iff x = y$,

tada kažemo da je d razdvajajuća prametrika na skupu X.

Uređeni par (X,d), gdje je X neprazan skup i d razdvajajuća prametrika, nazivamo razdvajajući prametrički prostor.
Jasno je da je razdvajajuća prametrika u stvari prametrika kod koje je uslov $(M2')$ pojačan sa obrnutom implikacijom, to jest prametrika kod koje iz činjenice da ako je rastojanje između dva objekta jednako 0 ($d(x,y) = 0$), ta dva objekta su jedno te isto ($x = y$). U Primjeru 1 imamo da je $d(1,0) = 0$ iz čega ne slijedi $1 = 0$, pa time funkcija d u tom primjeru nije razdvajajuća prametrika.

Uslove prametrike možemo pojačati i na drugi način.

Definicija 1.3

Neka je X proizvoljan skup. Ako funkcija $d : X \times X \to \mathbb{R}$, za proizvoljne $x, y \in X$ zadovoljava uslove

$(M1)$ $0 \le d(x,y) < +\infty$,

$(M2')$ $x = y \implies d(x,y) = 0$,

$(M3)$ $d(x,y) = d(y,x)$,

tada kažemo da je d simetrična prametrika na skupu X.

Uređeni par (X,d), gdje je X neprazan skup i d simetrična prametrika, nazivamo simetrično prametrički prostor. Uslov $(M3)$ naziva se uslov simetričnosti, a odatle i naziv za funkciju d u gornjoj definiciji.

Primjer 2. *Posmatrajmo skup $\mathbb{R}^2$. Za proizvoljne (x_1,y_1) i (x_2,y_2) iz $\mathbb{R}^2$ definišimo funkciju*

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \begin{cases} 0 & , \quad x_1 = x_2 \\ |y_2 - y_1| & , \quad x_1 \neq x_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

Ova funkcija je simetrična prametrika na skupu $\mathbb{R}^2$. Zaista, na osnovu definicije apsolutne vrijednosti vrijedi uslov $(M1)$. Neka je $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$, tada prema definiciji jednakosti uređenih parova je $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$. Sada je prema definiciji funkcije d, $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 0$, te vrijedi $(M2')$.

Neka je $x_1 = x_2$, tada je $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 0 = d((x_2,y_2),(x_1,y_1))$. Neka je $x_1 \neq x_2$, tada imamo

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |y_2 - y_1| = |y_1 - y_2| = d((x_2,y_2),(x_1,y_1)).$$

U oba moguća slučaja zadovoljena je simetričnost odnosno uslov $(M3)$.

Prema dokazanim osobinama vrijedi da je sa (1.1) na skupu $\mathbb{R}^2$ definisana simetrična prametrika.

Primijetimo da data funkcija d nije razdvajajuća prametrika. Zaista, za tačke $(1,1),(1,4) \in \mathbb{R}^2$ vrijedi d((1,1),(1,4))=0 jer su im prve koordinate jednake, a jasno je da vrijedi $(1,1) \neq (1,4)$, te ne vrijedi osobina $(M2)$. $\diamondsuit$

Ako razdvajajućoj prametrici dodamo još i uslov simetričnosti, odnosno ako simetričnoj prametrici pojačamo uslov $(M2')$ sa obrnutom implikacijom, dobijamo novi predmetrički prostor.

2 Metrički prostori

Skup sam za sebe nema nikakvu ”strukturu”. Za proizvoljna dva skupa A i B, eventualno se možemo pitati ”Da li je $A = B$” ili ”Da li je A podskup skupa B” i ništa više. Ako skupu dodamo neku strukturu, stvari postaju interesantnije. Naprimjer, ako definišemo ”operaciju množenja” $a \cdot b$ u X, koja još zadovoljava aksiom $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, tada X dobija algebarsku strukturu polugrupe, sa čime otvaramo čitavo matematičko područje, ”Teoriju grupa”. Nas neće zanimati algebarske strukture skupa. Naše interesovanje će biti na pojmu ”blizine”, koji je u osnovi pojmova ”konvergencije” i ”neprekidnosti”.

Granični proces jedan je od najvažnijih pojmova matematičke analize. Fakat na kome počiva ovaj pojam jeste da smo u mogućnosti mjeriti rastojanje između proizvoljne dvije tačke posmatranog skupa. Štaviše, veliki broj pojmova analize nije vezan za algebarska svojstva skupa nego upravo za koncept udaljenosti.

Ovo nas navodi na izučavanje skupova u kojima je moguće mjeriti rastojanje između tačaka, to jest vodi nas ka konceptu "metričkog prostora", fundamentalnog pojma moderne matematike. U svojim radovima s početka dvadesetog vijeka Frechet [1] koristi pojmove metrike i metričkih prostora, ali formalno uvođenje pojma metričkog prostora je uradio Hausdorff.[2]
Frechet uvodi ove prostore u svojoj disertaciji *Sur quelques points du calcul fonctionnel* 1906. definišući prostore u kojima *voisinage* ("blizina") funkcija, koju označava sa (a,b), ima osobine $(a,b)=(b,a)\geq 0$, $(a,b)=0$ ako i samo ako $a=b$, (a,b) teži ka nuli ako a i b teže jedan ka drugom i relaksiranu formu nejednakosti trougla: ako $(a,b)\leq\varepsilon$ i $(b,c)\leq\varepsilon$, onda $(a,c)\leq f(\varepsilon)$, gdje je $\lim_{\varepsilon\to 0_+} f(\varepsilon)=0$. Primijetićemo da je od samog početka, proučavanje metričkih prostora u kombinaciji sa proučavanjem relaksirane verzije istih, koje je očito dizajnirano za dokazivanje graničnih vrijednosti, ali ne sasvim onako kao što će to biti prema Definiciji 2.1.
Frechet je želio definisati *écart des deux éléments* ("varijaciju od dva elementa") koja će zadovoljavati potpunu nejednakost trougla $(a,b)\leq(a,c)+(c,b)$, čineći tako metriku kao što je u modernoj definiciji. Hausdorff će nešto kasnije dati danas važeće ime *metrische Räume*, to jest "metrički prostori". On koristi dvije notacije, $\overline{xz}\leq\overline{xy}+\overline{yz}$ i današnju notaciju $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$. U ovom vremenskom periodu Frechetovog rada, Minkowski[3] razvija geometriju za opšti prostor-vrijeme entitet koga su postulirali Lorentz i Einstein, baziran na sasvim novoj funkciji rastojanja koja dozvoljava negativne vrijednosti i koristi to za opisivanje rastojanja između prostornih i vremenskih pravaca. Danas po imenu Minkowskog nazivamo jednu čitavu klasu metričkih prostora.

Metrički prostori generalizuju važan i koristan koncept i zbog toga imaju veliku primjenu u mnogim oblastima matematike. Na primjer, svaka metrika definiše jedinstvenu topologiju za dati prostor i takvi prostori često imaju interesantne i korisne topološke osobine. U teoriji kodiranja, Hamming metrika igra centralnu ulogu u ispitivanju kanal greške. U diferencijalnoj geometriji se posmatra analiza u metričkim prostorima. Linearna algebra proučava normu vektora, koja je povezana sa skalarnim produktom i kao takva generiše metriku među vektorima.

2.1 Metrika i metrički prostor

Iako smo neformalno pojam metričkih prostora već uveli u prethodnoj glavi, praveći genezu uslova, sada ćemo dati i formalno definiciju metričkih prostora.

[1]Maurice Frechet 1878–1973, francuski matematičar
[2]Felix Hausdorff 1868–1942, njemački matematičar
[3]Hermann Minkowski 1864–1909, njemački matematičar

Definicija 2.1

Neka je X proizvoljan neprazan skup. Za funkciju $d : X \times X \to \mathbb{R}$ kažemo da je metrika ili metrička funkcija na X, ako zadovoljava sljedeća četiri uslova, za proizvoljne x, y i z iz X:

$(M1)$ $d(x,y) \geq 0$, (nenegativnost)

$(M2)$ $d(x,y) = 0 \iff x = y$, (strogost)

$(M3)$ $d(x,y) = d(y,x)$, (simetričnost)

$(M4)$ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$ (nejednakost trougla).

Tada kažemo da je skup X snabdjeven metrikom d, a uređeni par (X,d) nazivamo metrički prostor. Elemente skupa X nazivamo tačkama, a realan broj $d(x,y)$ nazivamo rastojanjem između tačaka x i y.

Dakle, metrički prostor je uređeni par (X,d), koga čine skup X i na njemu uvedena metrika d. Kratkoće radi, umjesto oznake (X,d), mi ćemo za metrički prostor skoro uvijek koristiti jednostavno oznaku X, kad god je jasno o kojoj je metrici riječ.

Za uslove $(M1) - (M4)$ kažemo da su aksiomi metrike, a pojedinačno to su *nenegativnost (pozitivna definitnost)* $(M1)$, *strogost* $(M2)$, *simetričnost* $(M3)$ i *nejednakost trougla* $(M4)$. Uslov $(M2)$ često nazivamo i uslov identičnosti ili uslov nedegenerisanosti.

U prethodnom poglavlju smo vidjeli da kombinujući ove uslove, slabeći ih ili mjenjajući drugim, dobijamo razne vrste prostora. Tako smo imali da ukoliko uslov $(M2)$ zamijenimo slabijim uslovom, $x = y$ onda $d(x,y) = 0$, za d kažemo da je *pseudometrika*. Ukoliko se iz aksioma ispusti uslov $(M3)$, za d kažemo da je *kvazimetrika*. Ako uslov $(M4)$ zamijenimo uslovom (M^*4), koji je jači od uslova nejednakosti trougla jer očigledno vrijedi

$$\max\{d(x,z), d(z,y)\} \leq d(x,z) + d(z,y) \ ,$$

d nazivamo *ultrametrikom*. Pri tome pod terminom "jači" podrazumijevamo da ako je neki prostor ultrametrički, on je onda i metrički (obrat ne mora da vrijedi). Ovime je potvrđena činjenica da su pojmovi uvedeni u prethodnom poglavlju "slabiji" od uslova za metriku i da je termin "predmetrički prostori" opravdan.

Primijetimo da je uslov $(M1)$ suvišan, to jest da se on može dobiti iz preostala tri uslova metrike. Zaista, neka su $x, y \in X$ proizvoljni. Tada vrijedi

$$0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(x,y) = 2d(x,y) \ ,$$

3 Kompletnost metričkih prostora

U ranijim kursevima matematičke analize upoznali smo se sa Cauchyjevim[7] kriterijem konvergencije numeričkih nizova i redova. Taj kriterij je važio u metričkom prostoru realnih brojeva, ali kao što ćemo vidjeti, u opštem slučaju metričkih prostora sličan kriterij ne postoji. Upravo ta činjenica dovodi nas do jedne od najvažnijih osobina metričkih prostora, pojma kompletnosti prostora.

3.1 Kompletnost

Definicija 3.1

Neka je (X,d) metrički prostor. Za niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ kažemo da je Cauchyjev niz ako i samo ako vrijedi

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n,m \in \mathbb{N})(n,m \geq n_0 \;\Rightarrow d(x_n,x_m) < \varepsilon)\ .$$

Drugačije rečeno, niz je Cauchyjev ako i samo ako vrijedi

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n,x_m) = 0\ .$$

Primjer 69. *Posmatrajmo funkcionalni niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C[0,1]$, zadat sa $f_n(t) = t^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $t \in [0,1]$).*
Neka su $n,m \in \mathbb{N}$ i bez umanjenja opštosti neka je $n < m$. Za $t = 1$ imamo $|f_n(1) - f_m(1)| = 0$. Za $t \in [0,1)$ imamo

$$|f_n(t) - f_m(t)| = |t^n - t^m| = t^n(1 - t^{m-n}) \leq t^n\ .$$

[7] Augustin Louis Cauchy 1789-1857, francuski matematičar

Puštajući da n teži u beskonačnost, desna strana teži ka 0. Iz svega ovoga možemo zaključiti

$$d(f_n,f_m) = \max_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f_m(t)| \to 0 \ , \ (n,m\to\infty) \ .$$

Dakle, posmatrani niz je Cauchyjev. $\diamondsuit$

Primjer 70. *Posmatrajmo numerički red* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. *Formirajmo niz njegovih parcijalnih suma*

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}} .$$

Neka su $m,n\in\mathbb{N}$ različiti i neka je $n<m$, tada vrijedi

$$s_m - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{m} \ .$$

Ako specijalno uzmemo da je $m=2n$, vrijedit će aproksimacija

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \ ,$$

što nam govori da niz $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nije Cauchyjev niz. $\diamondsuit$

Termin "Cauchyjev niz" definisan je metrikom datog prostora, a to će onda uticati na pojavu da neki niz u nekom skupu sa jednom metrikom jeste, ali sa drugom metrikom nije Cauchyjev niz.

Primjer 71. *Na skupu $\mathbb{R}$ sa standardnom metrikom niz $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ nije Cauchyjev niz jer za $n\neq m$*

$$|x_n - x_m| = |n-m| \not\to 0 \ , \ n,m\to\infty \ .$$

Definišimo na $\mathbb{R}$ metriku sa

$$d^*(x,y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} \ , \ x,y\in\mathbb{R} \ .$$

(Pokazati da je d metrika!) Posmatramo li isti niz sa ovom metrikom imamo da za proizvoljne $n,m\in\mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned} d^*(x_n,x_m) = d^*(n,m) &= \frac{|n-m|}{\sqrt{1+n^2}\sqrt{1+m^2}} \\ &\leq \frac{\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}} \leq \left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right| \\ &\leq \frac{1}{n}+\frac{1}{m} \ \to \ 0 \ , \ n,m\to\infty \ . \end{aligned}$$

Dakle, niz $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeste Cauchyjev u $\mathbb{R}$ ali sa metrikom d^*. $\diamondsuit$

TEOREM 3.2

Uniformno neprekidno preslikavanje slika Cauchyjeve nizove u Cauchyjeve nizove.

Dokaz : Neka je $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ uniformno neprekidno preslikavanje i neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan Cauchyjev niz u X. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, tada zbog uniformne neprekidnosti preslikavanja f postoji $\delta > 0$, tako da je za proizvoljne $x, y \in X$, čim je $d_X(x,y) < \delta$, onda je $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.
Za nađeno δ, kako je niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za proizvoljne $n, m \in \mathbb{N}$, čim je $n, m \geq n_0$, onda je $d_X(x_n, x_m) < \delta$. Za takve n i m će onda važiti i $d_Y(f(x_n), f(y_m)) < \varepsilon$. Ovo ne znači ništa drugo do da je i niz $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ takođe Cauchyjev niz. □

U opštem slučaju neprekidno preslikavanje ne preslikava Cauchyjev niz u Cauchyjev niz. Naime, posmatrajmo preslikavanje $f(x) = \frac{1}{x}$ na intervalu $(0, +\infty)$. Ono je neprekidno i pri tome je niz $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev u $\mathbb{R}$, ali $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$, a niz $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ nije Cauchyjev u $\mathbb{R}$.

TEOREM 3.3

Svaki Cauchyjev niz je ograničen.

Dokaz : Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz. Na osnovu definicije Cauchyjevog niza, stavljajući $n = n_0$ imamo

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall m \geq n_0)\ d(x_m, x_{n_0}) < \varepsilon\ .$$

Ovo znači da se svi članovi niza, osim njih konačno mnogo, nalaze u kugli $B(x_{n_0}, \varepsilon)$. Označimo sa

$$R = \max\{d(x_1, x_{n_0}), d(x_2, x_{n_0}), ..., d(x_{n_0-1}, x_{n_0})\}\ .$$

Jasno je sada da za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_n \in B(x_{n_0}, R+\varepsilon)$, to jest niz je ograničen. □

Primjer 72. *Gornji teorem u kontrapoziciji znači da ako niz nije ograničen, onda nije Cauchyjev niz. Ako posmatramo niz čiji je opšti član* $x_n = \log n$*, zbog neograničenosti (*$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$*) on nije Cauchyjev. Primijetimo sljedeće:*

$$|x_{n+1} - x_n| = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 0\ ,\ n \to \infty\ .$$

Dakle, činjenica da dovoljno daleki uzastopni članovi ovog niza su proizvoljno bliski nije dovoljna da niz bude Cauchyjev. Primijetimo da je $|x_{2n} - x_n| = \log 2$*.* ♢

4 Separabilnost metričkih prostora

4.1 Pojam separabilnosti

Definicija 4.1

Za metrički prostor kažemo da je separabilan ako i samo ako u njemu postoji najviše prebrojiv svuda gust skup.

Intuitivno, separabilne prostore shvatamo kao "male" prostore jer u njima postoji "mali" (prebrojiv) skup, a koji je "skoro jednak" (svuda gust) čitavom prostoru.

Primjer 86. *Realna prava sa uobičajenom metrikom je primjer separabilnog prostora jer je* $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ *(*$\mathbb{Q}$ *je svuda gust u* $\mathbb{R}$*) i* $\mathbb{Q}$ *je prebrojiv skup.*

$\mathbb{R}^n$ *je takođe primjer separabilnog prostora, za proizvoljno* $n \in \mathbb{N}$*. Zaista, neka je* $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *proizvoljan. Kako je* $\mathbb{Q}$ *svuda gust u* $\mathbb{R}$*, to za bilo koje* $\varepsilon > 0$ *i za svako* $i = 1, 2, ..., n$*, postoji* $q_i \in \mathbb{Q}$*, tako da važi*

$$|x_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \ .$$

Posmatrajmo sada ovako konstruisanu tačku $q = (q_1, q_2, ..., q_n) \in \mathbb{Q}^n$*. Vrijedi,*

$$d(x, q) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - q_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon \ .$$

Dakle, $\mathbb{Q}^n$ *je svuda gust skup u* $\mathbb{R}^n$*, a kako je on i prebrojiv skup, to je* $\mathbb{R}^n$ *separabilan.* $\diamondsuit$

Primjer 87. *Separabilni su i prostori l_p $(1 \leq p < \infty)$, c, c_0 ali prostor l_∞ nije separabilan.*

Da pokažemo neseparabilnost prostora l_∞, posmatrajmo skup svih nizova čije su koordinate zapisane samo sa 0 i 1,

$$A = \{(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (\forall n \in \mathbb{N})\xi_n \in \{0,1\}\} \ .$$

Ovakvih nizova ima kontinum mnogo (možemo ih interpretirati kao binarne zapise realnih brojeva iz $[0,1]$) i pri tome je očigledno $A \subset l_\infty$. Za proizvoljne $x,y \in A$, vrijedi

$$d(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_i - y_i| = 1 \ . \tag{4.1}$$

Pretpostavimo sada da u l_∞ postoji svuda gust skup. To bi značilo da u proizvoljnoj okolini proizvoljne tačke iz l_∞, mora postojati bar jedna tačka iz tog svuda gustog skupa. Ali to bi onda moralo vrijediti i za tačke skupa A. Međutim, zbog (4.1), u kugli $B(x,r)$, gdje je $x \in A$ i $r < 1$, osim tačke x, nema drugih tačaka iz A. Dakle, da bi svaku tačku "dobro aproksimirali", u svakoj ovakvoj kugli bi morala biti bar jedna tačka iz svuda gustog skupa. To bi opet značilo da tačaka u svuda gustom skupu mora biti bar onoliko koliko ima ovakvih kugli, a ovih opet ima koliko ima tačaka u A, to jest kontinuum mnogo. Dakle, ako bi i postojao svuda gust skup u l_∞, on ne bi mogao biti najviše prebrojiv, pa l_∞ nije separabilan prostor. $\diamondsuit$

Primjer 88. *Prostor $C[a,b]$ je separabilan, a tu tvrdnju imamo iz poznatog Stone-Weierstrassovog teorema. Tvrdnja ovog teorema ne znači ništa drugo do da je skup svih polinomijalnih funkcija svuda gust u $C[a,b]$. Naravno, polinoma sa realnim koeficijentima ima kontinuum mnogo, ali možemo posmatrati samo polinome sa racionalnim koeficijentima kojih onda ima prebrojivo mnogo, a kojih će skup i dalje biti svuda gust u $C[a,b]$.* $\diamondsuit$

Teorem 4.2

Neprekidna slika svuda gustog skupa je svuda gust skup.

Dokaz : Neka su (X,d_X) i (Y,d_Y) metrički prostori, $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje i D svuda gust u X. Neka su $\varepsilon > 0$ i $z \in f(X)$ proizvoljni. Postoji $x \in X$ takav da je $f(x) = z$. Zbog neprekidnosti preslikavanja f, postoji $\delta > 0$ takav da čim je $d_X(x,y) < \delta$, onda je $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Kako je D svuda gust u X, to postoji $y^* \in D$ tako da je $d_X(x,y^*) < \delta$, a to onda znači da je $d_Y(f(x), f(y^*)) = d_Y(z,w) < \varepsilon$, gdje je $w = f(y^*) \in f(D)$. Dakle, $f(D)$ je gust u $f(X)$. $\square$

5 Povezanost metričkih prostora

Posmatrajmo sljedeći motivacioni primjer:
Neka je (X,d) metrički prostor gdje je X neprazan skup, a d diskretna metrika. Neka je $x \in X$ proizvoljan. Tada je $B\left(x, \frac{1}{2}\right) = \{x\}$ te zaključujemo da je skup $\{x\}$ otvoren. Kako je svaki skup jednak uniji svojih singltona, to je svaki skup $A \subseteq X$ otvoren, a samim tim i zatvoren (jer je $X \setminus A$ otvoren takođe). Dakle, u prostoru sa diskretnom metrikom svi skupovi su istovremeno i otvoreni i zatvoreni.

Intuitivno, prostor je povezan ako je "sastavljen" iz jednog komada ili prostor je nepovezan ako ga se može prikazati kao uniju dva neprazna "odvojena" dijela. Znamo da u svakom metričkom prostoru (X,d) prazan skup i X su i otvoreni i zatvoreni skupovi. Gore razmatrani primjer nam pokazuje da postoje metrički prostori u kojima i neki drugi skupovi osim praznog skupa i cijelog prostora, mogu biti istovremeno i otvoreni i zatvoreni. Primijetimo da ako je neki skup u metričkom prostoru otvoreno-zatvoren, onda je i njegov komplement otvoreno-zatvoren, što će značiti da se takav prostor može predstaviti kao unija dva neprazna i na neki način "odvojena" skupa. Naravno, da bismo bili precizniji moramo jasnije iskazati pojam "odvojenih" skupova. Na primjer, skup $\mathbb{R}$ zamišljamo iz jednog dijela (kao realna prava), dakle povezan, iako se može predstaviti kao $\mathbb{R} = A \cup B$, gdje su $A = (-\infty, 0)$ i $B = [0, +\infty)$ disjunktni neprazni skupovi. Jasno je da pojam "odvojeni" treba da ima nešto šire značenje od pojma "disjunktni".
Izbacimo li element 0 iz skupa $\mathbb{R}$, to jest posmatrajmo skup $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on je očigledno nepovezan jer se sastoji iz dva dijela $X = A \cup B$, gdje su $A = (-\infty, 0)$ i $B = (0, +\infty)$. Skupovi A i B su neprazni i disjunktni, šta više zadovoljavaju i osobine:

i) oba su otvoreni u X,

ii) oba su zatvoreni u X,

iii) $A\cap\overline{B}=\overline{A}\cap B=\varnothing$.

Upravo osobina iii) je onaj bitni dio koji karakteriše "odvojenost" skupova.

Definicija 5.1

Neka su A i B podskupovi metričkog prostora (X,d). Kažemo da su skupovi A i B odvojeni (separisani) ako vrijedi $A\cap\overline{B}=\overline{A}\cap B=\varnothing$.

Iz same definicije je jasno da su odvojeni skupovi i disjunktni. Trivijalno vrijedi i da su podskupovi odvojenih skupova takođe odvojeni.

Primjer 89. *U $\mathbb{R}$, skupovi $A=(-\infty,0)$ i $B=[0,+\infty)$ jesu disjunktni ali kako je $\overline{A}=(-\infty,0]$, onda je $\overline{A}\cap B=\{0\}\neq\varnothing$, te dati skupovi nisu odvojeni.*
U $\mathbb{R}^2$, skupovi

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\leq 1\}\quad i\quad \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid (x-2)^2+y^2<1\}$$

su primjer disjunktnih ali ne i odvojenih skupova. $\diamondsuit$

Primjer 90. *U $\mathbb{R}$, skupovi $A=(-\infty,0)$ i $B=(0,+\infty)$ su odvojeni jer je*

$$\overline{A}\cap B=(-\infty,0]\cap(0,+\infty)=\varnothing\quad i\quad A\cap\overline{B}=(-\infty,0)\cap[0,+\infty)=\varnothing\ ,$$

ali primijetimo da je $\overline{A}\cap\overline{B}=\{0\}\neq\varnothing$. $\diamondsuit$

Gornja dva primjera nam govore da je osobina odvojenosti jača od osobine disjunktnosti skupova, ali da je slabija od disjunktnosti zatvorenja skupova.

Lema 5.2

Neka su $A,B\subseteq Y\subseteq X$. Skupovi A i B su odvojeni u Y ako i samo ako su odvojeni u X.

Dokaz: Iz topologije je poznato da je $cl_Y(B)=Y\cap cl_X(B)$ (oznaka $cl_A(B)$ označava zatvorenje skupa B u prostoru A). Zato imamo,

$$\begin{aligned} A\cap cl_Y(B)=\varnothing &\iff A\cap(Y\cap cl_X(B))=\varnothing\\ &\iff (A\cap Y)\cap cl_X(B)=\varnothing\\ &\iff A\cap cl_X(B)=A\cap\overline{B}=\varnothing\ . \end{aligned}\qquad\square$$

6 Kompaktnost u metričkim prostorima

Jedna od istaknutijih osobina ograničenog i zatvorenog intervala $[a,b]$ na realnoj pravoj je činjenica da se iz svakog niza u njemu može izdvojiti podniz koji je konvergentan u njemu. To se neće dogoditi sa intervalom oblika $[a,+\infty)$, primjer je niz $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, niti sa intervalom $(0,1)$, primjer je niz $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Tu činjenicu nam obezbjeđuje Bolzano-Weierstrassov teorem koji nam govori da svaki beskonačan i ograničen skup na realnoj pravoj ima bar jednu tačku nagomilavanja, a uz zatvorenost skupa, ta tačka pripada tom skupu.
Jedna druga karakterizacija ograničenih i zatvorenih skupova na $\mathbb{R}$, bitno povezana sa Bolzano-Weierstrassovim teoremom, jeste poznati Heine-Borelov teorem u kome se tvrdi da se iz svakog otvorenog pokrivača ograničenog i zatvorenog skupa na $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$, može izdvojiti konačan potpokrivač.

6.1 Definicija kompaktnosti i karakterizacije

Činjenicu o izdvajanju konačnog potpokrivača iz proizvoljnog pokrivača nekog skupa smo u opštoj topologiji definisali terminom kompaktnosti. U metričkim prostorima, zbog bogatije strukture, pojam kompaktnosti ćemo uvesti na nešto drugačiji način, preko konvergencije, a za tako definisan pojam uobičajeno se koristi termin sekvencijalna kompaktnost. Kako su to ekvivalentni pojmovi, mi ćemo se jednostavnosti radi držati termina kompaktnosti.

Definicija 6.1

Za metrički prostor kažemo da je kompaktan ako i samo ako se iz svakog njegovog niza može izdvojiti konvergentan podniz.

Definicija 6.2

Neka je M podskup metričkog prostora X. Za skup M kažemo da je relativno kompaktan ako se iz svakog niza u M može izdvojiti konvergentan podniz, to jest

$$(\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M)(\exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}})\ x_{n_k} \to x_0\ ,\ (k\to\infty)\ ,\ x_0 \in X\ .$$

Ako je $x_0 \in M$, kažemo da je M kompaktan skup.

Gornja definicija ističe razliku između kompaktnosti i relativne kompaktnosti činjenicom da tačka knvergencije pripada ili ne mora pripadati samom skupu. To dovodi do jasne razlike između pojmova kompaktnosti i relativne kompaktnosti, to jest relativna kompaktnost i zatvorenost skupa ekvivalentne su kompaktnosti skupa.

Naredno tvrđenje nam daje vezu kompaktnosti kako je definisana u metričkim prostorima, osobine konačnih presjeka (*finite intersection property*, familija skupova ima osobinu konačnih presjeka ako presjek njene proizvoljne potfamilije nije prazan) i pojma kompaktnosti kako smo ga uveli u opštoj toplogiji.

Teorem 6.3

Neka je (X,d) metrički prostor. Naredna tvrđenja su ekvivalentna:

1. (X,d) je kompaktan.
2. Iz svakog otvorenog pokrivača od X se može izdvojiti konačan potpokrivač.
3. Svaka familija zatvorenih skupova u (X,d) sa osobinom konačnih presjeka ima neprazan presjek.
4. Svaka familija zatvorenih skupova u (X,d) koja ima prazan presjek, sadrži konačnu potfamiliju čiji je presjek prazan.

Teorem 6.4

Svaki kompaktan skup je zatvoren.

Dokaz : Neka je M kompaktan skup i neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$, takav da $x_n \to x_0$ kada $n\to\infty$. Zbog kompaktnosti skupa, postoji $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, takav da $x_{n_k} \to x'$ $(k\to\infty)$ i pri tome je $x' \in M$. Zbog jedinstvenosti tačke konvergencije,

7 Banachov teorem o fiksnoj tački

Banachov teorem o fiksnoj tački (takođe poznat kao *teorem o kontraktivnom preslikavanju* ili *princip kontraktivnog preslikavanja*) je važan alat u teoriji metričkih prostora. On garantuje postojanje i jedinstvenost nepokretnih tačaka određenih preslikavanja iz metričkog prostora u samog sebe i daje konstruktivan metod za pronalaženje tih nepokretnih tačaka. Teorem je dobio ime po Stefanu Banachu[12] i predstavlja njegov doktorski rad rađen 1920., a objavljen 1922. godine.

7.1 Kontrakcija i fiksna tačka

Definicija 7.1

Neka je $f : X \to X$ proizvoljno preslikavanje. Za tačku $x \in X$ kažemo da je fiksna tačka preslikavanja f ako i samo ako vrijedi $f(x) = x$.

Primjer 100. *Za preslikavanje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zadato sa $f(x) = x^3$, tačke $x = 1$, $x = -1$ i $x = 0$ imaju osobinu $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$ i $f(0) = 0$ te su one fiksne tačke posmatranog preslikavanja.* $\diamondsuit$

Primjer 101. *Posmatrajmo preslikavanje $A : C[0,1] \to C[0,1]$, zadato sa*

$$Af(x) = f(0) + \int_0^x f(t)dt \ .$$

[12] Stefan Banach 1892–1945, poljski matematičar

Za funkciju $f(x)=e^x \in C[0,1]$, vrijedi

$$Af(x)=e^0+\int_0^x e^t dt = 1+e^x-1=e^x \ ,$$

to jest $f(x)=e^x$ je fiksna tačka preslikavanja A. $\diamondsuit$

DEFINICIJA 7.2

Za preslikavanje $f:X\to X$ kažemo da je kontraktivno ako i samo ako postoji konstanta $q\in[0,1)$, takva da za proizvoljne $x,y\in X$ vrijedi

$$d(f(x),f(y))\leq q\,d(x,y) \ .$$

Broj q tada nazivamo konstanta kontrakcije.

Primjer 102. *Funkcija $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, zadata sa $f(x)=\arctan x$, na osnovu Lagrangeovog teorema zadovoljava*

$$|\arctan x-\arctan y| = \frac{1}{1+\xi^2}|x-y| \ ,$$

za neko $\xi\in\mathbb{R}^+$ i za proizvoljne $x,y\in\mathbb{R}$. Stavimo da je $q=\frac{1}{1+\xi^2}$, jasno $q\in[0,1)$ i ako posmatramo standardnu metriku na $\mathbb{R}$, imamo

$$d(f(x),f(y))\leq q\,d(x,y) \ ,$$

to jest preslikavanje f je kontraktivno. $\diamondsuit$

Osobina kontraktivnosti je očigledno jača od osobine neprekidnosti preslikavanja. Štaviše, jača je i od uniformne neprekidnosti.

TEOREM 7.3

Ako je $f:X\to X$ kontraktivno preslikavanje, tada je f uniformno neprekidno preslikavanje.

Dokaz : Neka je (X,d) metrički prostor i $f:X\to X$ kontraktivno preslikavanje sa konstantom kontrakcije q. Za proizvoljno $\varepsilon>0$, izaberimo $\delta=\frac{\varepsilon}{q}$. Neka su sada $x',x''\in X$ takvi da je $d(x',x'')<\delta$. Sada imamo

$$d(f(x'),f(x''))\leq qd(x',x'')<q\delta=\varepsilon \ ,$$

što znači da je f uniformno neprekidno preslikavanje. $\square$

Nije teško pokazati da za kontraktivna preslikavanja vrijedi tvrđenje,

8 Normirani prostori

Osnovna pretpostavka za izučavanje mnogih problema u matematičkoj analizi jeste postojanje metričke strukture prostora. Kao što smo vidjeli, metrički prostor je skup elemenata u kome možemo mjeriti rastojanje između elemenata. Pri tome smo metriku koristili za definisanje osnovnih koncepata analize, kao što su konvergencija, neprekidnost i kompaktnost.

U metričkim prostorima nismo zahtijevali nikakvu algebarsku strukturu skupa. Međutim, u mnogim primjenama posmatrani elementi skupa su vektori koje karakteriše jedna kvalitativna osobina, "dužina" vektora, a koja se dobija iz pojma norme i ovakve prostore zovemo normiranim prostorima.

8.1 Vektorski prostori

Ponovimo za početak neke elementarne stvari iz linearne algebre, vezane za vektorske prostore.

Definicija 8.1

Neka je Φ ili skup realnih ($\mathbb{R}$) ili skup kompleksnih ($\mathbb{C}$) brojeva. Neprazan apstraktan skup V, snabdjeven sa dvije binarne operacije "$+$" $: V \times V \to V$ (sabiranje) i "$\cdot$" $: \Phi \times V \to V$ (množenje skalarom) je (realan ili kompleksan) vektorski prostor ako i samo ako su za sve $a, b \in \Phi$ i sve $u, v, w \in V$ zadovoljeni sljedeći uslovi:

1. $u + v \in V$ (zatvorenost operacije sabiranja)
2. $u + v = v + u$ (komutativnost sabiranja)

3. $u+(v+w)=(u+v)+w$ (asocijativnost sabiranja)
4. $(\exists 0\in V)(\forall u\in V)\;\; 0+u=u$ (egzistencija neutralnog elementa za sabiranje)
5. $(\forall u\in V)(\exists u^*\in V)\;\; u+u^*=0$ (egzistencija inverznog elementa za sabiranje)
6. $a\cdot u\in V$ (zatvorenost operacije množenja sa skalarom)
7. $a(bu)=(ab)u$ (asocijativnost množenja sa skalarom)
8. $(\exists 1\in\Phi)(\forall u\in V)\;\; 1\cdot u=u$ (egzistencija neutralnog elementa za množenje skalarom)
9. $a\cdot(u+v)=a\cdot u+a\cdot v$ (distributivnost množenja skalarom u odnosu na sabiranje)
10. $(a+b)\cdot u=a\cdot u+b\cdot u$ (distributivnost u odnosu na sabiranje skalara)

Elemente skupa Φ nazivamo skalarima, a elemente skupa V nazivamo vektorima. Množenje skalarom, $a\cdot u$, uobičajeno zapisujemo sa au, a za izraz $u+(-v)$ koristimo kraći zapis sa $u-v$. Gornja definicija radi sa proizvoljnim apstraktnim skupom V, ne uzimajući u obzir o kakvoj vrsti elemenata je riječ. Tako skup V može biti skup realnih brojeva, ali takođe može biti skup beskonačnih nizova, skup integrabilnih funkcija, skup matrica i slično. Iz konteksta će uvijek biti jasno sa kakvim objektima radimo i u daljem, kad god kažemo "prostor", podrazumijevamo vektorski prostor. U ispitivanju da li je V vektorski prostor, prije ispitivanja svih gornjih deset osobina, uobičajeno je prvo ispitati,

- da li V sadrži nula element i
- da li je V zatvoren u odnosu na operacije sabiranja i množenja skalarom?

Ukoliko je odgovor negativan na jedno od ovih pitanja, V nije vektorski prostor.

Primjer 107. *Za $1\le p<+\infty$, posmatrajmo prostor $l_p(\Phi)$, svih sa p-tim stepenom sumabilnih nizova u Φ (realnih za $\Phi=\mathbb{R}$ ili kompleksnih za $\Phi=\mathbb{C}$),*

$$l_p(\Phi)=\left\{x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n\in\Phi\ (n\in\mathbb{N}),\ \sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n|^p<+\infty\right\}.$$

Za $x,y\in l_p(\Phi)$ i $\lambda\in\Phi$, neka je

$$x+y\overset{def}{=}(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}\ ,\ \lambda x\overset{def}{=}(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ .$$

Jednostavno se provjerava da sa ovako definisanim operacijama $l_p(\Phi)$ zaista jeste vektorski prostor. Jedino nije jasna zatvorenost operacije "+"! Neka su $x,y \in l_p(\Phi)$ $(1 \le p < \infty)$. Kako vrijedi nejednakost $|a+b|^p \le 2^p(|a|^p+|b|^p)$, imamo

$$\sum_{i=1}^{n}|x_n+y_n|^p \le \sum_{i=1}^{n} 2^p(|x_n|^p+|y_n|^p) \le 2^p\left(\sum_{i=1}^{\infty}(|x_n|^p+\sum_{i=1}^{\infty}|y_n|^p)\right) < +\infty \ .$$

Ovo znači da je niz $x+y=(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sumabilan sa p-tim stepenom odnosno, $x+y \in l_p(\Phi)$.

Na isti način možemo i na $l_\infty(\Phi)$ definisati operacije sabiranja i množenja skalarom, sa čime je i $l_\infty(\Phi)$ vektorski prostor. $\diamondsuit$

DEFINICIJA 8.2

Neka je V vektorski prostor. Za skup $W \subseteq V$ kažemo da je potprostor prostora V ako i samo ako vrijedi

1. $(\forall u,v \in W)\ u+v \in W$.
2. $(\forall a \in \Phi)(\forall u \in W)\ au \in W$.

Drugačije rečeno, $W \subseteq V$ je potprostor ako je on sam za sebe vektorski prostor. Za skup W u tom slučaju kažemo da je i lineal ili linearna mnogostrukost u V.

Primjer 108. *Neka je $C[0,1]$ skup realnih, na $[0,1]$ definisanih i neprekidnih funkcija i neka je $L_1[0,1]$ skup realnih funkcija definisanih na $[0,1]$, sa osobinom*

$$\int_0^1 |f(t)|dt < +\infty \ , \ f \in L_1[0,1] \ .$$

Na oba skupa možemo uvesti operacije

$$(f+g)(t) \overset{def}{=} f(t)+g(t) \ , \ (\lambda f)(t) \overset{def}{=} \lambda f(t) \ ,$$

sa kojima oni postaju vektorski prostori.

Neka je sada $f \in C[0,1]$. Zbog neprekidnosti funkcije na ograničenom i zatvorenom skupu, ona dostiže svoj maksimum, te postoji $M>0$, takav da je $|f(t)| \le M$, za $t \in [0,1]$, a time je i $\int_0^1 |f(t)|dt \le M < +\infty$, odnosno $f \in L_1[0,1]$. Posmatrajmo sada funkciju $f(t)=t^{-1/2}$. Ona nije neprekidna na $[0,1]$, ali za nju vrijedi

$$\int_0^1 \left|t^{-1/2}\right| dt = 2t^{1/2}\Big|_0^1 = 2 < +\infty \ .$$

Dakle, $f \in L_1[0,1]$ pa zaključujemo da je $C[0,1]$ strogi potprostor prostora $L_1[0,1]$. $\diamondsuit$

način,

$$x \in B[0,1]\ ,\ ||x||_1 = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|\ ,\ ||x||_2 = \int_0^1 |x(t)|dt\ .$$

Čitaocu je ostavljeno da pokaže da su ovako definisane funkcije, norme na $B[0,1]$. Posmatrajmo niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, zadat sa

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & ;\quad x \in \left[0,\frac{1}{n}\right) \\ 0 & ;\quad x \in \left[\frac{1}{n},1\right] \end{cases}\ ,\ n \in \mathbb{N}\ .$$

Lahko sada provjeravamo da vrijedi

$$||f_n||_1 = \max_{t\in[0,1]} |f_n(t)| = 1\ ,\ \textit{odnosno}\ \ ||f_n||_2 = \int_0^1 |f_n(t)|dt = \int_0^{\frac{1}{n}} dt = \frac{1}{n}\ ,\ n \in \mathbb{N}\ .$$

Ovo znači da je

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n||_1 = 1\ ,\ \lim_{n\to\infty} ||f_n||_2 = 0\ ,$$

iz čega je očigledna neekvivalentnost definisanih normi na $B[0,1]$. $\diamondsuit$

8.3 Banachovi prostori

Iz metričkih prostora preuzimamo i definiciju kompletnosti. Normiran prostor je kompletan, ako je u njemu svaki Cauchyjev niz konvergentan. Sada definišimo i glavni pojam ovog dijela.

Definicija 8.31

Kompletan, normiran, vektorski prostor se naziva Banachov prostor.

Primjer 119. *Neki od standardnih primjera Banachovih prostora su c, c_0, l_p ($1 \le p \le \infty$), $C[a,b]$, $L_p[a,b]$, na kojima su norme uvedene kao u Primjeru 115.* $\diamondsuit$

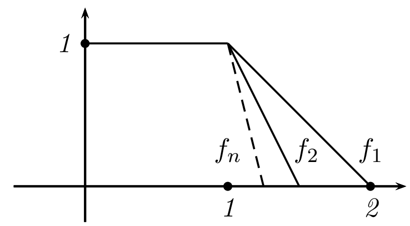
Sljedećim primjerom dajemo normiran vektorski prostor koji nije Banachov.

Primjer 120. *Posmatrajmo skup $C[0,2]$, neprekidnih funkcija na segmentu $[0,2]$. Za $x \in C[0,2]$ stavimo*

$$||x|| = \int_0^2 |x(t)|dt\ ,$$

čime smo definisali normu (provjeriti!) na $C[0,2]$. Posmatrajmo sada sljedeći niz funkcija. Za $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in [0,1) \\ 1+n-nx & ; \quad x \in \left[1, 1+\frac{1}{n}\right] \\ 0 & ; \quad x \in \left(1+\frac{1}{n}, 2\right] \end{cases} .$$



Za proizvoljne $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, imamo

$$||f_n - f_m|| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \to 0\ ,\ (n,m \to \infty)\ .$$

Dakle, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyjev niz. Međutim, očigledno da $f_n \to f^*$ $(n \to \infty)$, gdje je

$$f^*(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in [0,1) \\ 0 & ; \quad x \in [1,2] \end{cases}$$

ali $f^* \notin C[0,2]$, te dati Cauchyjev niz nije konvergentan. ♢

Kao i kod metričkih prostora i ovdje navodimo ekvivalentan teorem o kompletiranju.

Teorem 8.32

Svaki normiran vektorski prostor se može kompletirati, to jest za svaki normiran vektorski prostor X, postoji kompletan normiran vektorski prostor $\overline{X}$, takav da je X svuda gust u $\overline{X}$.

Definicija 8.33

Neka je X Banachov prostor i neka je $Y \subseteq X$. Ako je Y sam za sebe Banachov prostor u odnosu na algebarsku i metričku strukturu koju u njemu inducira odgovarajuća struktura iz X, kažemo da je Y Banachov potprostor od X.

Sama činjenica da je Y vektorski potprostor od X ne mora značiti da je on i Banachov potprostor, jer se pojam ”vektorski potprostor” odnosi samo na algebarsku strukturu, dok se pojam ”Banachov potprostor” odnosi i na algebarsku ali i na metričku strukturu skupa.

Primjer 121. *Posmatrajmo skup $A \subset l_p$ koji u sebi sadrži sve nizove koji imaju samo konačno mnogo koordinata različitih od nule, to jest*

$$x \in A \Leftrightarrow x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)\ .$$

Dodatak 1: O nekim prostorima funkcija

Kada radimo sa brojevima kao što su realni brojevi $x \in \mathbb{R}$ ili kompleksni brojevi $z \in \mathbb{C}$, postoji jednoznačno (nedvosmisleno) mjerenje veličina tih brojeva, u notaciji $|x|$ i $|z|$, kojim određujemo koji su od tih brojeva veći, a koji su manji. Takvo mjerenje možemo iskoristiti za definisanje udaljenosti između realnih brojeva x i y, odnosno između kompleksnih brojeva z i w, u notaciji $|x - y|$ i $|z - w|$, sa čime dobijamo kvantitativnu mjeru koji su brojevi blizu, a koji su daleko jedan od drugog.
Situacija postaje mnogo komplikovanija kada radimo sa objektima koji imaju više stepena slobode. Posmatrajmo kao ilustrativan primjer šta bi bila "veličina" trodimenzionalnog pravouglog paralelepipeda. Postoji mnogo načina da bismo izrazili ovu veličinu: dužina, širina, visina, zapremina, površina omotača, dijametar (dužina velike dijagonale) ili nešto drugo. Nažalost, ove veličine ne daju ekvivalentna poređenja: paralelepiped A može biti duži i imati veću zapreminu od paralelepipeda B, ali paralelepiped B može biti širi i veće površine od paralelepipeda A. Zbog toga se napušta ideja da bi trebalo da postoji samo jedan pojam "veličine" za paralelepipede i umjesto toga prihvatamo da postoji mnoštvo takvih pojmova, koji svaki za sebe ima određenu upotrebu. Tako bismo imali mogućnost da neki žele razlikovati velike od malih paralelepipeda po zapremini, ali isto tako neki bi željeli razlikovati ih po površini (zbog količine materijala za njihovu izradu). Naravno, postoji nekoliko veza između različitih pojmova "veličine" za paralelepipede (na primjer, izoperimetrična nejednakost omogućava da se dobije gornja granica za zapreminu preko površine paralelepipeda), tako da situacija nije toliko konfuzna kako se čini na prvi pogled.

Posmatrajmo sada funkcije sa fiksnim domenom i kodomenom. Ovi objekti imaju beskonačno mnogo stepena slobode, pa ne iznenađuje činjenica da imamo beskonačno mnogo načina za "veličinu" ovakvih objekata, od kojih će svaki dati očekivano različit odgovor na pitanje "Koliko je velika funkcija f?", odnosno direktno vezano pitanje "Koliko su blizu dvije funkcije f i g?". U nekim slučajevima funkcija će biti beskonačno velika u nekom načinu mjerenja, a konačna u drugom načinu, odnosno dvije funkcije će biti blizu jedna drugoj u jednom načinu mjerenja, a veoma daleke u drugom načinu. Opet se čini da je situacija sa mjerenjem haotična, ali to samo odražava činjenicu da funkcije imaju mnogo različitih karakteristika i sve ovisi o korisnosti karakteristike u konkretnoj primjeni. U matematičkoj analizi sve ovo je ugrađeno u varijante *standardnih prostora funkcija* i njima pridruženih *normi*, koji nam omogućavaju opisivati funkcije i kvalitativno i kvantitativno.

Neka je A podskup metričkog prostora M i neka je N normiran prostor. Sa $F(A,N)$ označimo skup svih mogućih preslikavanja sa A u N. Za $f,g \in F(A,N)$, $\lambda \in \Phi$ (Φ je $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$) i $x \in A$ uvodimo operacije sabiranja i množenja skalarom na sljedeći način,

$$(f+g)(x) \stackrel{def}{=} f(x)+g(x) \quad , \quad (\lambda f)(x) \stackrel{def}{=} \lambda f(x) \ .$$

Sa ovim operacijama $F(A,N)$ postaje vektorski prostor. Za beskonačan skup A, možemo posmatrati niz $(f(x))_{x\in A}$ čije su pojedinačne vrijednosti komponente vektora. Kako imamo beskonačno mnogo nezavisnih komponenti (po jedna za svako x), ovakav prostor funkcija je beskonačnodimenzionalan.
Ovakav prostor *svih* funkcija je preglomazan za posmatranje, pa se uobičajeno vrši neka restrikcija na potprostor funkcija sa nekom željenom osobinom funkcije, kao što su ograničenost, periodičnost, neprekidnost, diferencijabilnost i slično.

Prostor neprekidnih funkcija

Specificiramo li osobinu neprekidnosti funkcije, iz $F(A,N)$ izdvajamo vektorski potprostor svih neprekidnih funkcija na A sa vrijednostima u N, koga onda označavamo sa

$$C(A,N) = \{f : A \to N \mid f \text{ neprekidna}\} \ .$$

Najčešća situacija u primjenama je kada je $M = \mathbb{R}$ i $N = \mathbb{R}$, tako da ćemo u daljem što slijedi posmatrati vektorski prostor $C(A,\mathbb{R})$ koga onda kratkoće radi označavamo sa $C(A)$, gdje je $A \subseteq \mathbb{R}$. Opet, standardna situacija je kada je $A = [a,b]$ ($a,b \in \mathbb{R}$ i $a < b$), te ćemo ovakav prostor jednostavno označavati sa $C[a,b]$.

Lema Neka je $f \in C[a,b]$. Svaka od funkcija

$$||f||_1 = \int_a^b |f(t)|dt \quad , \quad ||f||_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad ||f||_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \ ,$$

predstavlja normu na $C[a,b]$.

Dakle, $(C[a,b], ||\cdot||_1)$, $(C[a,b], ||\cdot||_2)$ i $(C[a,b], ||\cdot||_\infty)$ svaki za sebe predstavlja normiran prostor.

Lema Za $f \in C[a,b]$ vrijedi:

$$||f||_1 \le \sqrt{b-a}\cdot ||f||_2 \quad , \quad ||f||_2 \le \sqrt{b-a}\cdot ||f||_\infty \quad , \quad ||f||_1 \le (b-a)\cdot ||f||_\infty \ .$$