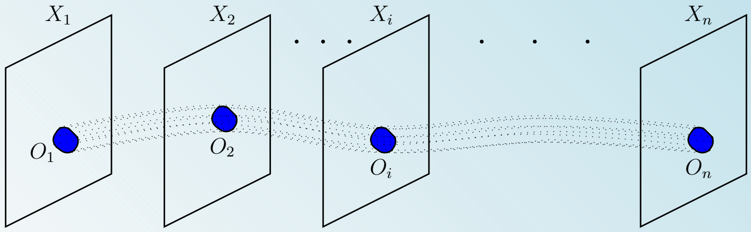
Nermin Okičić Enes Duvnjaković

OPŠTA TOPOLOGIJA



2010.

Sadržaj

1 Uvod **1**
1.1 Skupovi, relacije i preslikavanja 1

2 Topološki prostori **9**
2.1 Topologije 10
2.2 Otvoreni, zatvoreni i otvoreno-zatvoreni skupovi. Okoline. . 15
2.3 Zatvorenje i unutrašnjost skupa 21
2.4 Tačka nagomilavanja, spoljašnjost i rub skupa 28
2.5 Euklidska topologija na $\mathbb{R}$ 32
2.6 Baze i podbaze 36
2.7 Prvi i drugi aksiom prebrojivosti 45
2.8 Relativna topologija i topološki potprostor 50
2.9 Povezanost (Koneksnost) 54

3 Neprekidna preslikavanja **61**
3.1 Neprekidnost 61
3.2 Neprekidnost i povezanost 67
3.3 Homeomorfizmi 71

4 Metrički prostori **77**
4.1 Definicija i primjeri metričkih prostora 77
4.2 Otvoreni skupovi i okoline u metričkim prostorima 81
4.3 Ekvivalentnost metrika 83

5 Produkt i količnički prostori **91**
5.1 Produkt prostori 91

5.2 Količnički (kvocijent) prostori 101

6 Aksiomi separacije **109**
6.1 T_0 i T_1-prostori 110
6.2 T_2-prostori (Hausdorffovi prostori) 113
6.3 T_3-prostori 115
6.4 T_4-prostori 117
6.5 $T_{3\frac{1}{2}}$-prostori (Prostori Tihonova) 121
6.6 Veze između T_i-prostora ($i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4\}$) 125

7 Kompaktnost **129**
7.1 Kompaktnost prostora 130
7.2 Neprekidne funkcije na kompaktu 136

8 Mreže i filteri **141**
8.1 Konvergencija 141
8.1.1 Konvergencija nizova 142
8.1.2 Zatvorenje skupa i konvergencija 144
8.1.3 Podnizovi i konvergencija 145
8.1.4 Konvergencija nizova funkcija 147
8.2 Mreže 153
8.2.1 Mreže i konvergencija 153
8.2.2 Mreže i neprekidnost 157
8.2.3 Podmreže i tačke nagomilavanja 157
8.2.4 Mreže i kompaktnost 161
8.3 Filteri i baze filtera 162
8.3.1 Filteri i konvergencija 164
8.3.2 Ultrafilteri 165
8.4 Veza izmedju mreža i filtera 168

Bibliografija **171**

Indeks **173**

Popis slika **176**

Poglavlje 1

Uvod

1.1 Skupovi, relacije i preslikavanja 1

Budući da ćemo se u ovom kursu služiti rezultatima iz Teorije skupova kao osnovnim alatom, počećemo sa kratkim pregledom potrebnih pojmova i teorema iz te teorije i ostaviti da kasnije dodamo još neke rezultate iz potrebnog predznanja, neophodnih za uvođenje novih pojmova.

Koristićemo klasičnu Zermelo-Frenkelovu aksiomatizaciju teorije skupova, sa aksiomom izbora kao dijelom tog sistema. Po potrebi, upotrebljavaćemo i ekvivalente aksioma izbora, kao što su Zornova lema, Hausdorffov princip maksimalnosti i sl.

1.1 Skupovi, relacije i preslikavanja

Pojam skupa u Teoriji skupova je primitivni pojam, dakle pojam koga ne definišemo. Pored jezika iskazne i predikatske logike, u teoriji skupova se koristimo i simbolom "pripadnosti", "$\in$". Skupovi se sastoje od objekata koje zovemo elementima skupa i pišemo simbolički $x \in A$, za izjavu, x je element skupa A. U suprotnom pišemo $x \notin A$. Skup je kompletno određen svojim elementima, tj. ako dva skupa A i B imaju osobinu da $x \in A$ ako i samo ako $x \in B$, onda kažemo da je $A = B$ i jednakost ovdje znači identičnost. Najuobičajeniji način opisivanja skupova je jasno određivanje njihovih elemenata, kao izjavom:

A je skup svih elemenata x koji imaju osobinu P,

što simbolički zapisujemo kao:

$$A = \{x \mid P(x)\}\ .$$

Ovdje $P(x)$ označava propoziciju (predikat) o x. Slovo x se može zamijeniti bilo kojim drugim slovom,

$$\{x \mid x \in A\} = \{y \mid y \in A\}\ .$$

Prazan skup obilježavamo simbolom $\varnothing$.

Definicija 1.1.1. *Za skup A kažemo da je podskup skupa B, u oznaci $A \subseteq B$, ako vrijedi da je svaki element skupa A ujedno i element skupa B, ili simbolički:*

$$(\forall\ x)(x \in A \Rightarrow x \in B)\ .$$

Skup A je pravi podskup skupa B ako vrijedi $A \subseteq B$ i $A \neq B$, što kraće obilježavamo sa $A \subset B$.

Teorem 1.1.1. *Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Tada vrijedi:*

i) $\varnothing \subseteq A$.

ii) $A \subseteq B\ \wedge\ B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

iii) $A \subseteq B \wedge\ B \subseteq A \Rightarrow A = B$

Definicija 1.1.2. *Unija skupova A i B, u oznaci $A \cup B$, je skup*

$$\{x \mid x \in A\ \vee\ x \in B\}\ .$$

Definicija 1.1.3. *Presjek skupova A i B, u oznaci $A \cap B$, je skup*

$$\{x \mid x \in A\ \wedge\ x \in B\}\ .$$

Dva skupa A i B su *isključivi* odnosno *disjunktni*, ako je $A \cap B = \varnothing$. Ako je $\mathcal{A}$ familija skupova, kažemo da je $\mathcal{A}$ *isključiva familija* ako su svaka dva skupa iz familije $\mathcal{A}$ međusobno isključiva.

Definicija 1.1.4. *Ako je $A \subseteq X$, skup*

$$\{x \in X \mid x \notin A\}\ ,$$

zvaćemo komplement od A i obilježavaćemo ga simbolom A^c.

Poglavlje 2

Topološki prostori

2.1 Topologije 10
2.2 Otvoreni, zatvoreni i otvoreno-zatvoreni skupovi. Okoline. 15
2.3 Zatvorenje i unutrašnjost skupa 21
2.4 Tačka nagomilavanja, spoljašnjost i rub skupa . 28
2.5 Euklidska topologija na $\mathbb{R}$ 32
2.6 Baze i podbaze 36
2.7 Prvi i drugi aksiom prebrojivosti 45
2.8 Relativna topologija i topološki potprostor . . . 50
2.9 Povezanost (Koneksnost) 54

Topologija je disciplina, na određen način srodna geometriji, fundamentalna za mnoge matematičke oblasti, a posebno za matematičku analizu i nije primarna matematička grana. Za njeno sveobuhvatno proučavanje potrebna su znanja iz *Teorije skupova*, *Matematičke analize* i *Algebre*. Pojednostavljeno shvaćeno, može ju se tumačiti kao geometriju u kojoj zanemarujemo dimenzije objekata i njihove konkretne oblike. Sa stanovišta topologije ne pravimo razliku između objekata koji su dobijeni jedan iz drugog nekom neprekidnom transformacijom, npr. stiskanjem, istezanjem, uvrtanjem, okretanjem i sl., ali pravimo razliku ako te objekte sječemo, bušimo ili lijepimo. Riječ *Topologija* dolazi od grčkih riječi $\tau o \pi o \varsigma$ ("mjesto") i $\lambda o g o \varsigma$ ("nauka", "znanje"). Predstavlja jednu od mlađih matematičkih disciplina koja je svoj procvat doživjela u dvadesetom vijeku i omogućila rješavanje nekoliko važnih klasičnih matematičkih problema. Sama topologija kao matematička disciplina se dijeli na *Opštu topologiju* i *Algebarsku topologiju*, a u okviru ove druge se kao posebne izučavaju *Geometrijska topologija* i *Diferencijalna topologija*. Osnovni objekat izučavanja topologije kao discipline je *topološki prostor*, tj. skup sa određenom posebnom strukturom koja se kao i čitava disciplina naziva *topologija*.

Riječ topologija se prvi put pojavljuje u radovima njemačkog matematičara J.B. Listinga [1]. Još ne kao zasebna disciplina, razvija se u radovima Cantora [2], Poenkarea [3], Frecheta [4] i drugih. Hausdorff [5] je 1914 koristio izraz "topološki prostor" i dao definiciju onoga što danas nazivamo "Hausdorffovi prostori". Današnje značenje topoloških prostora potiče iz 1922 od Kuratowskog [6].

2.1 Topologije

Definicija 2.1.1. *Neka je X proizvoljan neprazan skup. Za familiju $\mathcal{T}$ podskupova od X kažemo da je topologija na X ako vrijedi*

i) X i $\varnothing$ pripadaju $\mathcal{T}$,

ii) Proizvoljna unija skupova iz $\mathcal{T}$ pripada $\mathcal{T}$ (konačna ili beskonačna)

iii) Presjek proizvoljna dva skupa iz $\mathcal{T}$ pripada $\mathcal{T}$.

Par $(X, \mathcal{T})$ nazivamo topološki prostor .

Uočavamo u gornjoj definiciji da unijom proizvoljnog broja skupova iz neke topologije, dobijamo opet skup te familije. Uslov *iii)* opet govori da za presjeke to nije slučaj, tj. da presjek dva skupa iz topologije, ostaje u topologiji. Indukcijom onda imamo da će to vrijediti i za presjek konačno mnogo skupova, a kao što ćemo nešto kasnije vidjeti, ovu osobinu nećemo moći prenijeti na proizvoljne presjeke.

Primjer 2.1. Neka je $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i

$$\mathcal{T} = \{X, \varnothing, \{1\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}\} .$$

[1]Johann Benedict Listing - 1808-1882
[2]Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor - 1845-1918
[3]Jules Henri Poincare - 1854-1912
[4]Maurice Rene Frechet - 1878-1973
[5]Felix Hausdorff - 1868-1942
[6]Kazimierz Kuratowski - 1896-1980

POGLAVLJE 3

Neprekidna preslikavanja

3.1	**Neprekidnost**	**61**
3.2	**Neprekidnost i povezanost**	**67**
3.3	**Homeomorfizmi**	**71**

U ovoj glavi posmatraćemo preslikavanja sa proizvoljnog topološkog prostora u proizvoljan topološki prostor i upoznati se detaljnije sa jednom od najvažnijih osobina bilo kog preslikavanja, pojmom neprekidnosti.

3.1 Neprekidnost

U ranijim kursevima matematičke analize već smo se upoznali sa pojmom neprekidnih preslikavanja iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$.

Definicija (I). Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kažemo da je neprekidna u $x_0 \in \mathbb{R}$ ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$, tako da za svako $x \in \mathbb{R}$ za koga je $|x - x_0| < \delta$, vrijedi $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Ako je zadovoljen ovaj uslov, kažemo da je funkcija f neprekida u tački x_0. Ako je f neprekidna u svim tačkama skupa $D \subseteq \mathbb{R}$, onda jednostavno kažemo da je f neprekidna na D.
Naravno, od interesa bi bilo definisati ovaj pojam i u proizvoljnom topološkom prostoru, tj. i kada nemamo "apsolutnu vrijednost" niti "oduzimanje". Sljedećom (ekvivalentnom) definicijom takođe dobijamo pojam neprekidnosti funkcije, ali nešto generalnije.

Definicija (II). Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neprekidna u $x_0 \in \mathbb{R}$ ako za svaki interval $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$, postoji $\delta > 0$ takav da $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$, čim je $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Ovom definicijom smo izbjegli "apsolutnu vrijednost" ali je u igri i dalje "oduzimanje". Sljedećom lemom uspijevamo izbaciti i "oduzimanje".

Lema 3.1.1. *Neka je f preslikavanje sa $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$. f je neprekidno preslikavanje na $\mathbb{R}$, u smislu Definicije (II), ako i samo ako za svako $x_0 \in \mathbb{R}$ i za svaki otvoreni skup V koji sadrži $f(x_0)$, postoji otvoreni skup U koji sadrži tačku x_0, takav da je $f(U) \subseteq V$.*

Dokaz: Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Neka je x_0 proizvoljna tačka u $\mathbb{R}$ i neka je V otvoren skup koji sadrži tačku $f(x_0)$. Tada postoje c i $d \in \mathbb{R}$ $(c < d)$, takvi da je $f(x_0) \in (c, d) \subseteq V$. Označimo sa

$$\varepsilon = \min\{d - f(x_0), f(x_0) - c\} \ .$$

Tada je

$$(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \subseteq V \ .$$

Kako je f neprekidno preslikavanje, to postoji $\delta > 0$ takav da je $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$, čim je $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Ako sada označimo sa U interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, jasno je da vrijedi iskaz leme.

Obratno, pretpostavimo da za sve $x_0 \in \mathbb{R}$ i za svaki otvoren skup V koji sadrži tačku $f(x_0)$, postoji otvoren skup U koji sadrži tačku x_0, takav da je $f(U) \subseteq V$.

Neka su sada $x_0 \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljni. Označimo sa

$$V = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \ .$$

Kako je V otvoren skup koji sadrži $f(x_0)$, postoji otvoren skup U koji sadrži x_0, takav da je $f(U) \subseteq V$. Kako je U otvoren skup koji sadrži tačku x_0, postoje $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$, takvi da je $x_0 \in (a, b) \subseteq U$. Ako sada sa δ označimo manji od brojeva $x_0 - a$ i $b - x_0$, vrijediće $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq U$. Osim toga, za svako $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je $f(x) \in f(U) \subseteq V$, što prema prvoj definiciji znači da je f neprekidna funkcija. ♣

Lema 3.1.2. *Neka je f preslikavanje sa topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$ u topološki prostor $(Y, \mathcal{T}')$. Sljedeća tvrđenja su ekvivalentna:*

1. *Za svaki $V \in \mathcal{T}'$ je $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.*

Poglavlje 4

Metrički prostori

4.1 Definicija i primjeri metričkih prostora 77
4.2 Otvoreni skupovi i okoline u metričkim prostorima 81
4.3 Ekvivalentnost metrika 83

Jedna od najvažnijih klasa topoloških prostora jeste klasa metričkih prostora. Metrički prostori daju raznovrsne primjere topologija i mnogo lakše shvatanje osnovnih topoloških pojmova. Ali mnogo značajnija je činjenica da primjena topologije u analizama ide upravo preko metričkih prostora.

Notaciju metričkih prostora uveo je M. Frechet [1] (1906), dok za razvoj i pojmove je najviše zaslužan F. Hausdorff. [2].

4.1 Definicija i primjeri metričkih prostora

Definicija 4.1.1. *Neka je X neprazan skup i d funkcija na $X \times X$ u $\mathbb{R}$. Par (X, d) nazivamo metrički prostor ako funkcija d zadovoljava sljedeća četiri uslova:*

i) $(\forall x, y \in X)\ \ d(x, y) \geq 0$. *(nenegativnost)*

ii) $d(x, y) = 0$ *ako i samo ako* $x = y$. *(identičnost)*

[1] Maurice Frechet- 1878-1973
[2] Felix Hausdorff- 1868-1942

iii) $(\forall x, y \in X) \quad d(x,y) = d(y,x)$. *(simetričnost)*

iv) $(\forall x, y, z \in X) \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. *(nejednakost trougla)*

Ovako uvedenu funkciju nazivamo metrička funkcija ili metrika na skupu X.

Primjer 4.1. Navedimo sada nekoliko standardnih primjera metričkih prostora i metrika.

1. Funkcija $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$d(x,y) = \mid x - y \mid ,$$

je metrika na $\mathbb{R}$, tj. $(\mathbb{R}, d)$ je metrički prostor.

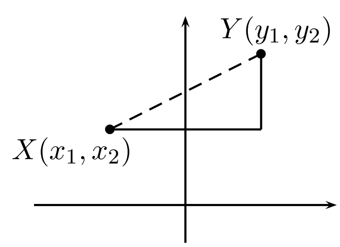
(i) $|x-y| \geq 0$, za sve $x, y \in \mathbb{R}$.
(ii) $|x-y| = 0$ ako i samo ako $x = y$.
(iii) $|x-y| = |y-x|$, za sve $x, y \in \mathbb{R}$.
(iv) $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$, za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$
(dobijeno na osnovu $|a+b| \leq |a| + |b|$).

Funkciju d nazivamo *euklidovom metrikom* na $\mathbb{R}$.

2. Funkcija $d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definisana sa

$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} ,$$

je metrika na $\mathbb{R}^2$ koju nazivamo euklidova metrika na $\mathbb{R}^2$.



3. Neka je X proizvoljan neprazan skup. Definišimo funkciju d na sljedeći način:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \quad x = y \\ 1 & ; \quad x \neq y \end{cases} .$$

Lahko se provjerava da je (X, d) metrički prostor, i ovakav prostor zovemo *diskretan metrički prostor*.

Poglavlje 5

Produkt i količnički prostori

5.1 Produkt prostori 91
5.2 Količnički (kvocijent) prostori 101

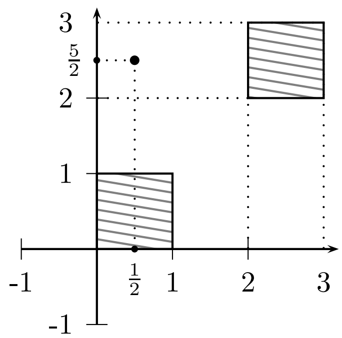
U ovoj glavi proučavaćemo dvije metode konstruisanja novih topoloških prostora iz zadanih. Na primjer, poznato je da se iz prostora realne prave $\mathbb{R}$ dobije n-dimenzionalni euklidov prostor, kao n-terostruki kartezijski produkt od $\mathbb{R}$ sa samim sobom. Otuda smo prirodno zainteresovani da konstruišemo topologiju na kartezijskom produktu zadanih prostora, u izvjesnom smislu određenom topologijama ovih prostora. Druga metoda dobivanja novih prostora iz zadanih zasniva se na podjeli zadanog prostora u klase ekvivalencije, dobivajući tako skup čiji su elementi ove klase, tj. neki podskupovi zadanog prostora, i na kome se onda konstruiše topologija zvana "kvocijent" topologija, u izvjesnom smislu odredjenja topologijom zadanog prostora.

5.1 Produkt prostori

Neka su $X_1, X_2, ..., X_n$ proizvoljni skupovi. Produkt (Descartesov, Kartezijev ili direktni) skupova $X_1, X_2, ..., X_n$, u oznaci $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$, predstavlja skup svih uredjenih n-torki $(x_1, x_2, ..., x_n)$, gdje su $x_i \in X_i$ za $i = 1, 2, ..., n$.

Problem koga želimo diskutovati jeste: za date topološke prostore $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$,..., $(X_n, \mathcal{T}_n)$, kako definisati "smislenu" topologiju $\mathcal{T}$ na $X = X_1 \times$

$X_2 \times ... \times X_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$. Očekivan odgovor bi bio da uzmemo sve moguće produkte $O_1 \times O_2 \times ... \times O_n$, gdje su O_i proizvoljni otvoreni skupovi iz X_i $(i = 1, 2..., n)$. Na žalost kako se pokazuje, ovakva familija ne mora biti topologija. Zaista, posmatrajmo topološki prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_E)$ i na $\mathbb{R}^2$ definišimo familiju $\mathcal{T}$, skupova oblika $O_1 \times O_2$, gdje su O_1 i O_2 otvoreni skupovi u euklidskoj topologiji na $\mathbb{R}$. Pri tome su $(0,1), (2,3) \in \mathcal{T}_E$, pa su $(0,1) \times (0,1)$ i $(2,3) \times (2,3)$ elementi definisane familije $\mathcal{T}$. Ako bi $\mathcal{T}$ bila topologija, tada bi skup $[(0,1) \times (0,1)] \cup [(2,3) \times (2,3)]$ morao pripadati familiji $\mathcal{T}$, a sa druge strane, on bi morao biti oblika $O_1 \times O_2$, za neke $O_1, O_2 \in \mathcal{T}_E$. Međutim, posljednje nije moguće iz sljedećeg razloga. Ako bi to bio slučaj, tada bi postojali skupovi $O_1, O_2 \in \mathcal{T}_E$, takvi da vrijedi



$$\frac{1}{2} \in (0,1) \subseteq O_1 \quad , \quad \frac{5}{2} \in (2,3) \subseteq O_2.$$

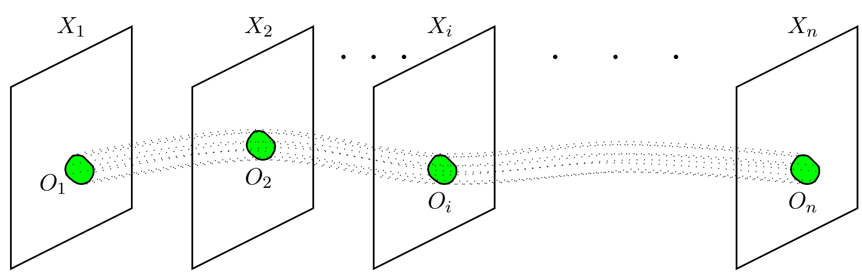
Tada bi uredjeni par $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ pripadao skupu $O_1 \times O_2$, ali očigledno

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \notin [(0,1) \times (0,1)] \cup [(2,3) \times (2,3)] \ .$$

Dakle, $\mathcal{T}$ nije topologija na $\mathbb{R}^2$.

Medjutim, ovo nam ipak daje ideju za konstrukciju topologije.

Definicija 5.1.1. *Neka su $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2), ..., (X_n, \mathcal{T}_n)$ topološki prostori. Familija skupova $\{O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n \mid O_i \in \mathcal{T}_i,\ i = 1, 2, ..., n\}$, čini bazu za neku topologiju $\mathcal{T}$ na $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$. Skup X sa topologijom $\mathcal{T}$ nazivamo produkt prostorom i označavamo ga sa $(X_1 \times X_2 \times ... \times X_n, \mathcal{T})$, ili sa $(X_1, \mathcal{T}_1) \times (X_2, \mathcal{T}_2) \times \cdots \times (X_n, \mathcal{T}_n)$, a $\mathcal{T}$ nazivamo produkt topologijom.*



Slika 5.1: Produkt otvorenih skupova iz koordinatnih prostora

Poglavlje 6

Aksiomi separacije

6.1 T_0 **i** T_1**-prostori** **110**
6.2 T_2**-prostori (Hausdorffovi prostori)** **113**
6.3 T_3**-prostori** **115**
6.4 T_4**-prostori** **117**
6.5 $T_{3\frac{1}{2}}$**-prostori (Prostori Tihonova)** **121**
6.6 **Veze između** T_i**-prostora** $(i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4\})$ . . **125**

Teorija topoloških prostora razvijala se kao i druge grane apstraktne matematike na sljedeći način: primjećujući sličnosti i ponavljanja gotovo istih argumenata u raznim situacijama, uslijedilo je poopštavanje zajedničkih ideja i pojmova i stvaranje teorije koja sadrži polazne primjere kao specijalne slučajeve. Da dobivena teorija, koja onda sama za sebe postaje predmet studija, zaista sadrži primjere iz kojih je potekla, potrebno je naknadno utvrditi. U teoriji topoloških prostora ovo utvrđivanje vršimo postavljanjem odgovarajućih ograničenja, uz koje topološki prostor postaje upravo jedan od prostora iz kojih je kao apstrakcija potekao. Uobičajeni primjeri sa kojima poredimo topološke prostore su kartezijski produkti jediničnog intervala i metrički prostori.

Ovdje ćemo govoriti upravo o nekim specijalnim vrstama topoloških prostora. Već smo govorili o Hausdorffovim prostorima, pa u ovome što slijedi navodimo ostale prostore u ovoj terminologiji, koja potiče od Alexandrova[1]

[1] Pavel Sergeyevich Alexandrov - 1896-1982

i Hopfa[2] [1]. Naime, istorijski gledano, matematičari koji su se bavili ovom tematikom, neke od ovih osobina su definisali ili ih postulirali kao aksiome, pa otuda i ovaj naslov koji se zadržao i danas, iako bi pravilnije bilo da se naziva svojstva ili uslovi separacije (razdvajanja).

Kao što će se lahko primjetiti, među novouvedenim osobinama postojat će pravilna hijerarhija. Naime, poći ćemo od najslabijih zahtjeva i ići ćemo ka složenijim, odnosno većim zahtjevima. Na osnovu te hijerarhije moći ćemo da izvršimo i određene klasifikacije topoloških prostora.

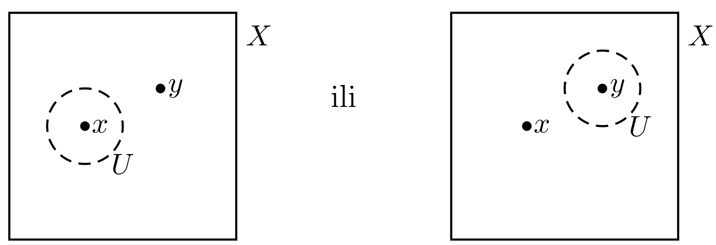
6.1 T_0 i T_1-prostori

Najjednostavniji uslov koga postavljamo dat je sljedećom definicijom.

Definicija 6.1.1. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je T_0-prostor ako za svaki par različitih tačaka x, $y \in X$, postoji okolina jedne od tih tačke, koja ne sadrži drugu tačku.*

Gornji uslov možemo izraziti i simbolički.

$$(\forall\, x, y \in X)(x \neq y \;\Rightarrow\; (\exists\, U \in \mathcal{T})(x \in U \wedge y \notin U) \vee (\exists\, U \in \mathcal{T})(y \in U \wedge x \notin U))\ .$$



Slika 6.1: Ilustracija karakterizacije T_0 prostora

Npr. skup $\mathbb{R}$ sa euklidskom topologijom jeste T_0-prostor jer za proizvoljne $x, y \in \mathbb{R}$, neka je $x < y$, onda je $(x-1, y) \in \mathcal{T}_E$ i pri tome je $x \in (x-1, y)$ i $y \notin (x-1, y)$.

Medjutim, $\mathbb{R}$ sa indiskretnom topologijom, tj. $\mathcal{T} = \{\varnothing, \mathbb{R}\}$, nije T_0-prostor. Zaista, tačke $x = -1$ i $y = 1$ su različite, ali ne postoji otvoren skup koji sadrži samo jednu od njih.

Sljedeće "pojačavanje" uslova nije na prvi pogled jasno.

[2] Heinz Hopf - 1894-1971

Poglavlje 7

Kompaktnost

7.1 **Kompaktnost prostora** 130

7.2 **Neprekidne funkcije na kompaktu** 136

Jedna od najvažnijih topoloških osobina je kompaktnost. Kompaktnost je ključna osobina mnogih matematičkih disciplina, a posebno analize. Svako ko je prošao osnovni kurs matematičke analize upoznat je sa stavom, da neprekidna funkcija na zatvorenom i ograničenom skupu dostiže svoj maksimum i minimum. Klasična teorema Heine-Borel-Lebesgue govori da svako pokrivanje zatvorenog i ograničenog intervala otvorenim skupovima, sadrži konačan potpokrivač. U ovom dijelu koristit ćemo upravo ovu osobinu za definisanje ovog novog pojma, kompaktnosti, u proizvoljnom topološkom prostoru. Neki topolozi su čak skloni reći da nema razumjevanja topologije bez razumjevanja kompaktnosti.

Dakle, šta je kompaktnost? Najgrublje rečeno, to je generalizacija konačnosti. Neformalna definicija bi bila: topološki prostor je kompaktan ako ima osobinu da kad god je podskup od unije beskonačno mnogo otvorenih skupova, da je on podskup i od unije konačno mnogo tih skupova. Kao što ćemo vidjeti, svaki konačan podskup topološkog prostora je kompaktan, u diskretnim prostorima kompaktan skup je samo onaj koji je konačan. Ukoliko posmatramo topološke prostore sa "bogatijim" topološkim strukturama, npr. $\mathbb{R}$, vidjet ćemo da i beskonačni skupovi mogu biti kompaktni. Naime svaki skup oblika $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je kompaktan, ali to je samo jedan od oblika kompaktnih skupova na $\mathbb{R}$.

7.1 Kompaktnost prostora

Koristeći gore spomenutu neformalnu definiciju, sad ćemo dati i njen formalan oblik.

Definicija 7.1.1. *Neka je A proizvoljan podskup topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$. Kažemo da je A kompaktan ako za proizvoljan skup indeksa I i proizvoljnu familiju otvorenih skupova O_i $(i \in I)$ sa osobinom $A \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$, postoji konačna podfamilija O_{i_1}, O_{i_2},...,O_{i_n}, takva da vrijedi*

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} O_{i_k} \ .$$

Primjer 7.1. Neka je $(X, \mathcal{T})$ proizvoljan topološki prostor i neka je $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X$. Tada je A kompaktan.
Zaista, neka je O_i $(i \in I)$ proizvoljna familija otvorenih skupova sa osobinom $A \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$. Tada za svaki $x_j \in A$ postoji O_{i_j} takav da je $x_j \in O_{i_j}$. Pri tome očigledno vrijedi $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} O_{i_k}$, te je A kompaktan. $\diamondsuit$

Ovim primjerom smo pokazali da je svaki konačan skup kompaktan, pa odatle proizilazi i prosta ocjena kompaktnosti kao topološke generalizacije konačnosti.

Primjer 7.2. Posmatrajmo $\mathbb{R}$ sa euklidskom topologijom i neka je $A = (-\infty, 0)$. A nije kompaktan.
Zaista, za $n \in \mathbb{N}$, neka je $O_n = (-n, 0)$. Jasno je da je svaki O_n $(n \in \mathbb{N})$ otvoren skup i pri tome je

$$A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n \ .$$

Očigledno da izdvajanjem proizvoljne konačne kolekcije indeksa $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{N}$, nije moguće imati $A \subseteq O_{n_1} \cup O_{n_2} \cup \cdots \cup O_{n_k}$, tj. vrijedilo bi

$$O_{n_1} \cup O_{n_2} \cup \cdots \cup O_{n_k} = (-\max\{n_1, n_2, ..., n_k\}, 0) \subset (-\infty, 0) \ ,$$

te A nije kompaktan. $\diamondsuit$

Primjer 7.3. Neka je A podskup diskretnog topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$. A je kompaktan ako i samo ako je konačan skup.
Ako je A konačan, već smo vidjeli da je on tada i kompaktan.
Neka je sada A kompaktan. Za proizvoljno $x \in A$ je $\{x\} \in \mathcal{T}$, pa očigledno

Poglavlje 8

Mreže i filteri

8.1 Konvergencija **141**
8.1.1 Konvergencija nizova 142
8.1.2 Zatvorenje skupa i konvergencija 144
8.1.3 Podnizovi i konvergencija 145
8.1.4 Konvergencija nizova funkcija 147
8.2 Mreže **153**
8.2.1 Mreže i konvergencija 153
8.2.2 Mreže i neprekidnost 157
8.2.3 Podmreže i tačke nagomilavanja 157
8.2.4 Mreže i kompaktnost 161
8.3 Filteri i baze filtera **162**
8.3.1 Filteri i konvergencija 164
8.3.2 Ultrafilteri 165
8.4 Veza izmedju mreža i filtera **168**

8.1 Konvergencija

U ovoj glavi proučavaćemo pojam konvergencije i to diskutovat ćemo dvije u suštini ekvivalentne teorije konvergencije, jednu zasnovanu na pojmu mreže i drugu koja se razvila iz koncepta filtera. U prvom dijelu su dati osnovni pojmovi o konvergenciji nizova, dobro poznati iz analize, ali na način blizak

topološkim i metričkim prostorima i pojmovima definisanim u tim prostorima. Na taj način pojmovi konvergencije preko mreža ili filtera lakše se shvataju i prirodnije usvajaju.
U drugom dijelu ćemo se pozabaviti pojmom mreže kao prirodnijim uvodom u teoriju konvergencije, a zatim ćemo uvesti pojam filtera i razmotriti konvergenciju sa ovog drugačijeg stanovišta. Vidjećemo da se o konvergenciji može govoriti ne samo relativno za neku topologiju topološkog prostora, nego da se i obratno koristeći ideju konvergencije može kompletno odrediti topologija nekog prostora. Dakle, iznalaženje prirodnijih načina u određivanju topologija, kroz pojam konvergencije, je jedna od primjena teorije konvergencije. Medjutim, važnost teorije konvergencije prevazilazi ovakve primjene, i ukratko rečeno svrha poopštenog pojma konvergencije je da jednim zamahom obuhvati razne koncepte iz analize, karakterizirane nekakvim graničnim procesima.

8.1.1 Konvergencija nizova

Definicija 8.1.1. *Niz u skupu X je svako preslikavanje $x : \mathbb{N} \to X$. Vrijednost $x(n) \in X$ preslikavanja x, naziva se n-ti član niza.*

n-ti član niza uobičajeno se obilježava sa x_n, a za nizove ćemo uobičajeno koristiti oznaku $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Najvažnije svojstvo nizova je konvergencija. Intuitivno govoreći, u topološkom prostoru X radi se o situaciji kada članovi niza s dovoljno velikim indeksima n dolaze u proizvoljno odabranu okolinu neke tačke x_0. Ovo svojstvo definišemo na sljedeći način.

Definicija 8.1.2. *Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ i neka je $x_0 \in X$. Kažemo da dati niz konvergira ka tački x_0, ako za svaku okolinu O tačke x_0, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za $n \geq n_0$, je $x_n \in O$.*

Dakle, formalno zapisana, gornja definicija glasi

$$(\forall O \in \mathcal{O}(x_0))(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Longrightarrow x_n \in O)\ , \tag{8.1.1}$$

gdje je $\mathcal{O}(x_0)$ skup svih okolina tačke x_0. Tačku x_0 nazivamo tačka konvergencije niza.
Da niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka x_0, označavamo sa

$$x_n \to x_0,\ (n \to \infty) \quad \text{ili} \quad \lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0 \quad \text{ili samo} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0\ .$$

Bibliografija

[1] P.S. Alexandrov, H. Hopf: *Topologie*, Berlin, 1935.

[2] Dj. Kurepa : *Teorija skupova*, Školska knjiga, Zagreb, 1951

[3] J. L. Kelly: *General Topology*, Princeton, New Jersey, 1957

[4] Z. Mamuzić: *Uvod u opštu topologiju* I dio, Beograd 1960.

[5] Boltjanski-Efremovič : *Što je topologija*, Školska knjiga, Zagreb 1973

[6] S. Mardešić : *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru I*, Školska knjiga, Zagreb, 1974.

[7] B. Stanković : *Osnovi funkcionalne analize*, Naučna knjiga, Beograd, 1975

[8] M. Mršević : *Zbirka rešenih zadataka iz topologije*, Naučna knjiga, Beograd, 1977

[9] L.A. Steen, J.A. Seebach : *Counterexamples in Topology*, Dover Publications Inc., New York, 1978.

[10] S. Aljančić: *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu*, Beograd 1979.

[11] G.E. Bredon : *Topology and Geometry*, Springer, 1993

[12] A. McCluskey, B. McMaser : *Topology Course*, 1997

[13] G.L. Naber : *Topological methods in Euclidean spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1997

[14] Miloš Kurilić : *Osnovi opšte topologije*, Univerzitet u Novom Sadu, 1998

[15] J.E. Munkres : *Topology. Second Edition*, Prentice Hall, 2000

[16] Klaus Wirthmüller : *A Topology Primer*, 2001

[17] Bodo Von Querenburg : *Mengentheoretische Topologie*, Springer-Verlag, Berlin, 2001

[18] The MacTutor History of Mathematics Archive , http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/ , 2001-

[19] K.P. Hart, J. Nagata, J.E. Vaughan : *Encyclopedia of General Topology*, Elsevier North-Holland, Amsterdam, 2004.

[20] Š. Ungar : *Geometrija i Topologija: I. Topologija (postdiplomski studij 2006/07)*
http://web.math.hr/ ungar/