UNIVERZITET U TUZLI
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Nermin Okičić

Uvod u funkcionalnu analizu i teoriju operatora

- Skripta -

Tuzla, 2020.

Sadržaj

1 Metrički prostori

Granični proces jedan je od najvažnijih pojmova matematičke analize. Fakat na kome počiva ovaj pojam jeste da smo u mogućnosti mjeriti rastojanje između proizvoljne dvije tačke realne prave. Šta više, veliki broj pojmova analize nije vezan za algebarska svojstva skupa nego upravo za koncept udaljenosti. Ovo nas navodi na izučavanje skupova u kojima je moguće mjeriti rastojanje između tačaka, to jest vodi nas ka konceptu "metričkog prostora", fundamentalnog pojma moderne matematike.

1.1 Metrika i metrički prostor

Definicija 1.1. *Neka je X proizvoljan neprazan skup. Za funkciju $d : X \times X \to \mathbb{R}$ kažemo da je metrika ili metrička funkcija na X, ako zadovoljava sljedeća četiri uslova, za proizvoljne x, y i z iz X:*

M1. $d(x,y) \geq 0$,

M2. $d(x,y) = 0$ *ako i samo ako* $x = y$,

M3. $d(x,y) = d(y,x)$,

M4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Tada kažemo da je skup X snabdjeven metrikom d i nazivamo ga metrički prostor. Elemente skupa X nazivamo tačkama, a realan broj $d(x,y)$ nazivamo rastojanjem između tačaka x i y.

Dakle, metrički prostor je uređeni par (X,d), koga čine skup X i na njemu uvedena metrika d. Kratkoće radi, umjesto oznake (X,d), mi ćemo za metrički prostor skoro uvijek koristiti jednostavno oznaku X, kad god je jasno o kojoj je metrici riječ. U svojim radovima iz 1906 Frechet [1] koristi pojmove metrike i metričkih prostora, ali formalno uvođenje pojma metričkog prostora je uradio Hausdorff.[2]

Uslovi M1.-M4. nazivaju se aksiomi metrike, a pojedinačno to su *pozitivna definitnost* (M1.), *strogost* (M2.), *simetričnost* (M3.) i *nejednakost trougla* (M4.).

Ukoliko uslov $M2$. zamijenimo slabijim uslovom

$$x = y \text{ onda } d(x,y) = 0 ,$$

za d kažemo da je *pseudometrika*. Ukoliko se iz spiska aksioma ispusti uslov $M3$., za d kažemo da je *kvazimetrika*. Ako uslov $M4$. zamjenimo sa uslovom

$$d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\} ,$$

d nazivamo *ultrametrikom*.

Neke važnije osobine metričke funkcije dajemo sljedećim lemama.

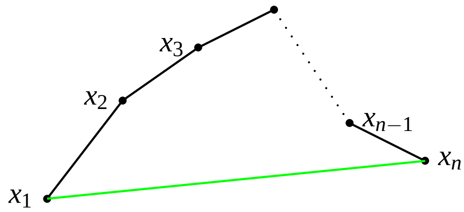
[1] Maurice Frechet 1878-1973, francuski matematičar

[2] Felix Hausdorff 1868-1942, njemački matematičar

Lema 1.1. *U svakom metričkom prostoru* (X,d) *vrijedi pravilo mnogougla, to jest za proizvoljne* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *(*$n \geq 3$*), vrijedi*

$$d(x_1,x_n) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \cdots + d(x_{n-1},x_n) \; .$$

Dokaz : Dokaz se izvodi matematičkom indukcijom po $n \in \mathbb{N}$. □



Slika 1.1: Pravilo mnogougla

Lema 1.2. *Za proizvoljne tri tačke* x, y *i* z*, metričkog prostora* (X,d)*, vrijedi nejednakost*

$$|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z) \; .$$

Ako aksiom M4. interpretiramo da je zbir dvije stranice trougla uvijek veći ili jednak od treće stranice, onda gornju tvrdnju možemo interpretirati kao, apsolutna vrijednost razlike dužina dvije stranice trougla uvijek je manja ili jednaka od treće stranice.

Lema 1.3. *Za proizvoljne četiri tačke* x, y, z *i* t*, metričkog prostora* (X,d)*, vrijedi nejednakost*

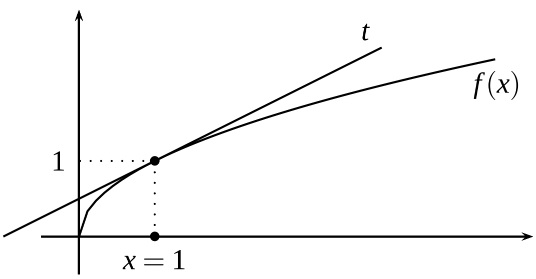
$$|d(x,z) - d(y,t)| \leq d(x,y) + d(z,t) \; .$$

Prije nego što navedemo neke značajnije primjere metričkih prostora, navedimo dvije važne nejednakosti. Za njihovo dokazivanje neophodan nam je sljedeći pomoćni stav koji predstavlja poznatu Youngovu nejednakost.

Lema 1.4. *Neka su* $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$*,* $p > 1$ *i broj* q *određen tako da vrijedi* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Tada vrijedi*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \; .$$

Dokaz : Neka je $0 < m < 1$. Posmatrajmo funkcije oblika $f(x) = x^m$, definisane za $x \geq 0$. Kako je $f''(x) = m(m-1)x^{m-2} \leq 0$ za svako $x \geq 0$, to je za proizvoljno $0 < m < 1$, funkcija $f(x)$ konveksna na dole, što geometrijski znači da se njen graf nalazi ispod tangente u odgovarajućoj tački.



Jednačina tangenta na posmatranu krivu u tački $x = 1$ je $y = m(x-1) + 1$, pa na osnovu rečenog vrijedi

$$x^m \leq m(x-1) + 1 \; .$$

Stavimo li u gornju nejednakost da je $x = \frac{a^p}{b^q}$ i $m = \frac{1}{p}$, nakon kraćeg računa dobijamo traženu nejednakost. □

Teorem 1.5 (**Nejednakost Höldera** [3]). *Neka su a_i i b_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) proizvoljni realni ili kompleksni brojevi i neka je za realan broj $p > 1$, broj q definisan sa $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tada za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi,*

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} .$$

Dokaz : Označimo sa $a_i' = \dfrac{a_i}{\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}}$ i $b_i' = \dfrac{b_i}{\left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Očigledno vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i'|^p = \sum_{i=1}^{n} |b_i'|^q = 1 . \tag{1.1}$$

Za svako $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, za brojeve $|a_i'|$ i $|b_i'|$ vrijedi Lema 1.4, to jest

$$|a_i' b_i'| \leq \frac{|a_i'|^p}{p} + \frac{|b_i'|^q}{q} , \tag{1.2}$$

gdje p i q zadovoljavaju uslove teoreme. Sumiranjem po $i = 1, 2, \ldots, n$ lijeve i desne strane u (1.2), dobijamo

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i' b_i'| \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} |a_i'|^p}{p} + \frac{\sum_{i=1}^{n} |b_i'|^q}{q} .$$

Sada na osnovu (1.1) slijedi

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i' b_i'| \leq 1 . \tag{1.3}$$

S druge strane je

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i' b_i'| = \frac{\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|}{\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}} . \tag{1.4}$$

Iz (1.3) i (1.4) imamo traženu nejednakost. □

Pozitivni realni brojevi p i q koji zadovoljavaju uslov $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, nazivaju se konjugovani ili spregnuti brojevi, a specijalno ako je $p = q = 2$, gornja nejednakost se naziva Cauchy-Schwarzova nejednakost.

Teorem 1.6 (**Nejednakost Minkowskog** [4]). *Neka su a_i i b_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) proizvoljni realni ili kompleksni brojevi i neka je $p \geq 1$. Tada za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi,*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Dokaz :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p &= \sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i| |a_i + b_i|^{p-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| |a_i + b_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |b_i| |a_i + b_i|^{p-1} . \end{aligned}$$

[3] Otto Hölder 1859-1937, njemački matematičar

[4] Hermann Minkowski 1864-1909, njemački matematičar

Primjenjujući Hölderovu nejednakost na obje gornje sume na desnoj strani nejednakosti, dobijamo nejdnakost

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p \le \left(\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} .$$

Dijeleći ovu nejednakost sa izrazom u drugoj zagradi desne strane i koristeći činjenicu da je $(p-1)q=p$ i $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$, dobijamo traženu nejednakost. □

Vrijede i opštije tvrdnje od gore navedenih, a odnose se na beskonačne sume.

Teorem 1.7. *Neka su $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nizovi realnih ili kompleksnih brojeva, takvi da su redovi $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p$ i $\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^q$ konvergentni, za $1<p<+\infty$ i $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Tada je i red $\sum_{i=1}^{\infty}|a_ib_i|$ konvergentan i vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_ib_i| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} .$$

Teorem 1.8. *Neka su $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nizovi realnih ili kompleksnih brojeva, takvi da su redovi $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p$ i $\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^p$ konvergentni, za $1\le p<+\infty$. Tada je i red $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i+b_i|^p$ konvergentan i vrijedi*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Obje ove nejednakosti imaju i svoj integralni oblik. Naime, vrijedi

$$\int_a^b |x(t)y(t)|dt \le \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} ,$$

odnosno

$$\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} ,$$

naravno pod određenim uslovima o integrabilnosti funkcija x i y. Navedimo sada neke značajnije metričke prostore.

Primjer 1.1. Neka je X proizvoljan skup i neka je za $x,y\in X$ zadato

$$d(x,y)=\begin{cases} 0 & ; \quad x=y\,, \\ 1 & ; \quad x\neq y\,. \end{cases}$$

Funkcija d jeste metrika i (X,d) nazivamo diskretni metrički prostor. ♢

Primjer 1.2. Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ sa rastojanjem

$$d(x,y)=|x-y| ,$$

predstavlja dobro nam poznati Euklidov prostor realne prave. ♢

Primjer 1.3. Sa $\mathbb{R}^n$ označavamo skup svih uređenih n-torki realnih brojeva $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Metriku možemo uvesti sa

1. $d_2(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$

2. $d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}$ $(p \geq 1)$.

3. $d_\infty(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$

Ovim primjerom opravdavamo činjenicu da je nekada neophodno koristiti definiciju metričkog prostora kao uređenog para jer kao što vidimo, na istom skupu se mogu zadati različite metrike. $\diamondsuit$

Primjer 1.4. Skup svih konvergentnih nizova označavamo sa c, to jest

$$c = \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (\forall n \in \mathbb{N}) x_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \ , \ \exists \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\right\} \ ,$$

i ako uvedemo

$$d(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| \ ,$$

gdje su $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljni nizovi iz c, on postaje metrički prostor. $\diamondsuit$

Primjer 1.5. Skup svih nula-nizova označavamo sa c_0, to jest

$$c_0 = \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \lim_{n\to\infty} x_n = 0\right\} \ ,$$

i na njemu možemo zadati metriku sa

$$d(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| \ ,$$

gdje su $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ proizvoljni. $\diamondsuit$

Primjer 1.6. Za proizvoljno $1 \leq p < +\infty$, sa $l_p(\Phi)$ označavamo skup svih nizova (realnih ili kompleksnih) sumabilnih sa stepenom p, to jest beskonačnih nizova $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, za koje važi $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty$. Standardna metrika na datom skupu zadata je sa

$$d(x,y) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ . \qquad \diamondsuit$$

Primjer 1.7. Sa l_∞ označavamo skup svih ograničenih nizova, to jest

$$l_\infty = \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty\right\} \ .$$

Standardna metrika na ovom skupu je data sa

$$d(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| \ . \qquad \diamondsuit$$

Primjer 1.8. Za $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, sa $B(\Omega)$ označavamo skup svih ograničenih kompleksnih funkcija na Ω. Metriku na ovom skupu definišemo sa

$$d(f,g) = \sup_{t\in\Omega} |f(t) - g(t)| \ .$$

Ako specijalno izaberemo da je $\Omega = [a,b] \subset \mathbb{R}$, dobijamo prostor $B[a,b]$, ograničenih kompleksnih funkcija realne varijable. Ako je opet specijalno $\Omega = \mathbb{N}$, dobijamo prostor ograničenih nizova $B(\mathbb{N}) = l_\infty$. $\diamondsuit$

Primjer 1.9. Gornji primjer možemo i dalje generalizovati. Naime, neka je X neprazan skup i (Y,d_Y) metrički prostor. Sa $B(X,Y)$ označavamo skup svih ograničenih preslikavanja sa domenom X i kodomenom Y. Metriku na ovom skupu možemo uvesti na sljedeći način,

$$D(f,g)=\sup_{x\in X} d_Y(f(x),g(x)) \ ,$$

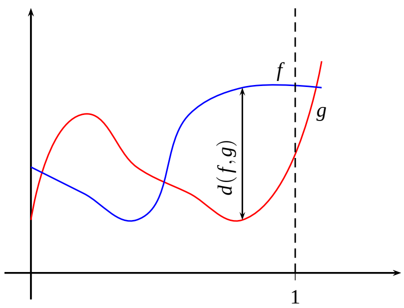
gdje su $f,g\in B(X,Y)$ proizvoljne. Za ispitivanje osobina metrike, u ovom primjeru nam treba pojam ograničenosti skupa, koga ćemo nešto kasnije definisati. $\diamondsuit$

Primjer 1.10. Za $\Omega\subseteq\mathbb{R}$, sa $C(\Omega)$ označavamo skup svih neprekidnih realnih funkcija na Ω. Metriku na ovom skupu definišemo sa

$$d(f,g)=\sup_{t\in\Omega}|f(t)-g(t)| \ .$$

Specijalno, ako je $\Omega=[a,b]$ dobijamo prostor neprekidnih funkcija na segmentu, $C[a,b]$, na kome je metrika data sa

$$d(f,g)=\max_{a\leq t\leq b}|f(t)-g(t)| \ .$$



Slika 1.2: Uobičajena metrika na $C[a,b]$

$\diamondsuit$

Primjer 1.11. Na skupu $C[a,b]$ metriku možemo uvesti i sa

$$d(f,g)=\left(\int_a^b|f(t)-g(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}} \ ,$$

i tada imamo prostor neprekidnih funkcija sa tzv. kvadratnom metrikom. $\diamondsuit$

Primjer 1.12. Neka je $k\in\mathbb{N}$. Sa $C^k[a,b]$ označavamo skup svih k-puta neprekidno diferencijabilnih funkcija definisanih na $[a,b]$. Metriku na ovom skupu uvodimo sa,

$$d(f,g)=\sup_{t\in[a,b]}\max\{|f(t)-g(t)|,|f'(t)-g'(t)|,\dots,|f^{(k)}(t)-g^{(k)}(t)|\} \ ,$$

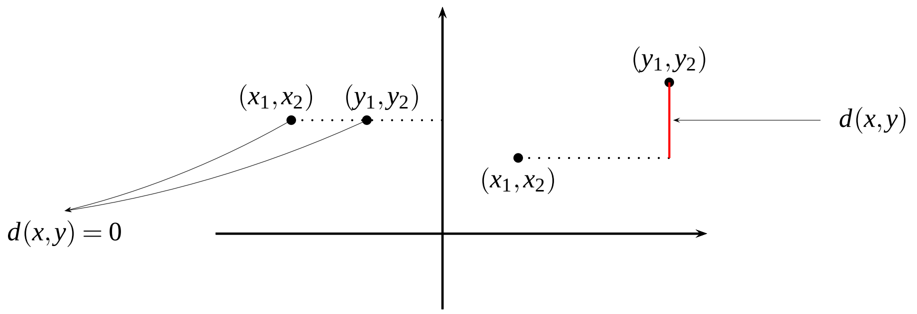
gdje su $f,g\in C^k[a,b]$. $\diamondsuit$

Primjer 1.13. Skup Lebesgue integrabilnih funkcija sa p-tim stepenom ($1\leq p<+\infty$) nad oblasti Ω, označavamo sa $L_p(\Omega)$ i metrika je data sa

$$d(x,y)=\left(\int_\Omega|x(t)-y(t)|^pdt\right)^{\frac{1}{p}} \ . \qquad \diamondsuit$$

Primjer 1.14. Neka je na skupu $\mathbb{R}^2$ zadata funkcija

$$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \ , \ d(x,y) = |x_2 - y_2| \ .$$



Nije teško provjeriti da funkcija d zadovoljava uslove M1, M3 i M4, ali ne i uslov M2. Naime, sve tačke iz $\mathbb{R}^2$ sa istim drugim koordinatama imaju "udaljenost" nula i pri tome ne moraju obavezno biti iste. Dakle d nije metrika, ali je zadovoljen uslov: $x = y \Rightarrow d(x,y) = 0$, pa je $(\mathbb{R}^2, d)$ primjer pseudometričkog prostora. ♢

Neka je sada (X,d) proizvoljan metrički prostor i neka je $Y \subset X$. Kako $d : X \times X \to \mathbb{R}$, možemo posmatrati njenu restrikciju $d|_{Y\times Y}$, koja tada predstavlja metriku na skupu Y. Za nju kažemo da je indukovana metrikom d, a time smo dobili novi metrički prostor $(Y, d|_{Y\times Y})$, ili jednostavno (Y,d), koga nazivamo metrički potprostor metričkog prostora (X,d). Naprimjer, možemo razmišljati o bilo kom segmentu, recimo $[0,1]$ kao metričkom potprostoru od $\mathbb{R}$, pri tome podrazumijevajući da rastojanje između bilo koja dva elemnta x,y iz $[0,1]$ računamo kao da su oni iz $\mathbb{R}$, to jest $d(x,y) = |x-y|$. Naravno da bi mogli o $[0,1]$ razmišljati i kao o potprostoru od $\mathbb{R}^2$. Pri tome bi smo to radili tako što bi $[0,1]$ identifikovali sa $\{0\} \times [0,1]$ (ili sa $[0,1] \times \{0\}$, ili sa $[0,1] \times \{25\}$), a onda bi rastojanje između x i y računali sa $d(x,y) = \sqrt{(x-y)^2 + (0-0)^2} = |x-y|$.

Primjer 1.15. Za $-\infty < a < b < +\infty$, sa $B[a,b]$ smo označili skup ograničenih funkcija na $[a,b]$. Kako je svaka neprekidna funkcija na segmentu i ograničena, to onda važi $C[a,b] \subset B[a,b]$, pa bi prostor $C[a,b]$ mogli posmatrati kao metrički potprostor od $B[a,b]$, sa indukovanom metrikom

$$d(f,g) = \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)| \ .$$

♢

Primjer 1.16. Sa $C^1[a,b]$ označavamo skup neprekidno diferencijabilnih funkcija definisanih na $[a,b]$. Kako je diferencijabilna funkcija i neprekidna, prema prethodnom primjeru onda imamo da je $C^1[a,b] \subset B[a,b]$, to jest mogli bi $C^1[a,b]$ posmatrati kao metrički potprostor od $B[a,b]$. Međutim, to u ovom slučaju nećemo raditi tako, za šta imamo dobre razloge koje ćemo upoznati u narednim izlaganjima. Standardnu metriku na $C^1[a,b]$ zadajemo sa

$$D(f,g) = d(f,g) + d(f',g') \ ,$$

gdje su $f,g \in C^1[a,b]$, a d je standardna metrika na $B[a,b]$. ♢

Sa pojmom metričke funkcije sada smo u mogućnosti mjeriti i rastojanja između različitih objekata, ali i definisati nove pojmove.

Definicija 1.2. *Neka je x tačka metričkog prostora (X,d) i neka je $A \subseteq X$. Udaljenost tačke x od skupa A definisana je sa*

$$d(x,A) = \inf\{d(x,y) |\ y \in A\} \ .$$

U gornjoj definiciji treba razlikovati prvo i drugo pojavljivanje oznake d. Naime, drugo pojavljivanje jeste metrička funkcija na X, a prvo je nova oznaka pojma koga definišemo. Gornja definicija je korektna jer ako je A neprazan skup, onda je i skup $\{d(x,y) |\ y \in A\}$ neprazan i očigledno zbog osobine M1, ograničen odozdo, pa infimum postoji. Jasno je da ako $x \in A$ onda je $d(x,A) = 0$. Međutim, ako je $d(x,A) = 0$ ne mora biti $x \in A$, što pokazuje primjer $x = 0$ i $A = (0,1)$.

Lema 1.9. *Za proizvoljan neprazan podskup A i proizvoljne tačke x i y metričkog prostora* (X,d) *vrijedi*
$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)\ .$$

Dokaz : Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj. Označimo sa $a = d(x,A)$ i sa $b = d(y,A)$. Na osnovu definicije infimuma skupa, postoji $t \in A$, takav da je $d(y,t) \leq b + \varepsilon$. Sada na osnovu Leme 1.3, za svako $s \in A$ imamo
$$d(x,s) - b \leq d(x,s) - d(y,t) + \varepsilon \leq d(x,y) + d(s,t) + \varepsilon\ . \tag{1.5}$$

Označimo sa
$$M = \{d(x,s) - b |\ s \in A\}\ \ ,\ \ N = \{d(x,y) + d(s,t) + \varepsilon |\ s \in A\}\ .$$

Jasno je, na osnovu (1.5), da vrijedi $\inf M \leq \inf N$. Ako u 1.5 stavimo $s = t$, vidimo da je broj $d(x,y) + \varepsilon$ u skupu N, pa onda vrijedi i $\inf M \leq d(x,y) + \varepsilon$. Kako ovo vrijedi za proizvoljno $\varepsilon > 0$ to onda vrijedi i
$$a - b \leq d(x,y)\ .$$

Gornje razmatranje možemo u potpunosti iskoristiti zamjenjujući mjesta tačkama x i y, te vrijedi i
$$b - a \leq d(x,y)\ ,$$

čime je iskazana tvrdnja dokazana. □

Definicija 1.3. *Neka su A i B neprazni podskupovi metričkog prostora* (X,d). *Rastojanje izmedju skupova A i B definišemo sa*
$$d(A,B) = \inf\{d(x,y) |\ x \in A,\ y \in B\}\ .$$

Korektnost i ove definicije objašnjavamo na isti način kao maloprije. Ako se skupovi sijeku, jasno je da vrijedi $d(A,B) = 0$. Međutim, ako je $d(A,B) = 0$ to ne znači da je presjek skupova neprazan. Naprimjer, ako je $A = (0,1)$, a $B = (1,2)$, tada je $d(A,B) = 0$ i $A \cap B = \emptyset$. Ovo nam govori da definisano rastojanje između skupova nije metrika na particiji od X. Rastojanje između dva skupa možemo okarakterisati preko rastojanja tačke od skupa.

Lema 1.10. *Neka je X metrički prostor. Za proizvoljne* $A,B \subseteq X$ *vrijedi*
$$d(A,B) = \inf_{a\in A} d(a,B) = \inf_{b\in B} d(b,A)\ .$$

Dokaz : Neka su $a \in A$ i $b \in B$ proizvoljni. Tada vrijedi
$$d(a,b) \geq \inf_{b\in B} d(a,b) = d(a,B) \geq \inf_{a\in A} d(a,B)\ .$$

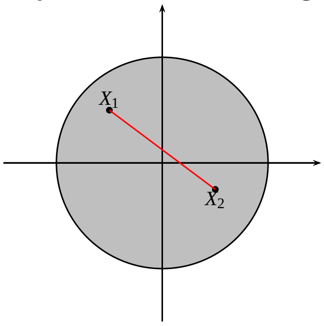
Odavde onda imamo da je
$$\inf_{a\in A, b\in B} d(a,b) = d(A,B) \geq \inf_{a\in A} d(a,B)\ .$$

Pretpostavimo da je $\inf_{a\in A} d(a,B) < d(A,B)$. Tada bi morao postojati $a \in A$, takav da je $d(a,B) < d(A,B)$. Ovo opet znači da je $\inf_{b\in B} d(a,b) < d(A,B)$, pa bi opet morao postojati $b \in B$ takav da je $d(a,b) < d(A,B)$, što je očigledna kontradikcija. □

Definicija 1.4. *Za skup A, podskup metričkog prostora (X,d), kažemo da je ograničen ili omeđen ako je skup rastojanja među tačkama tog skupa ograničen skup, to jest*

$$(\exists C > 0)(\forall x,y \in A)\ 0 \leq d(x,y) \leq C\ .$$

Primjer 1.17. Jedinični krug $K((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ je ograničen skup u $(\mathbb{R}^2, d_2)$.



$$d(X_1,X_2) \leq 2.$$

Rastojanje proizvoljne dvije tačke iz kruga $K((0,0),1)$ manje je od prečnika kruga.

$\diamondsuit$

Definicija 1.5. *Neka je A podskup metričkog prostora (X,d). Nenegativan broj*

$$diamA = \sup\{d(x,y) |\ x,y \in A\}\ ,$$

nazivamo dijametrom skupa A.

Jasno je da ako vrijedi $diamA = \infty$, da je tada skup A neograničen, što iskazujemo tvrdnjom,

Lema 1.11. *Skup je ograničen ako i samo ako mu je dijametar konačan.*

Teorem 1.12. *Za proizvoljna dva podskupa A i B metričkog prostora (X,d) vrijedi*

$$diam(A \cup B) \leq diamA + diamB + d(A,B)\ .$$

Kao direktnu posljedicu gornjeg tvrđenja imamo

Posljedica 1.13. *Unija konačno mnogo ograničenih skupova je ograničen skup.*

Definicija 1.6. *Neka je (X,d) metrički prostor. Za proizvoljno $a \in X$ i za proizvoljno $r > 0$ skup*

$$B(a,r) = \{x \in X |\ d(a,x) < r\}$$

nazivamo otvorena kugla u X sa centrom u tački a, poluprečnika r.
Skup

$$K(x,r) = \{x \in X |\ d(a,x) \leq r\}$$

nazivamo zatvorena kugla centra a i poluprečnika r, a skup

$$S(x,r) = \{x \in X |\ d(a,x) = r\}$$

nazivamo sfera centra u a, poluprečnika r.

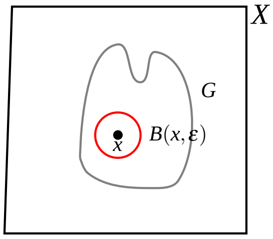
Lema 1.14. *Otvorena kugla u metričkom prostoru ima sljedeće osobine:*

1. $x \in B(x,r)$.
2. $B(x,r_1) \cap B(x,r_2) = B(x, \min\{r_1,r_2\})$.
3. $y \in B(x,r)\ \Rightarrow\ B(y, r - d(x,y)) \subseteq B(x,r)$.

Definicija 1.7. *Za skup G podskup metričkog prostora (X,d), kažemo da je otvoren ako vrijedi*

$$(\forall x \in G)(\exists \varepsilon > 0)\ B(x,\varepsilon) \subseteq G\ .$$

Definicija 1.8. *Neka je (X,d) metrički prostor i $A \subseteq X$. Za tačku $a \in A$ kažemo da je unutrašnja tačka skupa A ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $B(a,\varepsilon) \subseteq A$.*



Prema Definiciji 1.7, skup je otvoren ako i samo ako su sve njegove tačke unutrašnje.

Teorem 1.15. *Neka je (X,d) metrički prostor. Kolekcija τ svih otvorenih podskupova od X ima sljedeće osobine.*

1. $\varnothing,\ X \in \tau$.
2. $U,V \in \tau$ *onda* $U \cap V \in \tau$.
3. $(\forall i \in I) O_i \in \tau \ \Rightarrow\ \cup_{i \in I} O_i \in \tau$.
4. $(\forall x,y \in X,\ x \neq y)(\exists U,V \in \tau)(x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \varnothing)$.

Familija τ koja zadovoljava osobine 1., 2. i 3. naziva se topologija na X, a ako zadovoljava još i osobinu 4., naziva se Hausdorffova topologija na X.

Definicija 1.9. *Skup je zatvoren u metričkom prostoru (X,d) ako je njegov komplement u odnosu na X otvoren skup.*

Definicija 1.10. *Neka je (X,d) metrički prostor i neka je $A \subseteq X$. Najmanji u smislu inkluzije, zatvoreni skup koji sadrži skup A, nazivamo zatvorenje ili adherencija skupa A i označavamo ga sa $\overline{A}$.*

Nije teško vidjeti da vrijedi

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subseteq X \mid F \text{ zatvoren i } A \subseteq F\}.$$

Lema 1.16. *Neka su A i B proizvoljni podskupovi metričkog prostora X. Vrijedi,*

1. $A \subseteq \overline{A}$.
2. *Zatvorenje skupa je zatvoren skup.*
3. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$
4. $A \subset B \ \Rightarrow\ \overline{A} \subseteq \overline{B}$.
5. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Definicija 1.11. *Neka je (X,d) metrički prostor i neka je $A \subseteq X$. Najveći u smislu inkluzije, otvoreni skup koji je sadržan u skup A, nazivamo unutrašnjost ili interior skupa A i označavamo ga sa A^o.*

Činjenicu iz gornje definicije možemo zapisati sa

$$A^o = \bigcup\{O \subseteq X \mid O \text{ otvoren i } O \subseteq A\}\ ,$$

i pri tome su tačke skupa A^o upravo unutrašnje tačke skupa A.

Lema 1.17. *Neka su A i B proizvoljni podskupovi metričkog prostora X. Vrijedi,*

1. $A^o \subseteq A$.
2. *Unutrašnjost skupa je otvoren skup.*
3. $(A^o)^o = A^o$
4. $A \subset B \ \Rightarrow\ A^o \subseteq B^o$.
5. $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$.

Definicija 1.12. *Neka su (X,d_X) i (Y,d_Y) metrički prostori. Za preslikavanje $f : X \to Y$ kažemo da je neprekidno u tački $x_0 \in X$ ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(d_X(x_0,x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon)\ .$$

Preslikavanje je neprekidno na X ako je neprekidno u svakoj tački $x \in X$.

Teorem 1.18. *Neka su (X,d_X) i (Y,d_Y) metrički prostori i $f : X \to Y$. Sljedeća tvrđenja su ekvivalentna.*

1. *f je neprekidna na X.*
2. $(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon)$.
3. *Za svaki otvoreni skup $V \subseteq Y$ je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u X.*

Dokaz : (1. $\Leftrightarrow$ 2.)
Neka je f neprekidna funkcija. Neka je $x_0 \in X$ proizvoljan. Tada vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ (d(x,x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon)\ .$$

Drugačije rečeno, vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ (x \in B(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0),\varepsilon))\ ,$$

odnosno

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ (f(x) \in f(B(x_0,\delta))) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0),\varepsilon)\ ,$$

ili u skupovnom obliku ovo znači

$$f(B(x_0,\delta))) \subseteq B(f(x_0),\varepsilon)\ .$$

(2. $\Rightarrow$ 3.)
Neka vrijedi iskaz 2. i neka je V proizvoljan neprazan otvoren skup u Y. Neka je $x \in f^{-1}(V)$ proizvoljan. To znači da je $f(x) \in V$, a zbog otvorenosti skupa V, postoji $\varepsilon > 0$, takav da je $B(f(x),\varepsilon) \subseteq V$. Na osnovu 2., za takav ε postoji $\delta > 0$, tako da vrijedi

$$f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon) \subseteq V\ .$$

Primjenimo li poznate nam stvari iz preslikavanja, imamo

$$B(x,\delta) \subseteq f^{-1} \circ f(B(x,\delta)) \subseteq f^{-1}(V) \ .$$

Dakle za proizvoljan $x \in f(V)$, postoji kugla $B(x,\delta) \subseteq f^{-1}(V)$, pa je $f^{-1}(V)$ otvoren skup.
(3. $\Rightarrow$ 2.)
Neka su $x \in X$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljni. Tada je $B(f(x),\varepsilon)$ otvoren skup i $f(x) \in B(f(x),\varepsilon)$. Na osnovu 3. je onda i $f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$ otvoren skup. Osim toga je $x = f^{-1} \circ f(x) \in f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$, pa zbog otvorenosti, postoji $\delta > 0$, takav da je $B(x,\delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$. Iz posljednjeg onda imamo

$$f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon) \ .$$

□

Definicija 1.13. *Neka su (X,d_X) i (Y,d_Y) metrički prostori i neka je $f : X \to Y$. Za preslikavanje f kažemo da je izometrija iz X u Y ako je injektivno preslikavanje i ako vrijedi*

$$(\forall x', x'' \in X) \ d_Y(f(x'), f(x'')) = d_X(x', x'') \ .$$

Ako postoji izometrija iz X u Y, kažemo da se X može izometrički smjestiti ili uložiti u Y. Sa stanovišta teorije metričkih prostora, to jest ako nas interesuje samo odnos između objekata (udaljenost), a ne i vrsta objekata, onda ne pravimo razliku između prostora X i njegove izometričke slike $f(X) \subseteq Y$ i prosto pišemo $X \subseteq Y$.

1.2 Konvergencija u metričkim prostorima

Definicija 1.14. *Neka je (X,d) metrički prostor. Za niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ kažemo da konvergira ka $x_0 \in X$, ako vrijedi*

$$d(x_n, x_0) \to 0 \ , \ (n \to \infty) \ .$$

Činjenicu da niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka tački x_0, uobičajeno zapisujemo sa

$$x_n \to x_0 \ , \ n \to \infty \ \text{ ili } \ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \ .$$

Gore definisanu konvergenciju nazivamo *konvergencija po metrici* jer kao što ćemo vidjeti, izučavat ćemo i neke druge vrste konvergencija.

Lema 1.19. *Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u metričkom prostoru (X,d). Sljedeća dva tvrđenja su ekvivalentna.*

1. $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.
2. *Za svako $\varepsilon > 0$, postoji samo konačno mnogo članova niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji se nalaze van kugle $B(x_0,\varepsilon)$.*

Primjer 1.18. Primjetimo da će u metričkom prostoru sa diskretnom metrikom konvergentni nizovi biti samo oni nizovi koji su počev od nekog indeksa konstantni nizovi. ♢

Primjer 1.19. Posmatrajmo prostor $C[1,2]$ sa standardnom "maksimum" metrikom. Njemu pripadaju funkcije $f_n(x) = (1+x^n)^{\frac{1}{n}}$ $(n \in \mathbb{N})$ i $f(x) = x$. Za proizvoljno $x \in [1,2]$ i proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ vrijedi,

$$0 \leq f_n(x) - f(x) = (1+x^n)^{\frac{1}{n}} - x \leq (x^n + x^n)^{\frac{1}{n}} - x = x(\sqrt[n]{2} - 1) \leq 2(\sqrt[n]{2} - 1) \ .$$

Dakle,

$$d(f_n, f) = \max_{x\in[1,2]} |f_n(x) - f(x)| \leq 2(\sqrt[n]{2} - 1) \ \to \ 0 \ , (n \to \infty) \ ,$$

što znači da je niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan ka funkciji f po metrici d.

Posmatrajmo sada kvadratnu metriku d_2 na $C[1,2]$,

$$f,g\in C[1,2]\ ,\ d_2(f,g)=\left(\int_1^2 |f(x)-g(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\ .$$

Kako generalno vrijedi,

$$\begin{aligned} d_2(f,g) &= \left(\int_1^2 |f(x)-g(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_1^2 (\max_{t\in[1,2]}|f(t)-g(t)|)^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= d(f,g)\left(\int_1^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = d(f,g)\ , \end{aligned}$$

to će posmatrani niz biti konvergentan i u metrici d_2. Kako dati funkcionalni niz nije konstantan, prema prethodnom primjeru ovaj niz neće biti konvergentan u diskretnoj metrici.
Ovim primjerom samo potvrđujemo činjenicu da konvergencija ovisi o izboru metrike na datom skupu tojest, konvergentan niz u jednoj metrici može biti divergentan u nekoj drugoj metrici. $\diamondsuit$

Pomoću konvergencije sada možemo okarakterisati zatvorene skupove, a time i zatvorenje skupa u metričkom prostoru.

Lema 1.20. *Neka je $F\subseteq X$ zatvoren skup i neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset F$ takav da $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$. Tada $x_0\in F$.*

Definicija 1.15. *Neka je (X,d) metrički prostor. Tačku $x\in A\subseteq X$ nazivamo izolovanom tačkom skupa A ako postoji okolina tačke x u kojoj osim tačke x nema drugih tačaka iz skupa A.*

Definicija 1.16. *Tačka $x\in X$ je tačka nagomilavanja skupa A ako se u svakoj okolini tačke x nalazi bar jedna tačka skupa A različita od x.*
Skup svih tačaka nagomilavanja skupa A nazivamo izvodni skup i označavamo ga sa A'.

Lema 1.21. *Neka je A proizvoljan podskup metričkog prostora (X,d). Tada vrijedi,*

$$\overline{A}=\{x\in X\mid (\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset A)\ \lim_{n\to\infty}x_n=x\}\ .$$

Kao posljedicu gornje leme imamo

Posljedica 1.22. *Svaka adherentna tačka skupa A je ili tačka nagomilavanja ili izolovana tačka.*

Sada možemo dati kompletnu karakterizaciju zatvorenja nekog skupa. Naime, za proizvoljan skup A, tačke skupa $\overline{A}$ su:

- izolovane tačke skupa A,
- tačke nagomilavanja skupa A koje pripadaju skupu A i
- tačke nagomilavanja skupa A koje ne pripadaju skupu A.

Drugačije rečeno vrijedi,

$$\overline{A}=A\cup A'\ .$$

Na osnovu definicije rastojanja tačke od skupa, sada imamo jednu interesantnu karakterizaciju adherencije skupa.

Lema 1.23. *Neka je X metrički prostor i $A\subseteq X$ proizvoljan podskup. Tada vrijedi*

$$\overline{A}=\{x\in X\mid d(x,A)=0\}\ .$$

Dokaz : Ako je $x \in \overline{A} = A \cup A'$ tada, ako $x \in A$, jasno $d(x,A) = 0$. Neka je $x \in A'$. Za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji $a \in A$, takav da je $a \in B(x,\varepsilon)$, to jest $d(x,a) < \varepsilon$. Ovo opet znači da je $d(x,A) = 0$. Obratno, neke je za neko $x \in X$, $d(x,A) = 0$. To znači, na osnovu definicije infimuma, da za svako $\varepsilon > 0$, postoji $a \in A$, takav da je $d(x,a) < \varepsilon$. Ovo opet znači da je $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$, to jest $x \in A \cup A' = \overline{A}$. □

Teorem 1.24. *Konvergentan niz može konvergirati samo jednoj tački.*

Dokaz : Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ za koga vrijedi $x_n \to x'$ i $x_n \to x''$ $(n \to \infty)$. Na osnovu relacije trougla imamo

$$0 \le d(x',x'') \le d(x',x_n) + d(x_n,x'') \ ,$$

za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$. Desna strana teži 0 kada $n \to \infty$, pa očigledno mora vrijediti $d(x',x'') = 0$, odnosno $x' = x''$. □

Teorem 1.25. *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

Dokaz : Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ i neka $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Uzimajući da je $\varepsilon = 1$, imamo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za svako $n \ge n_0$, vrijedi

$$d(x_n,x_0) < 1 \ .$$

Označimo sa $R' = \max\{d(x_0,x_1), d(x_0,x_2), ..., d(x_0,x_{n_0-1})\}$. Neka je sada $R = R' + 1$. Tada očigledno vrijedi

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ x_n \in B(x_0,R) \ ,$$

to jest niz je ograničen. □

Sada sa pojmom konvergencije možemo iskazati još jednu važnu osobinu metrike.

Teorem 1.26. *Metrička funkcija je neprekidna funkcija svojih argumenata.*

Dokaz : Neka je (X,d) proizvoljan metrički prostor i neka su $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, takvi da $x_n \to x_0$ i $y_n \to y_0$ $(n \to \infty)$. Koristeći Lemu 1.3, imamo

$$|d(x_n,y_n) - d(x_0,y_0)| \le d(y_n,y_0) + d(x_n,x_0) \to 0 \ (n \to \infty) \ ,$$

to jest

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = d(x_0,y_0) \ .$$

□

1.3 Kompletnost metričkih prostora

Definicija 1.17. *Neka je (X,d) metrički prostor. Za niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ kažemo da je Cauchyjev niz ako vrijedi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n,m \in \mathbb{N})(n,m \ge n_0 \ \Rightarrow \ d(x_n,x_m) < \varepsilon) \ .$$

Drugačije rečeno, niz je Cauchyjev ako vrijedi

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n,x_m) = 0 \ .$$

Primjer 1.20. Posmatrajmo niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C[0,1]$, zadat sa $f_n(t) = t^n$ $(n \in \mathbb{N}, t \in [0,1])$. Za proizvoljno fiksno $t \in [0,1)$ i za $n,m \in \mathbb{N}$ (neka je npr. $n < m$) imamo

$$f_n(t) - f_m(t) = t^n - t^m = t^n(1 - t^{m-n}) \le t^n \ .$$

Puštajući da n teži u beskonačnost, desna strana teži ka 0, pa zbog proizvoljnosti $t \in [0,1)$, zaključujemo

$$d(f_n,f_m) = \max_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f_m(t)| \to 0 \ , \ (n,m \to \infty) \ .$$

(Očigledno je gornje tačno i za $t = 1$) Dakle, posmatrani niz je Cauchyjev. ♢

Primjer 1.21. Posmatrajmo numerički red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Formirajmo niz njegovih parcijalnih suma

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}} .$$

Neka su $m,n\in\mathbb{N}$ različiti i neka je $n<m$, tada vrijedi

$$s_m - s_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{m} .$$

Ako specijalno uzmemo da je $m=2n$, vrijedit će aproksimacija

$$s_{2n}-s_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} \geq n\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} ,$$

što nam govori da niz $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nije Cauchyjev niz. ♢

Teorem 1.27. *Svaki Cauchyjev niz je ograničen.*

Dokaz : Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz. Na osnovu definicije Cauchyjevog niza, stavljajući $n=n_0$ imamo

$$(\forall\varepsilon>0)(\forall m\geq n_0)\ d(x_m,x_{n_0})<\varepsilon .$$

Ovo znači da se svi članovi niza, osim njih konačno mnogo, nalaze u kugli $B(x_{n_0},\varepsilon)$. Označimo sa

$$R=\max\{d(x_1,x_{n_0}),d(x_2,x_{n_0}),\ldots,d(x_{n_0-1},x_{n_0})\} .$$

Jasno je sada da za svako $n\in\mathbb{N}$ vrijedi $x_n\in B(x_{n_0},R+\varepsilon)$, to jest niz je ograničen. □

Teorem 1.28. *Svaki konvergentan niz je Cauchyjev.*

Dokaz : Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan niz i neka $x_n\to x$ $(n\to\infty)$. Neka je $\varepsilon>0$ proizvoljno. Na osnovu definicije konvergencije imamo

$$(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\ (n\geq n_0 \Rightarrow d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}) .$$

Neka su sada $m,n\in\mathbb{N}$ i neka je $m,n\geq n_0$. Tada je

$$d(x_n,x_m)\leq d(x_n,x)+d(x,x_m)<\varepsilon ,$$

a ovo znači da je niz Cauchyjev. □

Da Cauchyjev niz ne mora biti konvergentan, dovoljno je posmatrati niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{Q}$, gdje je x_n decimalni zapis broja $\sqrt{2}$ na n decimala.
Jasno je da niz nije konvergentan u $\mathbb{Q}$, to jest $x_n\to\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$. Međutim, očigledno je za $n>m$, $d(x_n,x_m)\leq\frac{1}{10^n}\to 0$ kada $n,m\to\infty$, to jest niz je Cauchyjev.

Definicija 1.18. *Za metrički prostor u kome je svaki Cauchyjev niz konvergentan kažemo da je kompletan ili potpun metrički prostor.*

Iz matematičke analize su nam poznati Cauchyjevi principi konvergencije nizova i redova. Taj princip za nizove se sada može iskazati ovako:
Svaki realan Cauchyjev niz je konvergentan ,
a to nije ništa drugo nego činjenica da je skup realnih brojeva sa uobičajenom metrikom, kompletan metrički prostor.

Ispitivati osobinu kompletnosti po definiciji za neki metrički prostor nije baš praktičan način, pa otuda navodimo jednu karakterizaciju ove osobine.

Teorem 1.29. *Metrički prostor (X,d) je kompletan ako i samo ako presjek proizvoljnog monotono opadajućeg niza zatvorenih kugli, čiji niz dijametara teži ka 0, sadrži tačno jednu tačku.*

Dokaz : $(\Rightarrow)$
Neka je X kompletan metrički prostor. Posmatrajmo proizvoljan niz zatvorenih kugli $K_n = K(x_n, r_n)$ koji zadovoljava osobine

- $(\forall n \in \mathbb{N})\ K_n \supseteq K_{n+1}$,
- $r_n \to 0\ (n \to \infty)$.

Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ i neka je $m > n$. Tada je $K_m = K(x_m, r_m) \subset K_n = K(x_n, r_n)$, pa očigledno vrijedi $d(x_m, x_n) < r_n$. Kako $r_n \to 0$, jasno je da niz centara posmatranih kugli predstavlja Cauchyjev niz u X, a zbog kompletnosti on je i konvergentan. Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x\ .$$

Pokažimo sada da $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.
Za proizvoljno $k \in \mathbb{N}$ sve tačke niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, osim njih konačno mnogo, leže u kugli K_k, pa je x tačka nagomilavanja skupa K_k. Kako je K_k zatvoren skup, to on sadrži sve svoje tačke nagomilavanja. Dakle vrijedi,

$$(\forall k \in \mathbb{N})\ x \in K_k\ ,$$

to jest $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.
Ako bi postojala i neka tačka x' sa istom osobinom, tada bi imali $0 \le d(x,x') \le r_n$, a kako $r_n \to 0$, moralo bi biti $x = x'$, čime je jedinstvenost pokazana.
$(\Leftarrow)$
Pretpostavimo da X nije kompletan metrički prostor. To znači da u njemu postoji niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji jeste Cauchyjev ali nije konvergentan.
Kako je to Cauchyjev niz, to onda za svako $i \in \mathbb{N}$, postoji $n_i \in \mathbb{N}$, takav da vrijedi

$$(\forall m > n_i) d(x_m, x_{n_i}) < \frac{1}{2^i}\ ,\ (i = 1, 2, \ldots)\ .$$

Za ovako odabrane n_i ($i \in \mathbb{N}$), posmatrajmo zatvorene kugle

$$K_i = K\left(x_{n_i}, \frac{1}{2^{i-1}}\right)\ .$$

Očigledno niz poluprečnika ovih kugli teži ka 0.
Ako je $x \in K_{i+1}$, tada je

$$\begin{aligned} d(x, x_{n_i}) &\le d(x, x_{n_{i+1}}) + d(x_{n_{i+1}}, x_{n_i}) \\ &< \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i+1}} < 2\frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{i-1}}\ , \end{aligned}$$

to jest $x \in K_i$. Dakle, $K_{i+1} \subset K_i$, za proizvoljno $i \in \mathbb{N}$.
Na ovaj način smo formirali monotono opadajući niz zatvorenih kugli čiji niz dijametara teži ka 0. Pretpostavimo sada da postoji $x \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i$. Ovo bi značilo da za proizvoljno $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $d(x, x_{n_i}) < \frac{1}{2^{i-1}}$.
Neka je sada za fiksno $i \in \mathbb{N}$, $m > n_i$ proizvoljan. Onda je

$$d(x_m, x) \le d(x, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, x_m) < \frac{1}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^i} = \frac{3}{2^i}\ ,$$

a ovo bi predstavljalo konvergenciju našeg polaznog niza, što bi bila kontradikcija. Dakle, mora biti $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i = \varnothing$.
Kontrapozicijom imamo traženo tvrđenje. $\square$

Teorem 1.30. *Svaki zatvoren potprostor kompletnog metričkog prostora je kompletan metrički prostor za sebe.*

Dokaz : Neka je A zatvoren podskup kompletnog metričkog prostora (X,d). Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ Cauchyjev niz (u metričkom potprostoru (A,d)). Tada je taj niz Cauchyjev i u X, pa zbog kompletnosti on je i konvergentan, to jest $x_n \to x_0 \in X$ $(n \to \infty)$. Tačka x_0 je tada ili tačka nagomilavanja skupa $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$, ili se beskonačno mnogo puta pojavljuje kao element niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. U prvom slučaju zbog zatvorenosti skupa A zaključujemo da $x_0 \in A$, a u drugom slučaju, zbog $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, ponovo zaključujemo da $x_0 \in A$. □

Primjer 1.22. Neka je $1 \le p < \infty$. Prostor l_p je kompletan metrički prostor.

Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan Cauchyjev niz u l_p. Tada za proizvoljan $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da je za $n,m \ge n_0$, s obzirom na metriku u l_p,

$$d(x_n,x_m) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^n - \xi_i^m|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt[p]{4}} . \tag{1.6}$$

Posmatramo li samo jedan sabirak sume iz (1.6), imamo da za proizvoljno $i \in \mathbb{N}$ vrjedi

$$|\xi_i^n - \xi_i^m| \le d(x_n,x_m) < \frac{\varepsilon}{\sqrt[p]{4}} ,$$

pa zaključujemo da za proizvoljno $i \in \mathbb{N}$, niz $(\xi_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyjev niz i to u $\mathbb{R}$, a zbog kompletnosti $\mathbb{R}$, on je i konvergentan niz. Neka je

$$\xi_i^n \to \xi_i \ , \ (n \to \infty) \ ; \ i \in \mathbb{N} .$$

Posmatrajmo sada na ovaj način konstruisan niz $x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Polazni niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je kao Cauchyjev, ograničen niz, pa vrijedi

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ d(x_n,0) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le R ,$$

to jest sadržan je u nekoj kugli centra 0 poluprečnika R. Tim prije je onda $\sum_{i=1}^{N} |\xi_i^n|^p \le R^p$. Zbog konačne sume, sada puštajući da $n \to \infty$, dobijamo $\sum_{i=1}^{N} |\xi_i|^p \le R^p$. Dakle, niz parcijalnih suma reda $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|^p$ je ograničen, a zbog monotonosti onda zaključujemo da je dati red konvergentan, odnosno

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|^p < \infty ,$$

što znači da je niz $x \in l_p$.

Iz (1.6) takođe imamo da za $n,m \ge n_0$ i za proizvoljno $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{k} |\xi_i^n - \xi_i^m|^p < \frac{\varepsilon^p}{4} .$$

Držeći n čvrstim i puštajući da $m \to \infty$, slijedi

$$\sum_{i=1}^{k} |\xi_i^n - \xi_i|^p \le \frac{\varepsilon^p}{4} < \frac{\varepsilon^p}{2} .$$

Rezonujući slično kao malo prije, sada imamo da za $n \geq n_0$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^n - \xi_i|^p \leq \frac{\varepsilon^p}{2} < \varepsilon^p \ .$$

Ovo u stvari znači da za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svaki prirodan broj $n \geq n_0$, vrijedi $d(x_n, x) < \varepsilon$. Dakle, niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan u l_p, pa zbog njegove proizvoljnosti imamo kompletnost prostora. $\diamondsuit$

Definicija 1.19. *Za skup $A \subseteq X$ kažemo da je gust u skupu $B \subseteq X$ ako vrijedi $B \subseteq \overline{A}$. Ako je $\overline{A} = X$, onda kažemo da je A svuda gust u X.*

Drugačije rečeno, skup A je gust u skupu B ako se u svakoj okolini proizvoljne tačke iz B nalazi bar jedna tačka skupa A.

Primjer 1.23. Skup $\mathbb{Q}$ je svuda gust u $\mathbb{R}$. Ova činjenica nam je poznata još iz matematičke analize, a oslanja se na stav da između svaka dva različita realna broja, postoji racionalan broj. $\diamondsuit$

Primjer 1.24. U prostoru $C[a,b]$, skup funkcija

$$f_0(t) = 1,\ f_1(t) = t,\ f_2(t) = t^2,\ \dots,\ f_n(t) = t^n,\ \dots$$

je svuda gust skup. I ova činjenica je poznata iz matematičke analize. Ona je bazirana na činjenici da se svaka neprekidna funkcija može razložiti u red, to jest

$$f \in C[a,b]\ ,\ f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} t^n\ ,$$

a to je ustvari Taylorov teorem. $\diamondsuit$

Definicija 1.20. *Skup $A \subseteq X$ je nigdje gust skup u X ako njegova adherencija ne sadrži niti jednu kuglu.*

Skup A je nigdje gust ako $\overline{A}$ nema unutrašnjih tačaka.

Primjer 1.25. Skup $\mathbb{N}$ je nigdje gust u $\mathbb{R}$. $\diamondsuit$

Činjenica da metrički prostor nije kompletan, kao što ćemo vidjeti, nije puno otežavajuća. Naime vrijedi

Teorem 1.31. ***(Teorem o kompletiranju)***
Za svaki metrički prostor X, postoji kompletan metrički prostor $\overline{X}$, takav da je

1. *$X \subseteq \overline{X}$ (to jest X se može izometrički smjestiti u $\overline{X}$).*
2. *X je svuda gust u $\overline{X}$.*

Dokaz : Označimo sa X_1 skup svih Cauchyjevih nizova prostora X. Na X_1 uvedimo relaciju

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{def}{\Leftrightarrow} d(x_n, y_n) \to 0\ ,\ (n \to \infty)\ .$$

Lahko se pokazuje da za ovako uvedenu relaciju vrijede osobine

- $(\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_1)(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $(\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_1)(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $(\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_1)(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \wedge (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dakle, uvedena relacija je relacija ekvivalencije na X_1, te ona razbija skup X_1 na klase ekvivalencije. Označimo količnički skup sa $X_1/_\sim = \overline{X}$, čije elemente ćemo označavati slovima ξ, η, ζ i slično.

Definišimo za proizvoljne $\xi, \eta \in \overline{X}$, sljedeću funkciju,

$$d(\xi,\eta) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)\ , \tag{1.7}$$

gdje su $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \xi$ i $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \eta$. Ispitati korektnost gornje definicije znači pokazati da limes na desnoj strani postoji i konačan je i da on ne ovisi o izboru predstavnika klasa ekvivalencije.
Neka su $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \xi$ i $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \eta$. Na osnovu nejednakosti trougla i na osnovu Leme 1.3 imamo

$$\begin{aligned} |d(x_n,y_n) - d(x_m,y_m)| &\leq |d(x_n,y_n) - d(x_m,y_n)| + |d(x_m,y_n) - d(x_m,y_m)| \\ &\leq d(x_n,x_m) + d(y_n,y_m)\ . \end{aligned}$$

Kako radimo sa Cauchyjevim nizovima, to desna strana teži ka 0 kada pustimo da $n,m\to\infty$. Ovo znači da je niz $(d(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev, a kako se on nalazi u $\mathbb{R}$, on je i konvergentan, a to znači da limes postoji.

Neka su sada $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \xi$ i $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \eta)$ drugi predstavnici klasa. Tada je

$$d(x'_n,y'_n) \leq d(x'_n,x_n) + d(x_n,y_n) + d(y'_n,y_n)\ .$$

Kako su $(x'_n),(x_n)$ i $(y'_n),(y_n)$ iz istih klasa, zaključujemo,

$$d(x'_n,y'_n) \leq d(x_n,y_n)\ . \tag{1.8}$$

Na isti način se pokazuje da mora biti

$$d(x_n,y_n) \leq d(x'_n,y'_n)\ . \tag{1.9}$$

Sad iz (1.8) i (1.9), zaključujemo da je vrijednost limesa neovisna o izboru predstavnika klase ekvivalencije.

Za vježbu ostavljamo da se pokaže da novouvedena funkcija d zadovoljava sljedeće osobine:

1. $d(\xi,\eta) \geq 0\ ,\ \xi,\eta \in \overline{X}$.
2. $d(\xi,\eta) = 0 \Leftrightarrow \xi = \eta$.
3. Za proizvoljne $\xi,\eta \in \overline{X}$, $d(\xi,\eta) = d(\eta,\xi)$.
4. Za proizvoljne $\xi,\eta,\zeta \in \overline{X}$, $d(\xi,\zeta) \leq d(\xi,\eta) + d(\eta,\zeta)$.

Gornje osobine znače da je ustvari d metrika na skupu $\overline{X}$.

Neka je sada $x \in X$ proizvoljan. Označimo sa ξ_x onu klasu ekvivalencije koja u sebi sadrži konstantni niz $(x,x,...,x,...)$. Na ovaj način smo definisali jedno preslikavanje $f: X \to \overline{X}$, zadato sa $f(x) = \xi_x$.
Za proizvoljne $x,y \in X$ sada imamo

$$d(f(x),f(y)) = d(\xi_x,\xi_y) = \lim_{n\to\infty} d(x,y) = d(x,y)\ ,$$

a ovo ustvari znači da je f izometrija, pa na osnovu ranije rečenog, pišemo $X \subseteq \overline{X}$.

Pokažimo još drugu traženu osobinu, to jest da je X svuda gust u $\overline{X}$. Neka je $\xi \in \overline{X}$ proizvoljan i neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \xi$ proizvoljan predstavnik te klase. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, pa kako je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da je za proizvoljne prirodne $n,m \geq n_0$, $d(x_n,x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Za $n \geq n_0$, posmatrajmo klase ξ_{x_n}. Imamo

$$d(\xi_{x_n},\xi) = \lim_{m\to\infty} d(x_n,x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\ .$$

Dakle, za svako $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da je za proizvoljno prirodno $n \geq n_0$ zadovoljena relacija $d(\xi_{x_n}, \xi) < \varepsilon$. Ali ovo ne znači ništa drugo do činjenicu da $\xi_{x_n} \to \xi$ $(n \to \infty)$.
Kako je $f(x_n) = \xi_{x_n}$ i f je izometrija, ne pravimo razliku između elemenata x_n i ξ_{x_n}. Zaključujemo da za $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \xi$, vrijedi

$$x_n \to \xi \ , \ (n \to \infty) \ ,$$

a ovo znači da je X svuda gust u $\overline{X}$.

Ostaje nam još pokazati da je $\overline{X}$ kompletan prostor.
Neka je $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan Cauchyjev niz u $\overline{X}$. Kako je X svuda gust u $\overline{X}$ (to jest $f(X)$ zaista svuda gust u $\overline{X}$) to vrijedi

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists z_n \in X) d(z_n, \xi_n) < \frac{1}{n} \ . \tag{1.10}$$

Za ovako konstruisan niz imamo

$$\begin{aligned} d(z_n, z_m) &\leq d(z_n, \xi_n) + d(\xi_n, \xi_m) + d(\xi_m, z_m) \\ &< \frac{1}{n} + d(\xi_n, \xi_m) + \frac{1}{m} \ . \end{aligned}$$

Kako je $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz, to onda imamo

$$d(z_n, z_m) \to 0 \ , \ (n, m \to \infty) \ ,$$

odnosno, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyjev niz u X. Neka je sada ξ_0 ona klasa ekvivalencije u $\overline{X}$ koja sadrži niz $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Prema ranije pokazanom vrijedi

$$d(\xi_{z_n}, \xi_0) \to 0 \ , \ (n \to \infty) \ ,$$

to jest

$$d(z_n, \xi_0) \to 0 \ , \ (n \to \infty) \ . \tag{1.11}$$

Na osnovu toga je

$$0 \leq d(\xi_n, \xi_0) \leq d(\xi_n, z_n) + d(z_n, \xi_0) \ ,$$

a onda na osnovu (1.10) i (1.11) imamo

$$d(\xi_n, \xi_0) \to 0 \ , \ (n \to \infty) \ .$$

Dakle, Cauchyjev niz (ξ_n) je konvergentan, i zbog proizvoljnosti, $\overline{X}$ je kopletan metrički prostor. □

Ideju kompletiranja prostora lijepo možemo vidjeti u proširenju skupa racionalnih brojeva na skup realnih brojeva.

Definicija 1.21. *Za skup M podskup metričkog prostora X, kažemo da je skup prve kategorije u X ako se on može predstaviti kao prebrojiva unija nigdje gustih skupova.*
Skup koji nije prve kategorije je skup druge kategorije.

Konačna unija nigdje gustih skupova je i sama nigdje gust skup, ali to nije tačno za prebrojivu uniju. Naime, $\mathbb{Q}$ se može predstaviti kao prebrojiva unija nigdje gustih skupova (singltona) ali je to ipak svuda gust skup u $\mathbb{R}$.

Teorem 1.32 (Baireov teorem). *Kompletan metrički prostor je skup druge kategorije u sebi.*

Dokaz : Pretpostavimo da tvrđenje nije tačno, to jest da postoji kompletan metrički prostor X koji je prve kategorije odnosno, koga možemo predstaviti kao prebrojivu uniju nigdje gustih skupova,

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \ , \ X_i \ (i \in \mathbb{N}) \text{ nigdje gusti skupovi.}$$

Posmatrajmo proizvoljnu zatvorenu kuglu $K_0 = K(x_0, r_0)$ ($r_0 > 0$) u X. Kako je X_1 nigdje gust, to postoji kugla $K_1 = K(x_1, r_1)$, takva da vrijedi

$$K_1 \subset K_0 \ , \ X_1 \cap K_1 = \varnothing \ , \ r_1 < \frac{r_0}{2} \ .$$

Kako je i X_2 nigdje gust skup, postoji zatvorena kugla $K_2 = K(x_2, r_2)$, takva da je

$$K_2 \subset K_1 \ , \ X_2 \cap K_2 = \varnothing \ , \ r_2 < \frac{r_1}{2} \ .$$

Nastavljajući ovaj postupak konstriusali bismo niz zatvorenih kugli $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, za koje bi vrjedilo

- $K_{i+1} \subset K_i$, $i \in \mathbb{N}$.
- $X_i \cap K_i = \varnothing$, $i \in \mathbb{N}$.
- $r_i < \frac{r_{i-1}}{2} < \frac{r_0}{2^i}$.

Posmatrajmo sada niz $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, napravljen od centara definisanih kugli K_i ($i \in \mathbb{N}$). Za proizvoljne $m, n \in \mathbb{N}$, neka je npr. $m > n$, vrijedi

$$x_m \in K_m \subset K_n \ , \ x_n \in K_n \ ,$$

to jest $x_n, x_m \in K_n$, a to onda znači

$$d(x_n, x_m) \leq 2r_n < 2\frac{r_0}{2^n} = \frac{r_0}{2^{n-1}} \ .$$

iz ovoga imamo očiglednu tvrdnju

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})(n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon) \ ,$$

to jest niz (x_n) je Cauchyjev, a kako on leži u kompletnom metričkom prostoru X, on je i konvergentan. Dakle,

$$(\exists x_0 \in X) \ x_n \to x_0 \ (n \to \infty) \ .$$

Zbog prve osobine posmatranih kugli imamo da je tačka x_0, tačka nagomilavanja svake od kugli K_n ($n \in \mathbb{N}$), a zbog njihove zatvorenosti je onda $x_0 \in K_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Zbog toga i zbog druge osobine onda imamo da x_0 ne pripada niti jednom X_n ($n \in \mathbb{N}$), a to znači da

$$x_0 \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = X \ ,$$

što je u suprotnosti sa ranije utvrđenom činjenicom da je $x_0 \in X$. Dakle, X jeste skup druge kategorije. $\square$

1.4 Banachov stav o fiksnoj tački

Definicija 1.22. *Neka je $f : X \to X$ proizvoljno preslikavanje. Za tačku $x \in X$ kažemo da je fiksna tačka preslikavanja f, ako vrijedi $f(x) = x$.*

Primjer 1.26. Za preslikavanje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zadato sa $f(x) = x^3$, tačke $x = 1$, $x = 0$ i $x = -1$ imaju osobinu $f(1) = 1$, $f(0) = 0$ i $f(-1) = -1$, to jest one su fiksne tačke posmatranog preslikavanja. $\diamondsuit$

Primjer 1.27. Posmatrajmo preslikavanje $A : C[0,1] \to C[0,1]$, zadato sa

$$Af(x) = f(0) + \int_0^x f(t)dt \ .$$

Za funkciju $f(x) = e^x \in C[0,1]$, vrijedi

$$Af(x) = e^0 + \int_0^x e^t dt = 1 + e^x - 1 = e^x \ ,$$

to jest $f(x) = e^x$ je fiksna tačka preslikavanja A. $\diamondsuit$

Definicija 1.23. *Za preslikavanje $f : X \to X$ kažemo da je kontraktivno, ako postoji konstanta $q \in [0,1)$, takva da za proizvoljne $x,y \in X$ vrijedi*

$$d(f(x), f(y)) \leq q\,d(x,y) \ .$$

Broj q nazivamo konstanta kontraktivnosti.

Primjer 1.28. Funkcija $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, zadata sa $f(x) = \arctan x$, na osnovu Lagrangeove teoreme zadovoljava

$$|\arctan x - \arctan y| = \frac{1}{1+\xi^2}|x-y| \ ,$$

za neko $\xi \in \mathbb{R}^+$ i za proizvoljne $x,y \in \mathbb{R}$. Stavimo da je $q = \frac{1}{1+\xi^2}$, jasno $q \in [0,1)$ i ako posmatramo standardnu metriku na $\mathbb{R}$, imamo

$$d(f(x), f(y)) \leq q\,d(x,y) \ ,$$

to jest preslikavanje f je kontraktivno. $\diamondsuit$

Osobina kontraktivnosti je očigledno jača od osobine neprekidnosti preslikavanja. Šta više, jača je i od uniformne neprekidnosti.

Teorem 1.33. *Ako je $f : X \to X$ kontraktivno preslikavanje, tada je f uniformno neprekidno preslikavanje.*

Dokaz : Neka je (X,d) metrički prostor i $f : X \to X$ kontraktivno preslikavanje sa konstantom kontrakcije q. Za proizvoljno $\varepsilon > 0$, izaberimo $\delta = \frac{\varepsilon}{q}$. Neka su sada $x', x'' \in X$ takvi da je $d(x', x'') < \delta$. Sada imamo

$$d(f(x'), f(x'')) \leq q d(x', x'') < q\delta = \varepsilon \ ,$$

što znači da je f uniformno neprekidno preslikavanje. $\square$

Nije teško pokazati da za kontraktivna preslikavanja vrijedi tvrđenje,

Lema 1.34. *Neka je $f : X \to X$ kontraktivno preslikavanje sa konstantom kontrakcije q. Tada je za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ preslikavanje f^n kontrakcija sa konstantom kontrakcije q^n.*

Međutim, ako je za neko $n \in \mathbb{N}$ f^n kontrakcija, jasno je da je tada f^n i neprekidno preslikavanje, ali tada ne mora biti i f neprekidna. Zaista, neka je $f : [0,1] \to [0,1]$ zadata sa

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & ; \quad \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

Tada je $f(f(x)) = 0$ i očigledno kontrakcija, ali polazna funkcija f je prekidna.

U ovoj sekciji mi ćemo se baviti jednim od najvažnijih i najprimjenljivijih teorema o fiksnoj tački. Riječ je o Banachovom teoremu koji predstavlja Banachov[5] doktorski rad rađen 1920, a objavljen 1922. godine.

Teorem 1.35. ***(Banachov stav o fiksnoj tački)***
Neka je $A : X \to X$ kontraktivno preslikavanje kompletnog metričkog prostora u samog sebe. Tada postoji tačno jedna fiksna tačka posmatranog preslikavanja.

Dokaz : Neka je $x_0 \in X$ proizvoljan. Definišimo sada niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ na sljedeći način:

$$x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0 \ , \ n \in \mathbb{N} .$$

Kako $A : X \to X$, jasno je da za proizvoljan prirodan broj n je $x_n \in X$, to jest $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$.
Neka je sada $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Na osnovu kontraktivnosti preslikavanja vrijedi

$$d(x_n, x_{n-1}) = d(Ax_{n-1}, Ax_{n-2}) \le qd(x_{n-1}, x_{n-2}) .$$

Ponavljajući gornji postupak, zaključujemo da vrijedi

$$d(x_n, x_{n-1}) \le q^{n-1} d(x_1, x_0) . \tag{1.12}$$

Neka je sada $m > n$ ($m, n \in \mathbb{N}$). Koristeći nejednakost trougla i (1.12) imamo

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\le d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\le \left(q^n + q^{n+1} + \cdots + q^{m-1}\right) d(x_0, x_1) \\ &= q^n \frac{1 - q^{m-n}}{1-q} d(x_0, x_1) \\ &\le \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1) . \end{aligned}$$

Na osnovu gornjeg očigledno vrijedi

$$d(x_n, x_m) \to 0 \ , \ (n, m \to \infty) ,$$

a što u stvari znači da je niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev. Kako se on nalazi u kompletnom metričkom prostoru, on je onda i konvergentan, pa stavimo da je $x_n \to \overline{x} \in X$ ($n \to \infty$). Sada imamo

$$0 \le d(\overline{x}, A\overline{x}) = \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, A\overline{x}) = \lim_{n\to\infty} d(Ax_n, A\overline{x}) .$$

Zbog kontraktivnosti preslikavanja i konvergencije niza dalje je

$$0 \le d(\overline{x}, A\overline{x}) \le q \lim_{n\to\infty} d(x_n, \overline{x}) = 0 .$$

Dakle, mora biti $d(\overline{x}, A\overline{x}) = 0$, a što zbog osobine metrike znači da je $A\overline{x} = \overline{x}$, to jest $\overline{x}$ je fiksna tačka preslikavanja.

Neka je i $\overline{\overline{x}} \in X$ neka druga fiksna tačka preslikavanja A. Tada bi bilo

$$d(\overline{x}, \overline{\overline{x}}) = d(A\overline{x}, A\overline{\overline{x}}) \le qd(\overline{x}, \overline{\overline{x}}) ,$$

a ovo je zbog $q \in [0,1)$ moguće samo ako je $d(\overline{x}, \overline{\overline{x}}) = 0$, to jest ako je $\overline{x} = \overline{\overline{x}}$. Time smo pokazali i jedinstvenost fiksne tačke posmatranog preslikavanja. □

[5] Stefan Banach, 1892-1945, poljski matematičar

Primjedba 1.4.1. *Pretpostavka o kontraktivnosti, to jest uslov da je $q < 1$, je fundamentalna za Teorem 1.35. Zaista, za preslikavanje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zadato sa $f(x) = x+1$, za $x \neq y$ imamo*

$$|f(x) - f(y)| = |x-y| \ ,$$

to jest kostanta je $q = 1$, a ovo preslikavanje nema fiksnu tačku.
Za preslikavanje $A : X \to X$ koje zadovoljava uslov

$$d(Ax, Ay) \leq d(x,y) \ ,$$

kažemo da je neekspanzivno preslikavanje.

Primjedba 1.4.2. *Takođe ni uslov da je $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ ne može figurisati u Teoremi 1.35. To možemo vidjeti posmatrajući preslikavanje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zadato sa $f(x) = \ln(1+e^x)$. Neka je $x \neq y$ i ne umanjujući opštost, pretpostavimo da je $x > y$. Tada je*

$$|f(x) - f(y)| = |\ln(1+e^x) - \ln(1+e^y)| = |x-y+\ln\frac{1+e^{-x}}{1+e^{-y}}| < |x-y| \ .$$

Pretpostavka o postojanju fiksne tačke bi značila postojanje $x \in \mathbb{R}$, takvog da je $\ln(1+e^x) = x$, ili što je ekvivalentno da vrijedi $1+e^x = e^x$, a ovo je očigledno nemoguće.
Pretpostavka $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ može obezbjediti postojanje i jedinstvenost fiksne tačke preslikavanja, ali uslovi na domen preslikavanja moraju biti jači od kompletnosti, što ćemo vidjeti u narednim izlaganjima.

Važnost Banachovog teorema o fiksnoj tački je velika. Međutim, treba istaći i vrijednost samog dokaza ovog teorema jer nam on daje princip raznih iterativnih metoda. Primjetimo da ako u nejednakosti

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1)$$

pustimo da $m \to \infty$, dobijamo

$$d(x_n, \overline{x}) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1) \ , \tag{1.13}$$

što u stvari predstavlja procjenu greške koja se pravi ako se umjesto tačnog rješenja $\overline{x}$, jednačine $Ax = x$, uzme "n-to približno rješenje" x_n te jednačine. Procjenu greške možemo izvršiti na razne načine.

Teorem 1.36. *Neka je A kontraktivno preslikavanje kompletnog metričkog prostora u samog sebe, sa konstantom kontraktivnosti q i fiksnom tačkom $\overline{x}$. Tada vrijedi:*

1. $d(x_n, \overline{x}) \leq \dfrac{q^n}{1-q} d(x_0, Ax_0)$,
2. $d(x_n, \overline{x}) \leq q d(x_{n-1}, \overline{x})$,
3. $d(x_n, \overline{x}) \leq \dfrac{q}{1-q} d(x_{n-1}, x_n)$.

Kao što imamo u narednom tvrđenju, ne mora samo preslikavanje biti kontraktivno da bi se obezbijedila egzistencija i jedinstvenost fiksne tačke.

Teorem 1.37. *Neka je X kompletan metrički prostor i neka $A : X \to X$. Ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je A^n kontraktivno preslikavanje, tada preslikavanje A ima tačno jednu fiksnu tačku.*

Dokaz : Kako je A^n (za neko $n \in \mathbb{N}$) kontraktivno preslikavanje kompletnog prostora u samog sebe, postoji jedinstvena fiksna tačka tog preslikavanja, to jest

$$(\exists_1 \overline{x} \in X)\; A^n\overline{x} = \overline{x} \; .$$

Ali tada imamo

$$A(A^n\overline{x}) = A^{n+1}\overline{x} = A^n(A\overline{x}) = A\overline{x} \; ,$$

što u stvari znači da je i $A\overline{x}$ fiksna tačka preslikavanja A^n. Zbog jedinstvenosti, zaključujemo da mora važiti

$$A\overline{x} = \overline{x} \; ,$$

odnosno, $\overline{x}$ je fiksna tačka preslikavanja A.

Ako bi postojala još neka fiksna tačka preslikavanja A, npr. $\overline{\overline{x}}$, tada bi imali

$$A^n\overline{\overline{x}} = A^{n-1}(A\overline{\overline{x}}) = A^{n-1}\overline{\overline{x}} = A^{n-2}(A\overline{\overline{x}}) = A^{n-2}\overline{\overline{x}} = \cdots = A\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{x}} \; .$$

Dakle, $\overline{\overline{x}}$ bi bila fiksna tačka i preslikavanja A^n, a to bi značilo da mora biti $\overline{x} = \overline{\overline{x}}$. □

Primjer 1.29. Posmatrajmo preslikavanje $f(x) = e^{-x}$ koje nije kontrakcija na $\mathbb{R}$. Zaista, recimo za $x = -2$ i $y = 0$ je $d(f(x), f(y)) = |f(-2) - f(0)| \approx 6.38 > |-2-0| = d(x,y)$.
Međutim, posmatrajmo preslikavanje $g(x) = f^2(x) = e^{-e^{-x}}$. Za proizvoljne $x, y \in \mathbb{R}$, na osnovu Lagrangeove teoreme, za neko t između x i y je

$$g(x) - g(y) = g'(t)(x-y) \; ,$$

pri čemu je $|g'(t)| = |e^{-e^{-t}}e^{-t}| = |e^{-(t+e^{-t})}| < e^{-1}$ (jer je $t + e^{-t} \geq 1$), pa zaključujemo da je f^2 kontraktivno preslikavanje sa konstantom kontrakcije $q = e^{-1} < 1$.
Prema gornjoj posljedici ipak postoji jedinstvena fiksna tačka preslikavanja $f(x) = e^{-x}$ tojest, postoji jedinstveno $x_0 \in \mathbb{R}$ takvo da je $e^{x_0} = x_0$, koje sada možemo dobiti primjenjujući iterativni postupak izložen dokazom Banachovog teorema, počev sa bilo kojom realnom vrijednošću. ♢

Nekada preslikavanje nije kontraktivno na čitavom kompletnom prostoru, ali jeste na nekom njegovom dijelu. Sljedeće tvrđenje nam obezbjeđuje jedinstvenost fiksne tačke i u takvim slučajevima i direktna je posljedica Banachovog teorema o fiksnoj tački.

Posljedica 1.38. *Neka je F zatvoren podskup kompletnog metričkog prostora X. Ako je $A : F \to F$ kontraktivno preslikavanje, onda preslikavanje A ima tačno jednu fiksnu tačku koja pripada F.*

Sljedećim tvrđenjem koje predstavlja lokalnu verziju Banachovog teorema, pokazujemo da se i kompletnost domena može izbjeći.

Lema 1.39. *Neka je (X,d) kompletan metrički prostor i neka je $A : B(x_0, r) \to X$ kontraktivno preslikavanje koje zadovoljava uslov*

$$d(Ax_0, x_0) < (1-q)r \; ,$$

gdje je q konstanta kontraktivnosti. Tada preslikavanje A ima jedinstvenu fiksnu tačku.

Dokaz : Neka su zadovoljeni uslovi leme. Tada postoji $0 \leq r_0 < r$ takav da je $d(Ax_0, x_0) \leq (1-q)r_0$. Posmatrajmo sada skup $\overline{B(x_0, r_0)}$, to jest zatvorenje kugle $B(x_0, r_0)$. Za $x \in \overline{B(x_0, r_0)}$ tada imamo

$$\begin{aligned} d(Ax, x_0) &\leq d(Ax, Ax_0) + d(Ax_0, x_0) \\ &\leq qd(x, x_0) + (1-q)r_0 \leq r_0 \; . \end{aligned}$$

Ovo znači da $A : \overline{B(x_0,r_0)} \to \overline{B(x_0,r_0)}$, pa na osnovu navedene posljedice zaključujemo da A ima jedinstvenu fiksnu tačku na $\overline{B(x_0,r_0)} \subseteq B(x_0,r)$. Jedinstvenost te fiksne tačke na čitavom $B(x_0,r)$ se pokazuje na standardan način. □

U posljednjih pedesetak godina teorija fiksne tačke je doživjela veliki napredak. Pri tome su date i mnoge generalizacije Banachovog principa kontrakcije. Kompletnosti radi dat ćemo jedan od tih rezultata.

Teorem 1.40. *Neka je (X,d) kompletan metrički prostor i neka je $A : X \to X$. Neka za proizvoljne različite $x,y \in X$ vrijedi*

$$d(Ax,Ay) \leq f(d(x,y)) \ ,$$

gdje je $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ monotona i neopadajuća (ne obavezno neprekidna) funkcija koja zadovoljava uslov

$$\lim_{n\to\infty} f^n(t) = 0 \ ,$$

za svako fiksno $t > 0$. Tada preslikavanje A ima jedinstvenu fiksnu tačku $x^* \in X$ za koju vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} A^n x = x^* \ ,$$

za proizvoljno $x \in X$.

Da je Banachov princip kontrakcije specijalan slučaj gornjeg teorema, lahko se vidi birajući $f(t) = qt$, gdje je $0 \leq q < 1$.

Pokažimo sada neke primjene Banachovog teorema o fiksnoj tački.

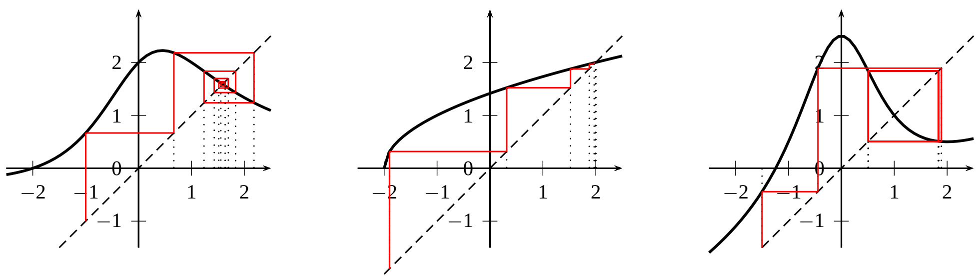
1. Neka je $y = f(x)$ funkcija definisana na segementu $[a,b]$. Pitanje, da li postoji $x_0 \in [a,b]$ takav da je $f(x_0) = x_0$ je očigledno pitanje egzistencije fiksne tačke ovog preslikavanja. Da bi zadovoljili prvi uslov teoreme (preciznije, posljedice) zahtijevamo da $f : [a,b] \to [a,b]$. Uslov kontraktivnosti možemo dobiti na nekoliko načina. Jedan je, zahtjev da je funkcija f Lipschizova na $[a,b]$, to jest da vrijedi

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \ , \ x,y \in [a,b] \ ,$$

i naravno pri tome zahtijevamo da je $L < 1$. Sada imamo ispunjene sve uslove teoreme o fiksnoj tački, pa postoji jedinstveno $x_0 \in [a,b]$, takav da je $f(x_0) = x_0$.

Uslov kontraktivnosti imamo i ako je ispunjeno $|f'(x)| \leq K < 1$ jer na osnovu Lagrangeove teoreme je

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x-y| \ , \ \xi \in [x,y] \ .$$



Na gornjoj slici lijevo i u sredini imamo slučaj kada je $|f'(x)| < 1$, a desno je situacija kada je $|f'(x)| \geq 1$, gdje i pored očiglednog postojanja fiksne tačke, itereativni metod ne konvergira.

2. Koristeći gornji primjer, lahko sada možemo pronaći uslove za postojanje rješenja jednačine $F(x) = 0$, na nekom segmentu $[a,b]$, pri čemu je $F(a) < 0$ i $F(b) > 0$. Pretpostavimo da vrijedi $0 < k \leq F'(x) \leq K$, za proizvoljno $x \in [a,b]$. Posmatrajmo funkciju

$$f(x) = x - \lambda F(x) \ .$$

Očigledno da je postojanje fiksne tačke funkcije f, ekvivalentno postojanju rješenja polazne jednačine. Kako je sada $f'(x) = 1 - \lambda F'(x)$, to onda vrijedi

$$1 - \lambda K \leq f'(x) \leq 1 - \lambda k \,,$$

pri čemu nam parametar λ očigledno može poslužiti da pomoću njega namjestimo kontraktivnost preslikavanja f.

Primjer 1.30. Standardna procedura za nalaženje rješenja jednačine $g(x) = 0$ u $\mathbb{R}$, gdje je g diferencijabilna funkcija, jeste poznati Newtonov iterativni postupak: startujući sa proizvoljnim x_0, izračunavamo niz po rekurentnoj formuli

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} \,, \;\; n \in \mathbb{N} \,.$$

Ova rekurzivna formula odgovara funkciji $f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$, koja iterirajući je iz tačke $x = x_0$, definiše niz $f(x_{n-1}) = x_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Očigledno će rješenje jednačine $g(x) = 0$, dovoditi do jednakosti $f(x) = x$, fiksne tačke preslikavanja f.

Iskoristimo sada Newtonov metod za procjenu vrijednosti broja $\sqrt{3}$. Uzet ćemo da je $g(x) = x^2 - 3$ i tražiti pozitivno rješenje jednačine $g(x) = 0$. Newtonova rekurzivna formula nam daje

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right) \,.$$

Kao što smo rekli, pozitivno rješenje jednačine $g(x) = 0$ ($\sqrt{3}$) će biti fiksna tačka preslikavanja

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right) \,.$$

Narednom tabelom date su tri iteracije preslikavanja f za tri različite startne vrijednosti x_0:

n	x_n	x_n	x_n
0	1.5	1.9	10
1	1.75	1.7394736842	5.15
2	1.7321428571	1.7320666454	2.8662621359
3	1.7320508100	1.7320508076	1.9564607317
4	1.7320508075	1.7320508075	1.7449209391
5	1.7320508075	1.7320508075	1.7320982711

Sva tri dobijena niza bi konvergirala ka vrijednosti $\sqrt{3} \approx 1.7320508075688$.

Da bi smo opravdali korištenje Banachovog teorema o fiksnoj tački na ovaj problem, trebamo odrediti kompletan metrički prostor na kome će funkcija f biti kontrakcija. Ako uzmemo da je to $(0, +\infty)$, na kome je funkcija definisana, nažalost nemamo kompletnost. Za bilo koje $t > 0$ zatvoreni interval $X_t = [t, +\infty)$ jeste kompletan (i naša funkcija jeste definisana na njemu), ali moramo obezbjediti da $f : X_t \to X_t$ i naravno kontraktivnost. Nije teško provjeriti da funkcija f ima minimum na cijelom $(0, +\infty)$ u tački $x = \sqrt{3}$ i da je taj minimum $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$. Zbog toga će za proizvoljno $t \leq \sqrt{3}$ vrijediti da čim je $x \geq t$, onda će biti $f(x) \geq \sqrt{3} \geq t$, što znači da će za ovakav izbor t-a vrijediti $f(X_t) \subseteq X_t$.

Da bi f bila kontrakcija na X_t, uzmimo proizvoljne $x, y \in X_t$ i posmatrajmo

$$f(x) - f(y) = \frac{x - y}{2}\left(1 - \frac{3}{xy}\right) \,.$$

Kako su $x,y \geq t$ to vrijedi $1-\frac{3}{t^2} \leq a - \frac{3}{xy}$. Naš zahtjev o kontraktivnosti se sada svodi na zahtjev da bude $\left|1+\frac{3}{xy}\right| < 1$, a što će biti ostvareno ako je $1-\frac{3}{t^2} > -1$. Posljednje nam daje uslov da treba biti $t > \sqrt{\frac{3}{2}}$. Dakle, uslovi za primjenu Banachovog teorema za preslikavanje f će biti zadovoljeni ako je $\sqrt{\frac{3}{2}} < t \leq \sqrt{3}$. Tada $f : X_t \to X_t$ i vrijedi $|f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$, za proizvoljne $x,y \in X_t$. Sada primjenom iterativnog postupka izloženog u dokazu Banachovog teorema dolazimo do fikesne tačke tog preslikavanja tojest, do približnog rješenja. Koliko iteracija treba napraviti da se dođe do zadate tačnosti zavisi od konstante kontraktivnosti, ali i od startne vrijednosti što se može lijepo vidjeti u gornjoj tabeli. Naime za startne vrijednosti $x_0 = 1.5$ i $x_0 = 1.9$, već u petoj iteraciji se dostiže tačnost na desetu decimalu, što baš i nije slučaj za startnu vrijednost $x_0 = 10$ (suviše daleko od tačne vrijednosti) gdje je u petoj iteraciji tačnost samo na četvrtoj decimali. $\diamondsuit$

3. Posmatrajmo konačan linearan sistem algebarskih jednačina

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ , \ i=1,2,...,n \ . \tag{1.14}$$

Postavlja se pitanje, pod kojim uslovima će dati sistem imati tačno jedno rješenje?
Jednostavnom transformacijom sistem (1.14) transformišemo u ekvivalentan sistem

$$x_i = \sum_{j=1}^{n}(1-a_{ij})x_j + b_i \ , \ i=1,2,...,n \ .$$

Definišimo sada preslikavanje $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, zadato gornjim sistemom, na sljedeći način

$$x=(x_1,x_2,...,x_n) \in \mathbb{R}^n \ , \ Ax = y \in \mathbb{R}^n \ ,$$

gdje koordinate tačke y dobijamo iz

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a'_{ij}x_j + b_i \ , \ i=1,2,...,n \ ,$$

gdje je $a'_{ij} = \delta_{ij} - a_{ij}$ $(i,j=1,2,...,n)$, a δ_{ij} je Cronecerova delta. Očigledno je da tražiti rješenje sistema (1.14) znači isto što i zahtijevati da definisano preslikavanje ima fiksnu tačku, to jest svodi se na nalaženje $x \in \mathbb{R}^n$, takvog da je $Ax = x$. Kako A slika kompletan prostor u samog sebe, za primjenu Banachovog stava potrebno nam je da je to preslikavanje kontrakcija.

Neka je na $\mathbb{R}^n$ definisana metrika

$$d(x,y) = \max_{1\leq i\leq n}|x_i - y_i| \ , \ x,y \in \mathbb{R}^n \ .$$

Sada za proizvoljne $x', x'' \in \mathbb{R}^n$ imamo

$$\begin{aligned} d(Ax',Ax'') &= \max_{1\leq i\leq n}|y'_i - y''_i| = \max_{1\leq i\leq n}|\sum_{j=1}^{n} a'_{ij}(x'_j - x''_j)| \\ &\leq \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a'_{ij}||x'_j - x''_j| \leq \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \max_{1\leq j\leq n}|x'_j - x''_j| \\ &\leq \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a'_{ij}| d(x',x'') \end{aligned}$$

Jasno je sada da uslov

$$\sum_{j=1}^{n}|a'_{ij}| \leq k < 1 \ , \ i=1,2,...,n \ , \tag{1.15}$$

predstavlja uslov kontraktivnosti preslikavanja A.

Neka je na $\mathbb{R}^n$ zadata metrika

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|\ ,\ x,y\in\mathbb{R}^n\ .$$

Sada za proizvoljne $x',x''\in\mathbb{R}^n$ imamo

$$\begin{aligned}
d(Ax',Ax'') &= \sum_{i=1}^{n}|y_i'-y_i''|=\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}'(x_j'-x_j'')\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}'||x_j'-x_j''| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}|a_{ij}'|d(x',x'')\ .
\end{aligned}$$

Uslov kontraktivnosti je sada

$$\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}'|\leq k<1\ ,\ j=1,2,...,n\ . \tag{1.16}$$

Posmatrajmo sada novu metriku na $\mathbb{R}^n$,

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\ .$$

Za $x',x''\in\mathbb{R}^n$ je

$$\begin{aligned}
d(Ax',Ax'') &= \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i'-y_i''|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}'(x_j'-x_j'')\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}'^2 d(x',x'')\ .
\end{aligned}$$

Sada je uslov kontraktivnosti zadat sa

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}'^2\leq k<1\ . \tag{1.17}$$

Svaki od uslova (1.15), (1.16) i (1.17) je dakle uslov kontraktivnosti preslikavanja A te na osnovu teorema o fiksnoj tački, postoji jedinstveno rješenje jednačine $Ax=x$, a to je kako smo vidjeli, rješenje i sistema (1.14).

Sada iterativnim postupkom

$$x_i^{(k+1)}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}'x_j^{(k)}+b_i\ ,\ i=1,2,....,n\ ,$$

krećući od proizvoljne tačke $x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$, dobijamo niz tačaka $x^{(k)}\in\mathbb{R}^n$ koji će konvergirati ka rješenju sitema (1.14).

Napomenimo ovdje da je svaki od uslova (1.15), (1.16) i (1.17), ekvivalentan uslovu

$$\begin{vmatrix}
a_{11}-1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22}-1 & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-1
\end{vmatrix}\neq 0\ .$$

4. Neka je $f(x,y)$ neprekidna funkcija u xy-ravni. Pod kojim uslovima će diferencijalna jednačina prvog reda

$$y' = f(x,y) \ , \text{ sa uslovom } y(x_0) = y_0 \ , \tag{1.18}$$

imati tačno jedno neprekidno rješenje? Kako se želimo poslužiti Banachovim teoremom o fiksnoj tački, ideja je definisati neko preslikavanje kojeg će fiksna tačka biti rješenje postavljenog problema. U tom cilju posmatrajmo integralnu jednačinu

$$\phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t,\phi(t))dt + y_0 \ . \tag{1.19}$$

Jasno je da svako rješenje integralne jednačine (1.19) predstavlja i rješenje jednačine (1.18) i obratno. Zato posmatrajmo preslikavanje definisano sa

$$A\phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t,\phi(t))dt + y_0 \ .$$

Očigledno je za neprekidnu funkciju ϕ i $A\phi$ neprekidna funkcija, pa za neko $\delta > 0$ (čiji izbor najvjerovatnije nije proizvoljan) imamo $A : C[x_0,x_0+\delta] \to C[x_0,x_0+\delta]$. Kako je svaki prostor $C[a,b]$ kompletan, sa standardnom metrikom definisanom sa

$$\phi,\psi \in C[a,b] \ \ , \ \ d(\phi,\psi) = \max_{a\le t\le b} |\phi(t) - \psi(t)| \ ,$$

to A dakle, preslikava kompletan prostor u samog sebe.

Ostaje nam naći uslove pod kojim je definisano preslikavanje kontraktivno. U tom cilju, za proizvoljne ϕ, $\psi \in C[x_0,x_0+\delta]$, posmatrajmo

$$\begin{aligned}
d(A\phi,A\psi) &= \max_{x_0\le x\le x_0+\delta} |A\phi(x) - A\psi(x)| \\
&= \max_{x_0\le x\le x_0+\delta} \left| \int_{x_0}^{x} f(t,\phi(t))dt + y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t,\psi(t))dt - y_0 \right| \\
&= \max_{x_0\le x\le x_0+\delta} \left| \int_{x_0}^{x} (f(t,\phi(t)) - f(t,\psi(t)))dt \right| \\
&\le \max_{x_0\le x\le x_0+\delta} \int_{x_0}^{x} |f(t,\phi(t)) - f(t,\psi(t))|dt \ .
\end{aligned}$$

Da bi došli do uslova kontraktivnosti, sada se logično nameće problem nekakvog uslova na funkciju f. Ako je, npr. funkcija f Lipschitzova po drugoj varijabli u oblasti u kojoj je posmatramo, to jest ako je zadovoljen uslov

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2| \ ,$$

tada iz gornjeg imamo

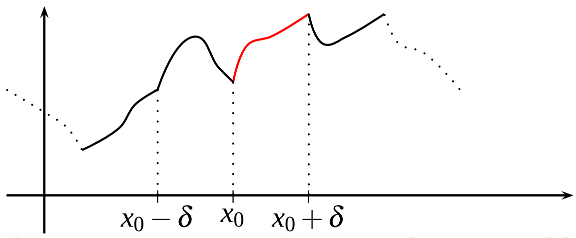
$$d(A\phi,A\psi) \le \max_{x_0\le x\le x_0+\delta} \int_{x_0}^{x} L|\phi(t)) - \psi(t)|dt \ ,$$

pa uzimajući maksimum od $|\phi(t) - \psi(t)|$ za $x_0 \le t \le x_0+\delta$, imamo

$$d(A\phi,A\psi) \le Ld(\phi,\psi) \max_{x_0\le x\le x_0+\delta} \int_{x_0}^{x} dt \ ,$$

odnosno,

$$d(A\phi,A\psi) \le L\delta d(\phi,\psi) \ .$$



Slika 1.3: Formiranje rješenja Cauchyjevog problema

Kao što smo spomenuli na početku, δ sada možemo izabrati tako da je $L\delta < 1$, a sa tim uslovom naše preslikavanje A će biti kontrakcija, pa na osnovu svega rečenog, postojat će jedinstvena fiksna tačka tog preslikavanja. Dakle, postoji jedinstvena funkcija $y_\delta \in C[x_0, x_0+\delta]$, koja je rješenje problema (1.18) na segmentu $[x_0, x_0+\delta]$.

Sada sličnim rezonovanjem možemo pokazati da će i na segmentu $[x_0+\delta, x_0+2\delta]$ postojati jedinstveno rješenje problema $y' = f(x,y)$ sa uslovom $y(x_0+\delta) = y_\delta(x_0+\delta)$. Naravno da ovo razmišljanje možemo primjenjivati, produžavajući interval i na jednu i na drugu stranu od x_0, pa zaključujemo da će postojati jedinstveno neprekidno rješenje problema (1.18) na čitavoj realnoj pravoj (Slika 1.3).

1.5 Separabilnost metričkih prostora

Definicija 1.24. *Za metrički prostor kažemo da je separabilan ako u njemu postoji najviše prebrojiv svuda gust skup.*

Primjer 1.31. Realna prava sa uobičajenom metrikom je primjer separabilnog prostora, jer je $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}$ je prebrojiv skup.

$\mathbb{R}^n$ je takođe separabilan za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$. Zaista, neka je $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ proizvoljna. Kako je $\mathbb{Q}$ svuda gust u $\mathbb{R}$, to za proizvoljno $\varepsilon > 0$ i za svako $i = 1, 2, \dots, n$, postoji $q_i \in \mathbb{Q}$, tako da važi

$$|x_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} .$$

Posmatrajmo sada ovako konstruisanu tačku $q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}^n$. Vrijedi,

$$d(x,q) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - q_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon .$$

Dakle, $\mathbb{Q}^n$ je svuda gust skup u $\mathbb{R}^n$, a kako je on i prebrojiv skup, to je $\mathbb{R}^n$ separabilan. $\diamondsuit$

Primjer 1.32. Separabilni su i prostori l_p $(1 \le p < \infty)$, c, c_0 ali prostor l_∞ nije separabilan.

Da pokažemo neseparabilnost prostora l_∞, posmatrajmo skup svih nizova čije su koordinate zapisane samo sa 0 i 1,

$$A = \{(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} |\ \xi_n \in \{0,1\}, \forall n \in \mathbb{N}\} .$$

Ovakvih nizova ima kontinum mnogo (interpretiramo ih kao binarne zapise realnih brojeva iz $[0,1]$) i pri tome je očigledno $A \subset l_\infty$. Za proizvoljne $x, y \in A$, vrijedi

$$d(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_i - y_i| = 1 . \tag{1.20}$$

Pretpostavimo sada da u l_∞ postoji svuda gust skup. To bi značilo da u proizvoljnoj okolini proizvoljne tačke iz l_∞, mora postojati bar jedna tačka iz tog svuda gustog skupa. Ali to bi onda moralo vrijediti i za tačke skupa A. Medutim, zbog (1.20), u kugli $B(x,r)$, gdje je $x \in A$ i $r < 1$, osim tačke x nema drugih tačaka iz A. Dakle da bi svaku tačku "dobro aproksimirali", u svakoj ovakvoj kugli bi morala biti bar jedna tačka iz svuda gustog skupa. To bi opet značilo da tačaka u svuda gustom skupu mora biti bar onoliko koliko ima ovakvih kugli, a ovih opet ima koliko ima tačaka u A, to jest kontinum mnogo. Dakle, ako bi i postojao svuda gust skup u l_∞ on ne bi mogao biti najviše prebrojiv, pa l_∞ nije separabilan prostor. ♢

Primjer 1.33. Prostor $C[a,b]$ je separabilan, a tu tvrdnju imamo iz poznatog Weierstrassovog teorema:
Za svaku neprekidnu funkciju f definisanu na segmentu $[a,b]$ i za svako $\varepsilon > 0$, postoji polinom p_ε, takav da vrijedi

$$|x(t) - p_\varepsilon(t)| < \varepsilon \ , \ a \leq t \leq b \ .$$

♢

Definicija 1.25. *Za familiju $(B_i)_{i\in I}$ otvorenih skupova u metričkom prostoru X kažemo da je baza, ako se svaki otvoren skup u X može prikazati kao unija nekih elemenata date familije.*

Jasno je da u svakom metričkom prostoru gornju osobinu ima familija svih otvorenih kugli $(B(x,r))_{x\in X,\ r>0}$. Medutim, takva baza je "ogromna" po broju elemenata, a nama bi bilo u interesu da je ona što manja po broju svojih elemenata.

Definicija 1.26. *Za metrički prostor kažemo da zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti ako u njemu postoji baza sa najviše prebrojivo mnogo elemenata.*

Teorem 1.41. *Metrički prostor je separabilan ako i samo ako zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti.*

Dokaz : Neka je X separabilan metrički prostor i neka je $A = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ najviše prebrojiv svuda gust skup tačaka u X. Za proizvoljne $n,m \in \mathbb{N}$, posmatrajmo sve moguće kugle oblika $B(x_n, \frac{1}{m})$. Neka je sada G proizvoljan otvoren skup u X i neka je $x \in G$ takode proizvoljan. Zbog otvorenosti skupa G, postoji $m = m(x) \in \mathbb{N}$, takav da je $B(x, \frac{1}{m}) \subseteq G$. Kako je A svuda gust u X, postoji $x_{n(x)} \in A$, takav da je $d(x_{n(x)}, x) < \frac{1}{3m}$. Posmatrajmo sada kuglu $B(x_{n(x)}, \frac{1}{2m})$. Jasno je da vrijedi $x \in B(x_{n(x)}, \frac{1}{2m}) \subseteq G$, pa nije teško zaključiti da vrijedi i

$$G = \bigcup_{x\in G} B\left(x_{n(x)}, \frac{1}{2m(x)}\right) \ ,$$

a ovo znači da je familija $(B(x_n, \frac{1}{m}))_{n,m\in\mathbb{N}}$ baza u X i to najviše prebrojiva, pa X zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti.

Neka je sada $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ najviše prebrojiva baza u X. Ako iz svakog B_i izaberemo po jednu tačku x_i ($i \in \mathbb{N}$) i od tih tačaka formiramo skup A, jasno je da je A najviše prebrojiv skup. Po pretpostavci, svaki se otvoren skup može prikazati kao unija elemenata baze, tako da se u proizvoljnom otvorenom skupu nalazi bar jedna tačka skupa A, a to ne znači ništa drugo nego da je A svuda gust u X, pa je X separabilan metrički prostor. □

Definicija 1.27. *Za familiju $(G_i)_{i\in I}$ kažemo da je pokrivač skupa M ako vrijedi*

$$(\forall x \in M)(\exists i \in I) x \in G_i \ .$$

Ukoliko je svaki G_i ($i \in I$) otvoren skup govorimo o otvorenom pokrivaču, a ako je I najviše prebrojiv skup govorimo o najviše prebrojivom pokrivanju.

Teorem 1.42. ***(teorem Lindelöfa)***
Ako je X separabilan metrički prostor, onda se iz svakog otvorenog pokrivača za X može izdvojiti najviše prebrojiv potpokrivač.

Dokaz : Neka je X separabilan metrički prostor, tada postoji najviše prebrojiva baza $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ u X. Neka je $(G_i)_{i\in I}$ otvoreni pokrivač od X, to jest

$$(\forall x \in X)(\exists i = i(x) \in I)\ x \in G_{i(x)}\ .$$

Kako je svaki $G_{i(x)}$ otvoren skup, to postoji element baze $B_{n(x)}$, takav da je

$$x \in B_{n(x)} \subseteq G_{i(x)}\ . \tag{1.21}$$

Jasno je sada da različitim skupovima $B_{n(x)}$ možemo pridružiti različite odgovarajuće $G_{n(x)}$ koji zadovoljavaju (1.21). Pri tome očigledno vrijedi

$$X \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{n(x)} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_{n(x)}\ .$$

Dakle $(G_{n(x)})_{n\in\mathbb{N}}$ je najviše prebrojiv pokrivač od X. □

1.6 Kompaktnost metričkih prostora

Definicija 1.28. *Za metrički prostor kažemo da je kompaktan ako se iz svakog njegovog niza može izdvojiti konvergentan podniz.*

Definicija 1.29. *Neka je M podskup metričkog prostora X. Za skup M kažemo da je relativno kompaktan ako se iz svakog niza u M može izdvojiti konvergentan podniz, to jest*

$$(\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M)(\exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}})\ x_{n_k} \to x_0\ ,\ (k\to\infty)\ ,\ x_0 \in X\ .$$

Ako je $x_0 \in M$, kažemo da je M kompaktan skup.

Jasna je razlika izmedju kompaktnosti i relativne kompaktnosti, to jest relativna kompaktnost i zatvorenost skupa ekvivalentne su kompaktnosti skupa.

Teorem 1.43. *Svaki kompaktan metrički prostor je i kompletan.*

Dokaz : Neka je X kompaktan metrički prostor i neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan Cauchyjev niz u X. Zbog kompaktnosti, postoji podniz (x_{n_k}) našeg niza koji je konvergentan, $x_{n_k} \to x_0 \in X$ $(k\to\infty)$. Sada imamo

$$d(x_n, x_0) \le d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0)\ .$$

Prvi sabirak na desnoj strani možemo učiniti proizvoljno malim jer je niz Cauchyjev, a drugi takođe, zbog konvergencije podniza. Dakle,

$$d(x_n, x_0) \to 0\ ,\ (n\to\infty)\ ,$$

to jest niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan, pa zbog proizvoljnosti niza, prostor X je kompletan. □

Teorem 1.44. *Svaki kompaktan skup je zatvoren.*

Dokaz : Neka je M kompaktan skup i neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$, takav da $x_n \to x_0$ kada $n\to\infty$. Zbog kompaktnosti skupa, postoji $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, takav da $x_{n_k} \to x'$ $(k\to\infty)$ i pri tome je $x' \in M$. Zbog jedinstvenosti tačke konvergencije, zaključujemo da je $x_0 = x'$, odnosno $x_0 \in M$, pa dakle M sadrži sve svoje tačke nagomilavanje te je kao takav, zatvoren skup. □

Teorem 1.45. *Svaki relativno kompaktan skup je ograničen.*

Dokaz : Neka je M relativno kompaktan podskup metričkog prostora X. Pretpostavimo da M nije ograničen. M nije prazan, pa postoji $x_0 \in M$. Kako M nije ograničen, to M nije sadržan u kugli $B(x_0,1)$, te zaključujemo da postoji $x_1 \in M$, takav da $x_1 \notin B(x_0,1)$ odnosno, $d(x_0,x_1) \geq 1$. Označimo sa $r = d(x_0,x_1)+1$, pa opet zbog neograničenosti rezonujemo da M nije sadržan ni u kugli $B(x_0,r)$, to jest postoji $x_2 \in M$ takav da je $d(x_0,x_2) \geq r \geq 1$. Kako je

$$1+d(x_0,x_1) = r \leq d(x_0,x_2) \leq d(x_0,x_1)+d(x_1,x_2) \ ,$$

zaključujemo da je $d(x_1,x_2) \geq 1$. Jasno je da sada ovaj postupak možemo produžiti i na taj način formirati niz (x_n) sa osobinom da za proizvoljne $n,m \in \mathbb{N}$ vrijedi, $d(x_n,x_m) \geq 1$. Ovo znači da se iz datog niza ne može izdvojiti niti jedan konvergentan podniz, a to se opet kosi sa pretpostavkom o relativnoj kompaktnosti skupa M. Dakle, M mora biti ograničen skup. $\square$

Definicija 1.30. *Neka su M i N podskupovi metričkog prostora X. Neka je $\varepsilon > 0$ fiksiran realan broj. Za skup N kažemo da je ε-mreža skupa M ako za svako $x \in M$, postoji $y \in N$, tako da je $d(x,y) < \varepsilon$.*
Ako je N kompaktan skup, kažemo da je N kompaktna ε-mreža, a ako je konačan skup, kažemo da je konačna ε-mreža.

Lema 1.46. *Skup N je ε-mreža ($\varepsilon > 0$) skupa M ako i samo ako vrijedi*

$$M \subseteq \bigcup_{x \in N} B(x,\varepsilon) \ .$$

Teorem 1.47. *Potreban uslov za relativnu kompaktnost skupa $M \subseteq X$ jeste da za svako $\varepsilon > 0$, postoji konačna ε-mreža skupa M. Ako je metrički prostor X kompletan, gornji uslov je i dovoljan.*

Dokaz : Neka je M relativno kompaktan skup. Pretpostavimo da za neko $\varepsilon_0 > 0$ ne postoji konačna ε_0-mreža skupa M. Kako M nije prazan, to za proizvoljno $x_0 \in M$ skup $\{x_0\}$ nije ε_0-mreža skupa M, pa postoji $x_1 \in M$, takav da je $d(x_0,x_1) \geq \varepsilon_0$. Medutim, ni skup $\{x_0,x_1\}$ nije ε_0-mreža za M, pa postoji $x_2 \in M$, takav da je $d(x_0,x_2) \geq \varepsilon_0$ i $d(x_1,x_2) \geq \varepsilon_0$. Nastavljajući gornje rasudivanje, dolazimo do niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$, kod koga za proizvoljne $n,m \in \mathbb{N}$ vrijedi, $d(x_n,x_m) \geq \varepsilon_0$. Ali tada se iz niza (x_n) nemože izdvojiti niti jedan konvergentan podniz, što je suprotno pretpostavci o relativnoj kompaktnosti skupa M. Dakle, za svako $\varepsilon > 0$, skup M ima konačnu ε-mrežu.

Neka je sada X kompletan metrički prostor i neka $M \subseteq X$ ima konačnu ε-mrežu za svako $\varepsilon > 0$. Uzmimo proizvoljan niz $(x_n) \subset M$. Neka je $N_1 = \{y_{11},y_{12},...,y_{1n_1}\}$ konačna 1-mreža skupa M. Na osnovu Leme 1.46 vrijedi

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_1} B(y_{1i},1) \ .$$

Tim prije je i naš niz sadržan u gornjoj uniji kugli, a zbog konačnog broja tih kugli, postoji medu njima kugla, označimo je sa B_1, koja u sebi sadrži beskonačan podniz (x_{n_k}) niza (x_n).
Neka je sada $N_2 = \{y_{21},y_{22},...,y_{2n_2}\}$ $\frac{1}{2}$-mreža skupa M. Ali to je onda $\frac{1}{2}$-mreža i za naš podniz $(x_{n_k}) \subset B_1$, te postoji kugla $B_2 = B(y_{2i},\frac{1}{2})$ ($i \in \{1,2,...,n_2\}$), koja u sebi sadrži beskonačno mnogo članova niza (x_{n_k}).
Nastavljajući ovaj postupak dolazimo do niza kugli $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sa sljedećim osobinama:

- Poluprečnik kugle B_i je $\frac{1}{i}$ ($i \in \mathbb{N}$).
- U svakoj kugli B_i ($i \in \mathbb{N}$) ima beskonačno mnogo članova niza (x_n).
- Članovi niza koji se nalaze u kugli B_i, sadržani su i u svakoj kuglu B_j za $j \leq i$.

Iz svake kugle B_i izaberimo po jedan element našeg niza (x_n) i označimo ga sa z_i ($i \in \mathbb{N}$). Očigledno je niz (z_n) podniz niza (x_n). Osim toga, za proizvoljne $n, m \in \mathbb{N}$ (neka je npr. $m \le n$) imamo da $z_n, z_m \in B_m$, a zbog prve osobine ovih kugli, imamo

$$d(z_n, z_m) < \frac{2}{m} \to 0 \ , \ (n, m \to \infty) \ .$$

Dakle, niz (z_n) je Cauchyjev, pa zbog kompletnosti prostora on mora biti i konvergentan.
Iz proizvoljnog niza u M izdvojili smo konvergentan podniz, te je M relativno kompaktan skup. □

Sada se lahko dokazuje još jedna karakterizacija relativne kompaktnosti.

Posljedica 1.48. *Neka je M podskup kompletnog metričkog prostora X. Ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji kompaktna ε-mreža skupa M tada je M relativno kompaktan skup.*

Teorem 1.49. *Svaki kompaktan metrički prostor je separabilan.*

Dokaz : Zbog kompaktnosti prostora X, za svako $n \in \mathbb{N}$, postoji konačna $\frac{1}{n}$-mreža N_n za X. Posmatrajmo skup

$$N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n \ .$$

Kao prvo N je najviše prebrojiv, kao prebrojiva unija konačnih skupova.
Neka je $x \in X$ proizvoljan. Za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji $n \in \mathbb{N}$, takav da je $\frac{1}{n} < \varepsilon$, a tada možemo naći element y iz $\frac{1}{n}$-mreže N_n, takav da je $d(x, y) < \frac{1}{n} < \varepsilon$, pa je očigledno N i svuda gust u X, to jest X je separabilan prostor. □

1.6.1 Neprekidne funkcije na kompaktnim skupovima

Teorem 1.50. *Neprekidna funkcija na kompaktnom skupu je ograničena i dostiže svoju najveću i najmanju vrijednost.*

Dokaz : Neka je M kompaktan skup i neka je $f \in C(M)$. Ako pretpostavimo da f nije ograničena, to bi značilo da postoji $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$, takav da

$$f(x_n) \to +\infty \ , \ (n \to \infty) \tag{1.22}$$

(ili eventualno $f(x_n) \to -\infty$). Kako je M kompaktan, postoji podniz $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ takav da $x_{n_k} \to x_0 \in M$ ($k \to \infty$), a onda zbog neprekidnosti funkcije imamo

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0) < +\infty \ , \ (k \to \infty) \ .$$

S druge strane, zbog (1.22) moralo bi biti

$$f(x_{n_k}) \to +\infty \ , \ (k \to \infty) \ ,$$

a to je očigledna kontradikcija. Dakle, f je ograničena funkcija.

Sada zbog ograničenosti funkcije imamo da je

$$r = \sup_{x \in M} f(x) < +\infty \ .$$

Na osnovu definicije supremuma, postoji niz $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$, takav da je

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ f(y_n) > r - \frac{1}{n} \ ,$$

a ovo znači da $f(y_n) \to r$ $(n \to \infty)$. Ponovo zbog kompaktnosti skupa M, postoji $(y_{n_k}) \subset (y_n)$, takav da $y_{n_k} \to y_0 \in M$ $(k \to \infty)$. Ali tada bi imali

$$f(y_{n_k}) \to f(y_0)\ ,\ (k \to \infty)\ ,$$

odnosno, zaključujemo $f(y_0) = r$. Dakle, funkcija dostiže svoju najveću vrijednost.
Na analogan način se pokazuje da funkcija dostiže i najmanju vrijednost, čime je teorem dokazan.
□

Teorem 1.51. *Neprekidna funkcija na kompaktnom skupu je i uniformno neprekidna.*

Dokaz : Neka je M kompaktan skup i neka je f neprekidna funkcija definisana na M. Pretpostavimo da f nije uniformno neprekidna funkcija. Negacijom definicije uniformne neprekidnosti to bi značilo

$$(\exists \varepsilon_0 > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x'_n, x''_n)\left(d(x'_n, x''_n) < \frac{1}{n} \wedge |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon_0 \right)\ . \tag{1.23}$$

Na ovaj način su formirana dva niza (x'_n) i (x''_n) u M iz kojih zbog kompaktnosti možemo izdvojiti konvergentne podnozove, to jest postoji $(x'_{n_k}) \subset (x'_n)$, takav da $x_{n_k} \to x'_0$ $(k \to \infty)$. Kako je

$$d(x'_{n_k}, x''_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \to 0\ ,\ (k \to \infty)\ ,$$

zaključujemo da tada mora vrijediti i $x''_{n_k} \to x'_0$ $(k \to \infty)$. Medutim, to bi zbog neprekidnosti funkcije f značilo

$$|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \to 0\ ,\ (k \to \infty)\ ,$$

što je suprotno pretpostavci (1.23). □

U poglavlju o fiksnoj tački smo u Primjedbi 1.4.2 napomenuli da za egzistenciju i jedinstvenost fiksne tačke preslikavanja, uslov kontraktivnosti možemo oslabiti, ali zato uslov na domen preslikavanja moramo pojačati. O tome govori sljedeće tvrđenje.

Teorem 1.52. *Neka je (X,d) kompaktan metrički prostor i neka preslikavanje $A : X \to X$ zadovoljava osobinu*

$$(\forall x, y \in X\ ,\ x \neq y)\ d(Ax, Ay) < d(x,y)\ .$$

Tada preslikavanje A ima jedinstvenu fiksnu tačku.

Dokaz : Posmatrajmo preslikavanje $f : X \to \mathbb{R}$, zadato sa $f(x) = d(x, Ax)$. Ovo je neprekidno preslikavanje definisano na kompaktnom skupu, te na osnovu Teoreme 1.50, ona dostiže svoj minimum u nekoj tački $x_0 \in X$. Sada je jasno da mora biti $x_0 = Ax_0$, to jest x_0 je fiksna tačka preslikavanja A jer u suprotnom bi imali

$$d(A(Ax_0), Ax_0) < d(Ax_0, x_0)\ ,$$

što bi bilo u suprotnosti sa minimalnošću preslikavanja f.
Ako pretpostavimo da postoji i $x_1 \in X$, takav da je $Ax_1 = x_1$, tada bi bilo

$$d(x_0, x_1) = d(Ax_0, Ax_1) < d(x_0, x_1)\ ,$$

što je očigledno nemoguće. □

1.6.2 Specijalni kriteriji relativne kompaktnosti

Iako smo dali nekoliko karakterizacija kompaktnosti na proizvoljnim metričkim prostorima, od velikog su interesa što bolje karakterizacije, a njih možemo dati na konkretnim metričkim prostorima. Ovdje ćemo dati jednu važnu karakterizaciju relativne kompaktnosti na prostoru neprekidnih funkcija, poznati Arzela-Ascollijev stav, koja je odigrala veliku ulogu u razvoju topologije i funkcionalne analize. Kao prvo definišimo sljedeće pojmove.

Definicija 1.31. *Neka je $E \subset C(X)$. Za E kažemo da je skup podjednako ograničenih funkcija ako postoji konstanta $M > 0$, takva da za proizvoljno $x \in X$ i za proizvoljnu funkciju $f \in E$ vrijedi*

$$|f(x)| \leq M \,.$$

Definicija 1.32. *Za Skup $E \subset C(X)$ kažemo da je skup podjednako neprekidnih funkcija ako vrijedi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall f \in E)(\forall x', x'' \in X)(d(x', x'') < \delta \Rightarrow d(f(x'), f(x'')) < \varepsilon) \,.$$

Teorem 1.53. ***(Arzela-Ascolli)***
Neka je X kompaktan skup i $C(X)$ prostor neprekidnih funkcija na X, sa standardnom metrikom. Skup $E \subset C(X)$ je relativno kompaktan ako i samo ako je on skup podjednako ograničenih i podjednako neprekidnih funkcija.

Dokaz : Neka je E relativno kompaktan podskup metričkog prostora $C(X)$. Kao takav, on je i ograničen, pa postoje $f_0 \in C(X)$ i $r > 0$, takvi da je $E \subseteq B(f_0, r)$. Ovo znači da za proizvoljno $f \in E$ vrijedi

$$d(f, f_0) = \max_{x \in X} |f(x) - f_0(x)| < r \,. \tag{1.24}$$

Neka je sada $f \in E$ proizvoljna i neka je $x \in X$ takođe proizvoljno.

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(x) - f_0(x)| + |f_0(x)| \\ &\leq d(f, f_0) + \max_{x \in X} |f_0(x)| \\ &\leq r + \max_{x \in X} |f_0(x)| \,. \end{aligned}$$

Kako je f_0 neprekidna funkcija, ona dostiže svoju maksimalnu vrijednost, te stavljajući da je $M = r + \max_{x \in X} |f_0(x)|$ imamo,

$$|f(x)| \leq M \,,$$

za svaku funkciju $f \in E$ i za svako $x \in X$, a to znači da je E skup podjednako ograničenih funkcija.
Skup E je relativno kompaktan skup pa za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji konačna $\frac{\varepsilon}{3}$-mreža za E i neke je čine funkcije $f_1, f_2, ..., f_n$ ($f_i \in C(X)$, $i = 1, 2, ..., n$). Kako je svaka od funkcija f_i ($i = 1, 2, ..., n$) neprekidna na X, a time i uniformno neprekidna (na kompaktnom skupu), to za proizvoljan $\varepsilon > 0$, postoji $\overline{\delta} = \delta(\varepsilon) > 0$, tako da za proizvoljne $x', x'' \in X$, čim je $d(x', x'') < \overline{\delta}$, onda je

$$|f_i(x') - f_i(x'')| < \frac{\varepsilon}{3} \,,\; i = 1, 2, ..., n \,.$$

Gornja činjenica vrijedi za sve funkcije f_i ($i = 1, 2, .., n$), to jest postojeći $\overline{\delta}$ je važeći za sve funkcije, a to je opravdano činjenicom da ovih funkcija ima konačno mnogo.
Neka je sada $f \in E$ proizvoljna i izaberimo iz $\frac{\varepsilon}{3}$-mreže njoj odgovarajuću funkciju f_{i_0} za koju vrijedi $d(f, f_{i_0}) < \frac{\varepsilon}{3}$. Neka su sada $x', x'' \in X$, takve da je $d(x', x'') < \overline{\delta}$. Sada imamo

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &\leq |f(x') - f_{i_0}(x')| + |f_{i_0}(x') - f_{i_0}(x'')| + |f_{i_0}(x'') - f(x'')| \\ &\leq d(f, f_{i_0}) + |f_{i_0}(x') - f_{i_0}(x'')| + d(f, f_{i_0}) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \,. \end{aligned}$$

Dakle, skup E je skup podjednako neprekidnih funkcija, a time smo pokazali neophodnost uslova.
Dokažimo sada i dovoljnost uslova, to jest neka je E skup podjednako ograničenih i podjednako neprekidnih funkcija i dokažimo njegovu relativnu kompaktnost. Ako je skup E konačan, tvrdnja trivijalno vrijedi. Pretpostavimo zato da je E beskonačan skup. Neka je $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz u E. Zbog pretpostavljene kompaktnosti skupa X imamo njegovu separabilnost i neka je $\{x_1,x_2,...,x_n,...\}$ prebrojiv svuda gust skup u X. Kako je E skup podjednako ograničenih funkcija, to je niz $(f_i(x_1))_{i\in\mathbb{N}}$ ograničen skup, a kao takav on sadrži konvergentan podniz $(f_{i_k}(x_1))_{k\in\mathbb{N}}$. Označimo ga jednostavnosti radi sa $(f_i^{(1)})_{i\in\mathbb{N}}$ i taj niz je konvergentan u tački $x=x_1$. Ako sada posmatramo niz $(f_i^{(1)}(x_2))_{i\in\mathbb{N}}$, on je opet ograničen, pa i iz njega možemo izdvojiti konvergentan podniz $(f_i^{(2)})_{i\in\mathbb{N}}$ koji je konvergentan u tački $x=x_2$, a kako je on podniz niza $(f_i^{(1)})_{i\in\mathbb{N}}$, on je konvergentan i u tački $x=x_1$. Ako nastavimo ovaj postupak, dobit ćemo niz nizova

$$(f_i^{(1)}),(f_i^{(2)}),(f_i^{(3)}),...,(f_i^{(m)}),...$$

koji imaju sljedeće osobine:

- Svaki od njih je podniz polaznog niza $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$.
- Počev od drugog, svaki od njih je podniz niza koji je prije njega.
- m-ti niz je konvergentan u tačkama $x=x_1,x_2,...,x_m$.

Dijagonalnim postupkom formirajmo sada niz $(\phi_i(x))_{i\in\mathbb{N}}$, to jest

$$\phi_i(x)=f_i^{(i)}(x)\ ,\ i=1,2,...$$

Jasno je da je novoformirani niz podniz našeg polaznog niza. Osim toga, kako je on, posmatrajući ga od m-tog člana ($m\in\mathbb{N}$), podniz m-tog niza $(f_i^{(m)})_{i\in\mathbb{N}}$, on je konvergentan u svim tačkama svuda gustog skupa $\{x_1,x_2,...,x_n,...\}$.
Neka je sada $\varepsilon>0$ proizvoljan. E je skup podjednako neprekidnih funkcija, onda postoji $\delta(\varepsilon)>0$, takav da za sve $x',x''\in X$ i za svaku funkciju $f\in E$ vrijedi

$$d(x',x'')<\delta\ \Rightarrow\ |f(x')-f(x'')|<\varepsilon\ . \tag{1.25}$$

Za ovakav δ, formirajmo konačnu δ-mrežu skupa X (X je kompaktan). Neka je čine elementi $\{y_1,y_2,...,y_k\}$. Ne gubeći na opštosti, možemo smatrati da su tačke naše δ-mreže neke od tačaka svuda gustog skupa $\{x_1,x_2,...,x_n,...\}$. Dakle, niz $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ je konvergentan u svakoj od tačaka $y_1,y_2,...,y_k$, a time je i Cauchyjev, to jest postoji $\overline{n}=n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, takav da za proizvoljne $i,j\geq\overline{n}$ vrijedi

$$|\phi_i(y_s)-\phi_j(y_s)|<\frac{\varepsilon}{3}\ ,\ s=1,2,...,k\ . \tag{1.26}$$

Neka je sada $x\in X$ proizvoljan. Iz δ-mreže izaberimo y_{i_0} takav da je $d(x,y_{i_0})<\delta$. Sada za $i,j\geq\overline{n}$ imamo

$$|\phi_i(x)-\phi_j(x)|\leq|\phi_i(x)-\phi_i(y_{i_0})|+|\phi_i(y_{i_0})-\phi_j(y_{i_0})|+|\phi_j(y_{i_0})-\phi_j(x)|\ .$$

Zbog (1.25) i (1.26) imamo

$$|\phi_i(x)-\phi_j(x)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\ .$$

Dakle, za proizvoljno $\varepsilon>0$, postoji $\overline{n}\in\mathbb{N}$, tako da za sve $i,j\in\mathbb{N}$, $i,j\geq\overline{n}$, vrijedi

$$|\phi_i(x)-\phi_j(x)|<\varepsilon\ .$$

Ovo znači da je niz (ϕ_i) Cauchyjev, a time i konvergentan u svim tačkama $x \in X$, to jest on je uniformno konvergentan. Kako su pri tome sve funkcije ϕ_i ($i \in \mathbb{N}$) neprekidne, zaključujemo da niz (ϕ_i) konvergira ka neprekidnoj funkciji ϕ_0 i to u smislu metrike u $C(X)$.

Iz proizvoljnog niza $(f_i) \subset E$, izdvojili smo konvergentan podniz (ϕ_i), što znači da je skup E relativno kompaktan skup, time je dokaz teoreme završen. $\square$

2 Banachovi prostori

2.1 Linearni vektorski prostori

Definicija 2.1. *Neka je Φ ili skup realnih ($\mathbb{R}$) ili skup kompleksnih ($\mathbb{C}$) brojeva. Neprazan apstraktan skup V, snabdjeven sa dvije binarne operacije "$+$" $: V \times V \to V$ (sabiranje) i "$\cdot$" $: \Phi \times V \to V$ (množenje skalarom) je (realan ili kompleksan) linearan vektorski prostor ako i samo ako su za sve $a, b \in \Phi$ i sve $u, v, w \in V$ zadovoljeni sljedeći uslovi:*

1. $u + v \in V$ *(zatvorenost operacije sabiranja)*
2. $u + v = v + u$ *(komutativnost sabiranja)*
3. $u + (v + w) = (u + v) + w$ *(asocijativnost sabiranja)*
4. $(\exists 0 \in V)(\forall u \in V)\ 0 + u = u$ *(egzistencija neutralnog elementa za sabiranje)*
5. $(\forall u \in V)(\exists u^* \in V)\ u + u^* = 0$ *(egzistencija inverznog elementa za sabiranje)*
6. $a \cdot u \in V$ *(zatvorenost operacije množenja sa skalarom)*
7. $a(bu) = (ab)u$ *(asocijativnost množenja sa skalarom)*
8. $(\exists 1 \in \Phi)(\forall u \in V)\ 1 \cdot u = u$ *(egzistencija neutralnog elementa za množenje skalarom)*
9. $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$ *(distributivnost množenja skalarom u odnosu na sabiranje)*
10. $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$ *(distributivnost u odnosu na sabiranje skalara)*

Elemente skupa Φ nazivamo skalarima, a elemente skupa V nazivamo vektorima. Množenje skalarom, $a \cdot u$, uobičajeno zapisujemo sa au, a za izraz $u + (-v)$ koristimo kraći zapis sa $u - v$. Gornja definicija radi sa proizvoljnim apstraktnim skupom V, ne uzimajući u obzir o kakvoj vrsti elemenata je riječ. Tako skup V može biti skup realnih brojeva, ali takođe može biti skup beskonačnih nizova, skup integrabilnih funkcija, skup matrica i sl. Iz konteksta će uvijek biti jasno sa kakvim objektima radimo i u daljem, kad god kažemo "prostor", podrazumijevamo linearan vektorski prostor. U ispitivanju da li je V linearan vektorski prostor, prije ispitivanja svih gornjih deset osobina, uobičajeno je prvo ispitati

- Da li V sadrži nula element?
- Da li je V zatvoren u odnosu na operacije sabiranja i množenja skalarom?

Ukoliko je odgovor negativan na jedno od ovih pitanja, V nije linearan vektorski prostor.

Primjer 2.1. Za $1 \le p < +\infty$, posmatrajmo prostor $l_p(\Phi)$, svih sa p-tim stepenom sumabilnih nizova u Φ (realnih za $\Phi = \mathbb{R}$ ili kompleksnih za $\Phi = \mathbb{C}$),

$$l_p(\Phi) = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \Phi\ (n \in \mathbb{N}),\ \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < +\infty \right\}.$$

Za $x,y \in l_p(\Phi)$ i $\lambda \in \Phi$, neka je

$$x+y \stackrel{def}{=} (x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}} \ , \ \lambda x \stackrel{def}{=} (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ .$$

Lahko se provjerava da sa ovako definisanim operacijama $l_p(\Phi)$ zaista jeste linearan vektorski prostor. Jedino nije jasna zatvorenost operacije "+", a to obrazlažemo sljedećim rasuđivanjem.

$$\sum_{i=1}^{n} |x_n+y_n|^p \le \sum_{i=1}^{n} 2^p(|x_n|^p+|y_n|^p) \le 2^p \left(\sum_{i=1}^{\infty}(|x_n|^p + \sum_{i=1}^{\infty}|y_n|^p) \right) < +\infty \ .$$

Na isti način možemo i na $l_\infty(\Phi)$ definisati operacije sabiranja i množenja skalarom, sa čime je i $l_\infty(\Phi)$ linearan vektorski prostor. $\diamondsuit$

Definicija 2.2. *Neka je V lienearan vektorski prostor. Za skup $W \subseteq V$ kažemo da je potprostor prostora V ako vrijedi*

1. $(\forall u,v \in W)\ u+v \in W$.
2. $(\forall a \in \Phi)(\forall u \in W)\ au \in W$.

Drugačije rečeno, $W \subseteq V$ je potprostor ako je on sam za sebe linearana vektorski prostor. Za skup W u tom slučaju kažemo da je i lineal ili linearna mnogostrukost u V.

Primjer 2.2. Neka je $C[0,1]$ skup realnih, na $[0,1]$ definisanih i neprekidnih funkcija i neka je $L_1(0,1)$ skup realnih funkcija definisanih na $(0,1)$, sa osobinom

$$\int_0^1 |f(t)|dt < +\infty \ , \ f \in L_1(0,1) \ .$$

Na oba skupa možemo uvesti operacije

$$(f+g)(t) \stackrel{def}{=} f(t)+g(t) \ , \ (\lambda f)(t) \stackrel{def}{=} \lambda f(t) \ ,$$

sa kojima oni postaju linearni vektorski prostori.

Neka je sada $f \in C[0,1]$. Zbog neprekidnosti funkcije na ograničenom i zatvorenom skupu, ona dostiže svoj maksimum, tj. postoji $M > 0$, takav da je $|f(t)| \le M$, za sve $t \in [0,1]$, a time je i

$$\int_0^1 |f(t)|dt \le M < +\infty \ ,$$

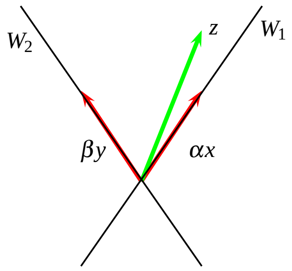
odnosno $f \in L_1(0,1)$.
Posmatrajmo sada funkciju $f(t) = t^{-1/2}$ koja nije neprekidna na $[0,1]$, ali

$$\int_0^1 |t^{-1/2}|dt = 2t^{1/2}|_0^1 = 2 < +\infty \ ,$$

tj. $f \in L_1(0,1)$. Dakle, $C[0,1]$ je strogi potprostor prostora $L_1(0,1)$. $\diamondsuit$

Lema 2.1. *Ako su $W_1, W_2, \ldots, W_n$ potprostori vektorskog prostora V, tada je i $W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_n$ vektorski potprostor od V.*

Sa unijom potprostora stvari su malo drugačije. Naime, ako su W_1 i W_2 potprostori prostora V, njihova unija ne mora biti potprostor.



Slika 2.1: Unija potprostora ne mora biti potprostor.

Primjer 2.3. U prostoru $\mathbb{R}^2$ posmatrajmo vektore $x = (1,1)$ i $y = (-1,1)$. Skupovi

$$W_1 = \{\alpha x | \ \alpha \in \mathbb{R}\} \ , W_2 = \{\beta y | \ \beta \in \mathbb{R}\} \ ,$$

očigledno su potprostori od $\mathbb{R}^2$. Međutim, za $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, vektor $z = \alpha x + \beta y \notin W_1 \cup W_2$.
$\diamondsuit$

Definicija 2.3. *Neka je V linearan prostor, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektori iz V i $a_1, a_2, \ldots, a_n$ skalari iz Φ. Vektor*

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \ ,$$

nazivamo linearnom kombinacijom vektora $v_1, v_2, \ldots, v_n$, sa koeficijentima $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Ako je $S \subseteq V$, V linearan prostor, skup

$$L(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i | \ \lambda_i \in \Phi, \ x_i \in S, \ i = 1, 2, \ldots, n \right\} \ ,$$

nazivamo lienealom nad S ili linealom generisanim skupom S. Primjećujemo da su u lineal uključene samo konačne linearne kombinacije, što je opravdano time da radimo sa apstraktnim linearnim vektorskim prostorima, u njemu definisanim operacijama i postavljenim aksiomama, bez dodatnih struktura. Za posmatranje beskonačnih linearnih kombinacija potrebna nam je konvergencija koja nam nije dostupna u linearnim vektorskim prostorima.

Lema 2.2. *Neka je S podskup linearnog prostora V. Skup $L(S)$ je najmanji lineal u V koji sadrži skup S.*

Dokaz : Kako je $L(S)$ skup svih konačnih linearnih kombinacija elemenata iz S, jasno je da vrijedi $S \subseteq L(S)$.
Neka je L lineal koji sadrži S. Kako vrijedi

$$(\forall x, y \in L)(\forall \lambda, \mu \in \Phi) \ \lambda x + \mu y \in L \ ,$$

jasno je da to vrijedi i za svaku konačnu linearnu kombinaciju elemenata iz Φ i L, tj. $L(S) \subseteq L$. $\square$

Primjetimo ovdje da svaki lineal u sebi sadrži nula element, a to znači da je nula element sadržan u svakom linearnom vektorskom prostoru. Zato definicija disjunktnosti vektorskih prostora nije ista kao disjunktnost skupova, tj. za linearne prostore W_1 i W_2 kažemo da su disjunktni ako vrijedi

$$W_1 \cap W_2 = \{0\} \ .$$

Za lineale vrijede sljedeća tvrđenja čiji dokazi su ostavljena čitaocu za vježbu.

Lema 2.3. *Neka su W i W_1 podskupovi linearnog prostora V. Tada vrijedi:*

1. *$W \subseteq L(W)$.*
2. *Ako je $W \subseteq W_1$, onda je $L(W) \subseteq L(W_1)$.*
3. *$L(L(W)) = L(W)$.*
4. *Ako je $W = \varnothing$, onda je $L(W) = \{0\}$.*
5. *Ako je $W \subseteq W_1 \subseteq L(W)$, onda je $L(W) = L(W_1)$.*

Definicija 2.4. *Neka su W_1 i W_2 potprostori linearnog prostora V. Skup $W_1 + W_2 = L(W_1 \cup W_2)$ nazivamo sumom potprostora W_1 i W_2.*
Za V kažemo da je direktna suma potprostora W_1 i W_2 ako vrijedi

1. *$V = L(W_1 \cup W_2)$ i*
2. *W_1 i W_2 su disjunktni.*

Direktnu sumu označavamo sa $V = W_1 \oplus W_2$ i tada kažemo da je W_1 direktni komplement od W_2 i obrnuto.

Lema 2.4. *Linearani prostor V je direktna suma potprostora W_1 i W_2 ako i samo ako se svaki element $z \in V$ na jedinstven način može prikazati kao $z = x + y$, gdje je $x \in W_1$, a $y \in W_2$.*

I Definicija 2.4 i Lema 2.4 mogu se produžiti na konačnu i prebrojivu familiju potprostora.

Definicija 2.5. *Neka je V linearan vektorski prostor. Za vektore $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ kažemo da su linearno zavisni ako postoji netrivijalna kombinacija elemenata $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \Phi$, takva da važi*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \ .$$

(pod netrivijalnom kombinacijom podrazumijevamo da je bar jedan od λ_i ($i \in \{1, 2, ..., n\}$) različit od nule).
U suprotnom kažemo da su vektori $x_1, x_2, ..., x_n$ linearno nezavisni.
Za beskonačan skup vektora kažemo da su linearno nezavisni, ako je proizvoljna konačna kolekcija tih vektora linearno nezavisna.

Lema 2.5. *Neka je V linearan vektorski prostor i neka je $B \subset V$ skup linearno nezavisnih vektora. Neka je za neko $x \in V$ skup $B \cup \{x\}$ linearno zavisan, tada $x \in L(B)$.*

Definicija 2.6. *Neka je V linearan vektorski prostor. Skup linearno nezavisnih vektora $B \subset V$ nazivamo algebarskom ili Hamelovom bazom prostora V, ako vrijedi $L(B) = V$.*

Na osnovu definicije baze i Leme 2.5, jasno je da ako je B baza vektorskog prostora V, da je to maksimalan skup linearno nezavisnih vektora prostora V u smislu brojnosti. Ovo znači da dodavanjem bilo kog vektora baznom skupu vektora, on postaje skup linearno zavisnih vektora. Kao posljedicu ovoga imamo da u prostoru koji ima algebarsku bazu, za svaki $x \in V$ vrijedi

$$x = \sum_{x_\alpha \in B} \phi_\alpha x_\alpha \ ,$$

za neke $\phi_\alpha \in \Phi$.
Jasno je da jedan vektorski prostor može imati više baza, tj. svaki skup linearno nezavisnih vektora koji generišu čitav prostor, je baza prostora. O postojanju bar jedne baze u vektorskom prostoru govori nam sljedeće tvrđenje. Za njen dokaz trebaće nam Zornova lema, jedan od ekvivalenata Aksiome izbora.

Lema 2.6 (Zornova lema).
Ako svaki lanac nepraznog, parcijalno uređenog skupa ima gornje ograničenje, tada taj skup ima najmanje jedan maksimalan element.

Teorem 2.7. *Svaki linearan vektorski prostor ima bazu.*

Dokaz : Neka je V linearan prostor i neka je $\mathscr{B}$ familija svih podskupova od V čiji su elementi linearno nezavisni. Kako prazan skup pripada $\mathscr{B}$ onda ta familija nije prazna. Lahko se provjerava da je $\mathscr{B}$ parcijalno uređena inkluzijom. Neka je $(B_i)_{i\in I}$ proizvoljan lanac u $\mathscr{B}$. Posmatrajmo

$$B^- = \bigcup_{i\in I} B_i \ .$$

B^- je linearno nezavisan skup jer je proizvoljna kolekcija elemenata iz B^- sadržana u nekom B_i, a ovaj je linearno nezavisan skup. Jasno je takođe da za proizvoljno $i \in I$ vrijedi $B_i \subseteq B^-$, te je B^- gornje ograničenje posmatranog lanca. Na osnovu Zornove leme, postoji maksimalan element B^*, familije $\mathscr{B}$.
Pretpostavimo da sada postoji element $v \in V$ takav da $v \notin B^*$. To onda znači da je skup $B^* \cup \{v\}$ linearno zavisan, a na osnovu Leme 2.5 onda imamo $v \in L(B^*)$. Ovo znači da je $L(B^*) = V$, tj. B^* je baza prostora V. $\square$

Ako je B baza prostora V i ako je $card(B) = n \in \mathbb{N}$, kažemo da je V konačnodimenzionalan prostor dimenzije n. Ukoliko je $card(B) = \aleph_0$, kažemo da je prostor beskonačnodimenzionalan.

Primjer 2.4. U prostorima $l_p(\Phi) = l_p$ $(1 \le p < +\infty)$ vektori

$$e_n = (\underbrace{0,0,0,\dots,1}_{n-\text{članova}},0,\dots) \ ; \ n \in \mathbb{N} \ ,$$

su linearno nezavisni vektori i kako ih ima beskonačno mnogo, prostori l_p su beskonačnodimenzionalni.
Hamelovu bazu u prostoru c (konvergentnih nizova) čine vektori

$$e_1 = (1,1,1,...,1,..) \ , \ e_n = (0,0,0,..., \underbrace{1}_{(n-1)-to \ mjesto} ,0,...) \ n \in \mathbb{N}, n > 2 \ .$$

$\diamondsuit$

Primjer 2.5. Na prostoru $C[0,1]$ posmatrajmo funkcije f_n definisane sa

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad t \in [0,1] \setminus [2^{-n} - 2^{-(n+2)}, 2^{-n} + 2^{-(n+2)}] \\ 2^{n+2}\left(t - 2^{-n} + 2^{-(n+2)}\right) & ; \quad t \in [2^{-n} - 2^{-(n+2)}, 2^{-n}] \\ 2^{n+2}\left(2^{-n} + 2^{-(n+2)} - t\right) & ; \quad t \in [2^{-n}, 2^{-n} + 2^{-(n+2)}] \end{cases}$$

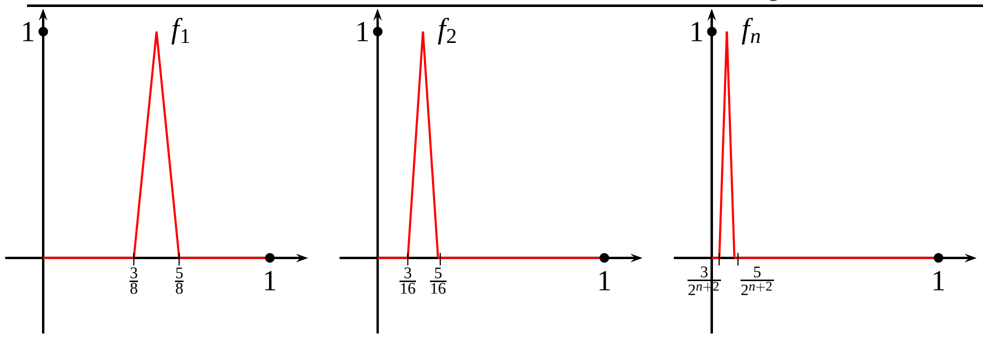
Kako su intervali $I_n = [2^{-n} - 2^{-(n+2)}, 2^{-n} + 2^{-(n+2)}]$ $(n \in \mathbb{N})$, na kojima je $f_n \neq 0$, međusobno disjunktni, lagano se pokazuje linearna nezavisnost vektora $\{ f_n | \ n \in \mathbb{N}\}$, pa je i $C[0,1]$ beskonačnodimenzionalan prostor. $\diamondsuit$

Još u dokazu teorema o kompletiranju, imali smo priliku vidjeti kako na količničkom skupu možemo raditi kao na bilo kom drugom skupu: definisati operacije, metriku i sl. Uvedimo sada količnički prostor kao linearan vektorski prostor.

Neka je X proizvoljan linearan vektorski prostor i neka je V neki njegov potprostor. Uvedimo na X relaciju

$$x,y \in X \ , \ x \sim y \ \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \ x - y \in V \ .$$

Trivijalno se pokazuje da je ovako uvedena relacija refleksivna, simetrična i tranzitivna, a time relacija ekvivalencije. Dakle, ovako uvedenom relacijom prostor X možemo razbiti na klase



Slika 2.2: Linearno nezavisne funkcije u $C[0,1]$

ekvivalencija, a skup svih klasa ekvivalencija nazivamo količničkim skupom, i za razliku od ranije korištene oznake, ovdje ćemo taj skup iz praktičnih razloga označavati sa X/V.

U svakom količničkom skupu možemo uvesti operacije sabiranja i množenja skalarom. Zaista, neka su ξ i η proizvoljne dvije klase iz X/V. Izaberimo po jedan element iz svake od tih klasa, npr. $x \in \xi$ i $y \in \eta$. Neka je ζ ona klasa ekvivalencije koja sadrži element $x+y$. Stavimo sada da je

$$\zeta = \xi + \eta \ .$$

Analogno, za $a \in \Phi$, neka je θ ona klasa koja sadrži element ax. Množenje skalarom onda uvodimo sa

$$\theta = a\xi \ .$$

Lahko se provjerava da ovako uvedene operacije ne ovise od izbora predstavnika klasa i da zadovoljavaju aksiome vektorskog prosora. Time smo na skupu X/V definisali unutrašnju i spoljašnju kompoziciju, čime on sam za sebe postaje jedan linearan vektorski prostor.

Definicija 2.7. *Neka je X proizvoljan linearan vektorski prostor i V njegov potprostor. Dimenziju količničkog prostora X/V nazivamo kodimenzija potprostora V u prostoru X.*

Dokaz sljedeće jednostavne tvrdnje ostavljen je čitaocu za vježbu.

Lema 2.8. *Ako je X konačnodimenzionalan linearan vektorski prostor dimenzije n, a V njegov potprostor dimenzije k, onda je količnički prostor dimenzije $n-k$.*

Sljedeća tvrdnja je nešto opštijeg karaktera.

Teorem 2.9. *Neka potprostor $V \subset X$ ima kodimenziju n. Tada u X postoje elementi $x_1, x_2, ..., x_n$, takvi da za svako $x \in X$, postoji jedinstvena reprezentacija*

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n + y \ ,$$

gdje su $a_1, a_2, ..., a_n \in \Phi$ i $y \in V$.

Dokaz : Neka je kodimenzija potprostora V u X jednaka n, tj. dimenzija količničkog prostora X/V je n, pa u njemu postoje linearno nezavisni vektori $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, koji čine bazu tog prostora. Iz svake od klasa ξ_i izaberimo po jednog predstavnika x_i, te klase.
Neka je sada $x \in X$ proizvoljan i neka je ξ ona klasa ekvivalencije koja ga sadrži. Zbog baze, postoje jedinstveni $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \Phi$, takvi da je

$$\xi = \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \cdots + \lambda_n\xi_n \ .$$

Sada zaključujemo da i x i $\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \cdots + \lambda_nx_n$ pripadaju istoj klasi, a to znači da se ova dva elementa razlikuju do na element iz skupa V, tj. vrijedi

$$x = \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \cdots + \lambda_nx_n + y \ , \ y \in V \ .$$

Dokaz jedinstvenosti ostaje čitaocu za vježbu. $\Box$

Definicija 2.8. *Neka je L proizvoljan potprostor linearnog vektorskog prostora X, kodimenzije 1. Za potprostor L tada kažemo da je hiperpovrš u prostoru X.*

Hiperpovrš u jednodimenzionalnom prostoru je tačka, u dvodimenzionalnom prostoru je prava, u trodimenzionalnom prostoru to je ravan itd. Generalno, u n-dimenzionalnom prostoru, hiperpovrš je generisana nedegenerisanom linearnom jednačinom

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \ ,$$

gdje nedegenerisanost znači da nisu svi a_i ($i \in \{1,2,...,n\}$) istovremeno jednaki 0.

2.2 Normirani prostori

Definicija 2.9. *Neka je X linearan vektorski prostor na kome je definisana funkcija $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, sa sljedećim osobinama:*

1. $(\forall x \in X)\ ||x|| \geq 0$,
2. $||x|| = 0$, *ako i samo ako* $x = 0$,
3. $(\forall \lambda \in \Phi)(\forall x \in X)\, ||\lambda x|| = |\lambda|\, ||x||$,
4. $(\forall x,y \in X)\ ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Tada za funkciju $||\cdot||$ kažemo da je norma na X, a za X kažemo da je normiran linearan vektorski prostor.

Ako je na X definisana norma $||\cdot||$, izraz "$||x||$" čitamo "norma vektora x".

Lema 2.10. *Neka je X normiran linearan vektorski prostor. Tada za proizvoljne $x,y \in X$ vrijedi*

$$|\,||x|| - ||y||\,| \leq ||x-y|| \ .$$

Dokaz : Neka su $x,y \in X$ proizvoljni. Iz relacije trougla imamo

$$||x|| = ||x-y+y|| \leq ||x-y|| + ||y|| \ ,$$

odnosno,

$$||x|| - ||y|| \leq ||x-y|| \ . \tag{2.1}$$

Prostom zamjenom uloga x i y, dobijamo

$$||y|| - ||x|| \leq ||x-y|| \ ,$$

ili

$$-||x-y|| \leq ||x|| - ||y|| \ . \tag{2.2}$$

Iz (2.1) i (2.2) dobijamo traženu nejednakost. □

Primjer 2.6. Primjeri normi na nekim poznatim nam skupovima:

1. Za $x \in c$ ili $x \in c_0$, $||x|| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.
2. Za $x \in l_p$ $(1 \leq p < \infty)$, $||x|| = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

3. Za $x \in l_\infty$, $||x|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

4. Za $x \in C[a,b]$, $||x|| = \max_{a\leq t\leq b} |x(t)|$.

5. Za $x \in L_p(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$, $||x|| = \left(\int_\Omega |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$.

♢

Definišimo sada pomoću norme, funkciju $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, na sljedeći način

$$d(x,y) = ||x-y|| \quad , \quad x,y \in X \ .$$

Nije teško provjeriti da ovako definisana funkcija zadovoljava sve uslove Definicije 1.1, pa je na ovaj način uvedena metrika na X, za koju kažemo da je inducirana normom u datom prostoru. Samim tim imamo da je svaki normiran linearan vektorski prostor ujedno i metrički prostor, te sve što je rečeno za metričke prostore vrijedi i za normirane prostore.

Takođe vrijede i nejednakosti Höldera i Minkowskog, a one u normiranim prostorima glase

Lema 2.11 (Nejednakost Höldera).
Za $x \in l_p$ i $y \in l_q$, gdje su $1 < p,q < +\infty$ konjugovani brojevi, vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq ||x||_{l_p} ||y||_{l_q} \ .$$

Lema 2.12 (Nejednakost Minkowskog).
Neka su $x,y \in l_p$ $(1 \leq p < +\infty)$. Tada i $x+y \in l_p$ i vrijedi

$$||x+y||_{l_p} \leq ||x||_{l_p} + ||y||_{l_p} \ .$$

I pojam izometrije iz metričkih prostora sada dobija novu formu.

Definicija 2.10. *Dva normirana prostora $(X, ||\cdot||)$ i $(Y, ||\cdot||)$ su izometrički izomorfni, ili jednostavnije izometrični, ako postoji izomorfizam $f : X \to Y$, takav da za proizvoljan $x \in X$ vrijedi*

$$||f(x)||_Y = ||x||_X \ .$$

2.3 Konvergencija u normiranim prostorima

Prenoseći poznato nam iz metričkih prostora sada imamo, za niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ kažemo da konvergira ka elementu $x_0 \in X$, ako vrijedi

$$||x_n - x_0|| \to 0 \ , \ (n \to \infty) \ .$$

Tada kažemo da niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po normi ka elementu x_0. Niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ je Cauchyjev ako vrijedi

$$||x_n - x_m|| \to 0 \ , \ (n,m \to \infty) \ .$$

Definicija 2.11. *Za skup A, podskup normiranog prostora X kažemo da je ograničen, ako vrijedi*

$$(\exists M > 0)(\forall x \in A) \ ||x|| \leq M \ .$$

Kako je svaki konvergentan niz i ograničen, to ako vrijedi $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$, onda je $||x_n|| \leq M$, za neko $M > 0$ i za svako $n \in \mathbb{N}$.

Lema 2.13. *Neka su $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentni nizovi u normiranom linearnom vektorskom prostoru X. Tada je i niz $(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan u X.*

Dokaz : Neka $x_n \to x_0$ i $y_n \to y_0$ $(n\to\infty)$, tj.

$$||x_n - x_0|| \to 0 \ , \ ||y_n - y_0|| \to 0 \ , \ n \to \infty \ . \tag{2.3}$$

Sada vrijedi

$$||(x_n+y_n)-(x_0+y_0)|| = ||(x_n-x_0)+(y_n-y_0)|| \leq ||x_n-x_0|| + ||y_n-y_0|| \ , \tag{2.4}$$

pa zbog (2.3), izraz na desnoj strani u (2.4) teži ka 0, tj. vrijedi

$$x_n + y_n \to x_0 + y_0 \ , \ (n\to\infty) \ .$$

$\square$

Lema 2.14. *Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan niz u normiranom linearnom vektorskom prostoru X i neka je $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan niz skalara. Tada je i niz $(\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan u X.*

Dokaz : Neka $x_n \to x_0$ i $\lambda_n \to \lambda_0$ $(n\to\infty)$. Tada imamo

$$\begin{aligned} ||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0|| &= ||(\lambda_n-\lambda_0)x_n + \lambda_0(x_n-x_0)|| \\ &\leq ||(\lambda_n-\lambda_0)x_n|| + ||\lambda_0(x_n-x_0)|| \\ &= |\lambda_n-\lambda_0|\,||x_n|| + |\lambda_0|\,||x_n-x_0|| \ . \end{aligned}$$

Zbog ograničenosti niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, zaključujemo da posljednji izraz teži ka 0, kada $n\to\infty$, pa dakle vrijedi

$$\lambda_n x_n \to \lambda_0 x_0 \ , \ (n\to\infty) \ .$$

$\square$

Ako u prostoru X imamo algebarsku bazu, tada se svaki vektor tog prostora može na jedinstven način prikazati kao linearna kombinacija vektora baze, to jest za $x \in X$

$$x = \sum_{i\in I} x_i e_i \ ,$$

gdje je $\{e_i |\ i\in I\}$ baza prostora. Skalare x_i $(i\in I)$ nazivamo koordinatama vektora x. Ako sada posmatramo neki niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u tom prostoru, onda zajedno sa njim možemo posmatrati i nizove njegovih koordinata $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$, za $i\in\mathbb{N}$.

Definicija 2.12. *Neka je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz u normiranom prostoru X. Ukoliko su svi nizovi koordinata tog niza konvergentni, to jest*

$$(\forall i\in\mathbb{N})\ x_i^n \to x_i^0 \ , \ (n\to\infty) \ ,$$

kažemo da niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira po koordinatama.

Teorem 2.15. *U konačnodimenzionalnim normiranim prostorima konvergencija po normi i konvergencija po koordinatama su ekvivalentne.*

Dokaz : Neka je X n-dimenzionalan normiran prostor sa bazom $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ i neka je niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$. Tada za svako $k\in\mathbb{N}$ imamo

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k e_i \ .$$

Pretpostavimo da je niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergentan po koordinatama, to jest neka $x_i^k \to x_i^0$ $(k\to\infty)$, za $i = 1,2,...,n$. Označimo sa $x^0 = \sum_{i=1}^n x_i^0 e_i$, onda imamo

$$\begin{aligned} ||x_k - x^0|| &= \left|\left|\sum_{i=1}^n (x_i^k - x_i^0)e_i\right|\right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i^k - x_i^0|\,||e_i|| \\ &\leq \max_{1\leq i\leq n} ||e_i|| \sum_{i=1}^n |x_i^k - x_i^0| \,. \end{aligned}$$

Posljednji izraz teži ka 0, kada pustimo da $k\to\infty$, pa zaključujemo da $x_k \to x^0$ $(k\to\infty)$, to jest niz je konvergentan i po normi.

Pretpostavimo sada da niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira po normi elementu x^0 i neka vrijede reprezentacije tih elemenata u bazi prostora, kao što smo to uveli gore. Pokažimo da su u tom slučaju svi nizovi koordinata našeg niza ograničeni.

Pretpostavimo da to nije tačno, to jest da za neko $i_0 \in \{1,2,...,n\}$ je $x_{i_0}^k \to +\infty$ (ili $x_{i_0}^k \to -\infty$) $(k\to\infty)$ (u stvari postoji podniz ovog niza, ali nećemo izgubiti na opštosti ako pretpostavimo da to vrijedi za čitav niz). Ako sa σ_k označimo sumu modula koordinata k-tog elementa našeg niza, to jest

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^n |x_i^k| \,,$$

onda zbog učinjene pretpostavke mora biti $\sigma_k \to +\infty$ $(k\to\infty)$.

Formirajmo sada novi niz $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, zadat sa

$$y_k = \frac{x_k}{\sigma_k} = \sum_{i=1}^n y_i^k e_i \,,$$

gdje je $y_i^k = \frac{x_i^k}{\sigma_k}$. Kako $\sigma_k \to \infty$, to onda $y_k \to 0$, jer je niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, zbog konvergencije, ograničen. Osim toga vrijedi

$$|y_i^k| = \frac{|x_i^k|}{\sigma_k} \leq 1 \,,$$

to jest nizovi koordinata niza $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ su ograničeni, pa prema Bolzano-Weier-strassovom teoremu, postoji podniz $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ niza prirodnih brojeva, tako da za svako $i = 1,2,...,n$ vrijedi

$$y_i^{k_j} \to y_i^0 \;,\; (j\to\infty) \,.$$

Ovo onda znači da podniz $(y_{k_j})_{j\in\mathbb{N}} \subseteq (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira po koordinatama ka elementu

$$y^0 = \sum_{i=1}^n y_i^0 e_i \,.$$

Međutim, kako smo već utvrdili $y_k \to 0$ $(k\to\infty)$, a onda i svaki njegov podniz mora konvergirati ka 0, to jest mora vrijediti

$$y^0 = \sum_{i=1}^n y_i^0 e_i = 0 \,.$$

Zbog linearne nezavisnosti vektora baze zaključujemo onda da je

$$y_i^0 = 0 \;,\; \text{ za svako } i = 1,2,...,n \,.$$

Ovo ipak nije moguće jer vrijedi

$$\sum_{i=1}^n |y_i^{k_j}| = \sum_{i=1}^n \frac{|x_i^{k_j}|}{\sigma_{k_j}} = 1 \,,$$

a pri tome je
$$\sum_{i=1}^{n}|y_i^{k_j}| \to \sum_{i=1}^{n}|y_i^0| = 0 \; , (k_j \to \infty) \; .$$
Dobijena kontradikcija znači da su svi nizovi
$$(x_i^k)_{k\in\mathbb{N}} \; , \; i = 1,2,...,n$$
ograničeni (preciznije, dokazali smo da su za ograničen niz, svi nizovi njegovih koordinata ograničeni).
Posmatrajmo sada niz $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, definisan sa
$$z_k = \frac{x_k - x^0}{||x_k - x^0||} \; , \; k \in \mathbb{N} \; .$$
(Podrazumijevamo da je $\left|\left|x_k - x^0\right|\right| \neq 0$). Kako je on ograničen, jer
$$||z_k|| = 1 \; , \;\; \text{za svako } k \in \mathbb{N} \; ,$$
zaključujemo da su i svi nizovi njegovih koordinata ograničeni. Dakle, nizovi
$$\left(\frac{x_i^k - x_i^0}{||x_k - x^0||}\right)_{k\in\mathbb{N}} \; , \; i = 1,2,...,n$$
su ograničeni. Kako smo pretpostavili konvergenciju po normi, to jest $\left|\left|x_k - x^0\right|\right| \to 0$ $(k \to \infty)$, gornje će biti tačno jedino u slučaju ako za svako $i = 1,2,...,n$ vrijedi
$$x_i^k \to x_i^0 \; , \; (k \to \infty) \; ,$$
a ovo ne znači ništa drugo do konvergenciju po koordinatama našeg niza. □

Sljedećim primjerom pokazujemo da ove dvije konvergencije nisu ekvivalentne u beskonačnodimenzionalnim prostorima. Šta više, pokazuje se da je konvergencija po normi "jača" od konvergencije po koordinatama.

Primjer 2.7. Posmatrajmo u prostoru l_p $(1 \leq p < \infty)$ niz vektora $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdje je
$$e_n = (\underbrace{0,0,0,\ldots,1}_{n-\text{članova}},0,\ldots) \; .$$
Za nizove koordinata ovih vektora vidimo da za dovoljno veliko $k \in \mathbb{N}$, je $|e_n^k - 0| = 0$ (za proizvoljno $k > n$), pa svi nizovi koordinata su konvergentni ka 0.
Međutim, za $n,m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, vrijedi
$$||e_n - e_m|| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|e_n^i - e_m^i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}} \; ,$$
pa zaključujemo da niz $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nije Cauchyjev, a tim prije nije ni konvergentan. ◊

2.4 Banachovi prostori

Iz metričkih prostora preuzimamo i definiciju kompletnosti, to jest normiran prostor je kompletan, ako je u njemu svaki Cauchyjev niz konvergentan. Sada definišimo i glavni pojam ove glave.

Definicija 2.13. *Kompletan, normiran, linearan vektorski prostor se naziva Banachov prostor.*

Primjer 2.8. Neki od standardnih primjera Banachovih prostora su c, c_0, l_p $(1 \leq p \leq \infty)$, $C[a,b]$, $L_p[a,b]$, na kojima su norme uvedene kao u Primjeru 2.6. $\diamondsuit$

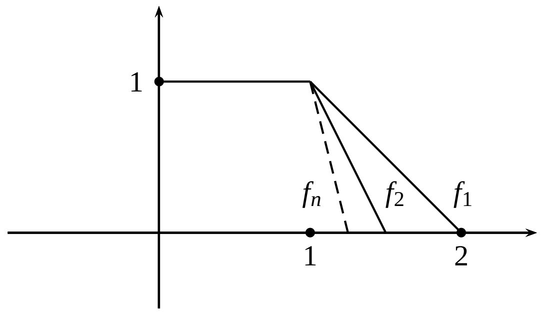
Sljedećim primjerom dajemo normiran linearan vektorski prostor koji nije Banachov.

Primjer 2.9. Posmatrajmo skup $C[0,2]$, neprekidnih funkcija na segmentu $[0,2]$. Za $x \in C[0,2]$ stavimo

$$||x|| = \int_0^2 |x(t)|dt \ ,$$

čime smo definisali normu na $C[0,2]$.
Posmatrajmo sada sljedeći niz funkcija

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in [0,1) \\ 1+n-nx & ; \quad x \in \left[1, 1+\frac{1}{n}\right] \\ 0 & ; \quad x \in \left(1+\frac{1}{n}, 2\right] \end{cases} \quad , \ n \in \mathbb{N} \ .$$



Za proizvoljne $n,m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, imamo

$$||f_n - f_m|| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \to 0 \ , \ (n,m \to \infty) \ .$$

Dakle, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyjev niz. Međutim, očigledno da $f_n \to f^*$ $(n \to \infty)$, gdje je

$$f^*(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in [0,1) \\ 0 & ; \quad x \in [1,2] \end{cases}$$

ali $f^* \notin C[0,2]$, to jest dati Cauchyjev niz nije konvergentan. $\diamondsuit$

Kao i kod metričkih prostora i ovdje navodimo ekvivalentan teorem o kompletiranju.

Teorem 2.16. *Svaki normiran linearan vektorski prostor se može kompletirati, to jest za svaki normiran linearan vektorski prostor X, postoji kompletan normiran linearan vektorski prostor $\overline{X}$, takav da je X svuda gust u $\overline{X}$.*

Definicija 2.14. *Neka je X Banachov prostor i neka je $Y \subseteq X$. Ako je Y sam za sebe Banachov prostor u odnosu na algebarsku i metričku strukturu koju u njemu inducira odgovarajuća struktura iz X, kažemo da je Y Banachov potprostor od X.*

Sama činjenica da je Y vektorski potprostor od X ne mora značiti da je on i Banachov potprostor, jer se pojam "vektorski potprostor" odnosi samo na algebarsku strukturu, dok se pojam "Banachov potprostor" odnosi i na algebarsku ali i na metričku strukturu skupa.

Primjer 2.10. Posmatrajmo skup $A \subset l_p$ koji u sebi sadrži sve nizove koji imaju samo konačno mnogo koordinata različitih od nule, to jest

$$x \in A \Leftrightarrow x = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...) \ .$$

Lahko se provjerava da je A vektorski potprostor od l_p. Posmatrajmo niz

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ , \ x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, ..., \frac{1}{2^n}, 0, 0, ...\right) \ , \ n \in \mathbb{N} \ .$$

Očigledno $(x_n) \subset A$ i pri tome je za $n, m \in \mathbb{N}$ $(m < n)$

$$||x_n - x_m|| = \left(\sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{2^{ip}}\right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \ , \ n, m \to \infty \ .$$

Dakle, (x_n) je Cauchyjev niz ali on nije konvergentan u A jer očigledno za niz $x^* = (\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ vrijedi

$$||x_n - x^*|| = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{ip}}\right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \ , \ n \to \infty \ ,$$

to jest $x_n \to x^*$ $(n \to \infty)$, ali $x^* \notin A$. $\diamondsuit$

Dokaz sljedeće proste činjenice ostavljamo čitaocu za vježbu.

Lema 2.17. *Svaki zatvoreni vektorski potprostor Banahovog prostora je Banachov potprostor.*

Iz linearne algebre nam je poznat stav

Teorem 2.18. *Svaka dva konačnodimenzionalna linearna vektorska prostora, iste dimenzije, su izomorfni.*

Dokaz : Neka su X i Y dva konačnodimenzionalna linearna vektorska prostora, dimenzije $n \in \mathbb{N}$. Ako pokažemo da je naprimjer X izomorfan sa $\mathbb{R}^n$, onda kako je izomorfizam relacija ekvivalencije, tvrđenje će biti dokazano.
Dakle, neka su vektori $e_1, e_2, ..., e_n$ baza prostora X i neka je $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ proizvoljan element iz $\mathbb{R}^n$. Definišimo preslikavanje $f : \mathbb{R}^n \to X$ na sljedeći način,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ .$$

Nije teško vidjeti (provjeriti!) da je f bijektivno preslikavanje. Osim toga važi,

$$f(\lambda x' + \mu x'') = \lambda f(x') + \mu f(x'') \ ,$$

pa je f izomorfizam iz $\mathbb{R}^n$ u X.

Dakle, X je izomorfan sa $\mathbb{R}^n$, a na isti način se pokazuje da je $\mathbb{R}^n$ izomorfan sa Y, pa na osnovu tranzitivnosti, zaključujemo izomorfnost prostora X i Y. $\square$

Kao direktnu posljedicu gornjeg teorema imamo sljedeća dva tvrđenja.

Posljedica 2.19. *Svaki konačnodimenzionalan normiran linearan vektorski prostor je kompletan.*

Drugačije rečeno, normiran linearan vektorski prostor konačne dimenzije je Banachov prostor.

Posljedica 2.20. *Ako je Y konačnodimenzionalan potprostor normiranog prostora X, onda je Y zatvoren potprostor od X.*

Definicija 2.15. *Neka je X normiran linearan vektorski prostor i neka su $||\cdot||_1$ i $||\cdot||_2$ dvije norme definisane na X. Kažemo da su ove norme ekvivalentne ako postoje konstante $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, tako da za svako $x \in X$, vrijedi*

$$C_1\,||x||_1 \le ||x||_2 \le C_2\,||x||_1 \ .$$

Trivijalno je vidljivo da je ovako uvedena veza između normi na nekom prostoru, refleksivna, simetrična i tranzitivna, pa je relacija "ekvivalentnost normi", relacija ekvivalencije.

Još jedna specifičnost konačnodimenzionalnih prostora iskazana je sljedećom tvrdnjom.

Teorem 2.21. *Neka je X konačnodimenzionalan normiran prostor. Svake dvije norme definisane na X, su ekvivalentne.*

Dokaz : Neka je X konačnodimenzionalan prostor i neka su $||\cdot||_1$ i $||\cdot||_2$ dvije norme definisane na X. Pretpostavimo da one nisu ekvivalentne. To znači da za svako $k \in \mathbb{N}$, postoji $x_k \in X$, takav da vrijedi

$$||x_k||_2 > k\,||x||_1 \ .$$

Na ovaj način smo definisali niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$. Pomoću njega definišimo novi niz $y_k = \frac{x_k}{k||x_k||_1}$ za koga vrijedi

$$||y_k||_1 = \frac{1}{k} \to 0 \ , \ (k \to \infty) \ ,$$

to jest $y_k \to 0$ po normi $||\cdot||_1$. Zbog toga zaključujemo da niz $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira i po koordinatama. Kako je X konačnodimenzionalan prostor, onda su u njemu ove dvije konvergencije ekvivalentne, pa sada iz konvergencije po koordinatama zaključujemo da je ovaj niz konvergentan i po normi $||\cdot||_2$. Međutim,

$$||y_k||_2 = \frac{||x_k||_2}{k\,||x_k||_1} > 1 \ ,$$

pa očigledno ne može vrijediti $y_k \to 0$ $(k \to \infty)$, a to je kontradikcija. Dakle za neko C_1 i za svako $x \in X$ vrijedi,

$$||x||_2 \le C_1\,||x||_1 \ .$$

Na analogan se način pokaže da mora vrijediti i druga nejednakost iz definicije ekvivalentnosti normi. □

Ovakvu situaciju, što je već za očekivati, nemamo u beskonačnodimenzionalnim prostorima. Da se u to uvjerimo, posmatrajmo sljedeći primjer.

Primjer 2.11. Neka je B[0,1] skup svih ograničenih i integrabilnih funkcija na segmentu $[0,1]$. Definišimo funkcije $||\cdot||_1, ||\cdot||_2 : B[0,1] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ na sljedeći način,

$$x \in B[0,1] \ , \ ||x||_1 = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| \ , \ ||x||_2 = \int_0^1 |x(t)|dt \ .$$

Čitaocu je ostavljeno da pokaže da su ovako definisane funkcije, norme na $B[0,1]$. Posmatrajmo niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, zadat sa

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in \left[0, \frac{1}{n}\right) \\ 0 & ; \quad x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases} \ , \ n \in \mathbb{N} \ .$$

Lahko sada provjeravamo da vrijedi

$$||f_n||_1 = \max_{t\in[0,1]} |f_n(t)| = 1 \text{ , odnosno } \ ||f_n||_2 = \int_0^1 |f_n(t)|dt = \int_0^{\frac{1}{n}} dt = \frac{1}{n} \ , \ n \in \mathbb{N} \ .$$

Ovo znači da je

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n||_1 = 1 \ , \ \lim_{n\to\infty} ||f_n||_2 = 0 \ ,$$

iz čega je očigledna neekvivalentnost definisanih normi na $B[0,1]$. ♢

Pokažimo još jednu specifičnu vezu između potprostora zadatog Banachovog prostora, gdje opet ključnu ulogu igra konačnodimenzionalnost.

Teorem 2.22. *Neka je X Banachov prostor i neka su L_1 i L_2 disjunktni potprostori od X. Ako je bar jedan od potprostora konačne dimenzije, tada je i $L_1 \oplus L_2$ potprostor od X.*

Dokaz : Neka su $L_1, L_2 \subseteq X$ disjunktni, to jest $L_1 \cap L_2 = \{0\}$ i neka je recimo L_1 konačne dimenzije. Označimo sa $L = L_1 \oplus L_2$. Za L znamo da je vektorski potprostor od X, pa nam ostaje pokazati da on mora biti zatvoren. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz u L, takav da $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Pokažimo da $x_0 \in L$. Kako je L direktna suma, to za svako $n \in \mathbb{N}$, postoje $x'_n \in L_1$ i $x''_n \in L_2$, takvi da je $x_n = x'_n + x''_n$.
Pretpostavimo sada da je na ovaj način formirani niz $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ neograničen, to jest $||x'_n|| \to +\infty$ $(n \to \infty)$. Formirajmo nove nizove na sljedeći način,

$$y_n = \frac{x_n}{||x'_n||}\ ,\ y'_n = \frac{x'_n}{||x'_n||}\ ,\ y''_n = \frac{x''_n}{||x'_n||}\ .$$

Kako je niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan, on je i ograničen, pa zaključujemo da $y_n \to 0$ $(n \to \infty)$.
Za niz (y'_n) vrijedi, $||y'_n|| = 1$, to jest on je ograničen niz u konačnodimenzionalnom prostoru, pa iz njega možemo izdvojiti konvergentan podniz $(y'_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Kako je

$$y_n = \frac{x_n}{||x'_n||} = \frac{x'_n + x''_n}{||x'_n||} = y'_n + y''_n\ ,$$

onda vrijedi i

$$y_{n_k} = y'_{n_k} + y''_{n_k}\ . \tag{2.5}$$

Sada zbog konvergencije nizova $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ i $(y'_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, zaključujemo da takav mora biti i niz $(y''_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Neka je $y'_{n_k} \to y'_0$ i $y''_{n_k} \to y''_0$ $(k \to \infty)$. Iz (2.5), puštajući da $k \to \infty$, imamo

$$0 = y'_0 + y''_0\ ,$$

pri čemu, zbog zatvorenosti potprostora, vrijedi $y'_0 \in L_1$ i $y''_0 \in L_2$. Kako su ovi potprostori disjunktni, iz posljednjeg zaključujemo da mora vrijediti $y'_0 = y''_0 = 0$. Dakle, $y'_{n_k} \to 0$ $(k \to \infty)$, ali to je nemoguće zbog činjenice da je $||y'_n|| = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$.
Dakle, niz $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen niz, pa iz njega možemo izdvojiti konvergentan podniz (x'_{n_k}) i neka je $x'_{n_k} \to x'_0 \in L_1$ $(k \to \infty)$. Jasno je sada da zbog činjenice $x_{n_k} = x'_{n_k} + x''_{n_k}$, i konvergencije nizova $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ i $(x'_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, mora i niz $(x''_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ biti konvergentan. Neka je $x''_{n_k} \to x''_0 \in L_2$ $(n \to \infty)$. Sada jednakost

$$x_{n_k} = x'_{n_k} + x''_{n_k}\ ,$$

puštajući da $k \to \infty$, prelazi u jednakost

$$x_0 = x'_0 + x''_0\ ,$$

pri čemu su $x'_0 \in L_1$ i $x''_0 \in L_2$, pa zaključujemo da $x_0 \in L$. Dakle, L sadrži sve svoje tačke nagomilavanja, pa je kao takav, zatvoren potprostor, to jest Banachov potprostor od X. □

Da proizvoljna direktna suma potprostora ne mora biti potprostor, pokažimo primjerom.

Primjer 2.12. U prostoru l_2 posmatrajmo podskupove L_1 i L_2 zadate sa

$$L_1 = \{(\xi_n) \in l_2 |\ \xi_{2n} = 0\ ,\ n \in \mathbb{N}\}\ ,\ L_2 = \left\{(\eta_n) \in l_2 |\ \eta_{2n} = \frac{\eta_{2n-1}}{n^r}, n \in \mathbb{N},\ r > \frac{1}{2}\right\}\ .$$

Lahko se provjerava da su L_1 i L_2 linearni vektorski potprostori od l_2 i da su disjunktni, to jest $L_1 \cap L_2 = \{0\}$. Posmatrajmo sada nizove $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, zadate sa

$$x_n = (\xi_i^n)_{i\in\mathbb{N}} \ , \ \xi_i^n = \begin{cases} 0 & ; \quad i = 2k \\ 1 & ; \quad i = 2k-1, \ k = 1,2,\dots,n \\ 0 & ; \quad i = 2k-1, \ k = n+1,n+2,\dots \end{cases}$$

$$y_n = (\eta_i^n)_{i\in\mathbb{N}} \ , \ \eta_i^n = \begin{cases} -1 & ; \quad i = 2k-1, \ k = 1,2,\dots,n \\ 0 & ; \quad i = 2k-1, \ k = n+1,n+2,\dots \\ -\frac{1}{k^r} & ; \quad i = 2k, \ k = 1,2,\dots,n \\ 0 & ; \quad i = 2k, \ k = n+1,n+2,\dots \end{cases}$$

Jasno je da $x_n \in L_1$, a $y_n \in L_2$ za svako $n \in \mathbb{N}$.
Označimo $L = L_1 \oplus L_2$ i stavimo da je $z_n = x_n + y_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Tada je niz $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadat sa

$$z_n = (\zeta_i^n)_{i\in\mathbb{N}} \ , \ \zeta_i^n = \begin{cases} 0 & ; \quad i = 2k-1, \ k = 1,2,\dots \\ -\frac{1}{k^r} & ; \quad i = 2k, \ k = 1,2,\dots,n \\ 0 & ; \quad i = 2k, \ k = n+1,n+2,\dots \end{cases}$$

Očigledno $z_n \to z_0$ $(n \to \infty)$, gdje je

$$z_0 = (\zeta_i^0)_{i\in\mathbb{N}} \ , \ \zeta_i^0 = \begin{cases} 0 & ; \quad i = 2k-1, \ k = 1,2,\dots \\ -\frac{1}{k^r} & ; \quad i = 2k, \ k = 1,2,\dots \end{cases}$$

$z_0 \in l_2$ jer je

$$||z_0|| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\zeta_i^0|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i)^{2r}} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \ .$$

Međutim, $z_0 \notin L$. Zaista, ako bi to bio slučaj, postojali bi $x_0 \in L_1$ i $y_0 \in L_2$, takvi da je $z_0 = x_0 + y_0$. Ali tada bi moralo biti

$$x_0 = (1,0,1,0,\dots,1,0,\dots) \ , \ y_0 = \left(-1, -\frac{1}{1^r}, -1, -\frac{1}{2^r}, \dots, -1, -\frac{1}{k^r}, \dots \right) \ .$$

Očigledno $x_0 \notin L_1$ i $y_0 \notin L_2$, pa dakle i $z_0 \notin L$.
Dakle, postoji niz $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L$, takav da $z_n \to z_0$ $(n \to \infty)$, a $z_0 \notin L$, pa zaključujemo da L nije potprostor od l_2. ♢

2.5 Kompaktnost u Banachovim prostorima

U razmatranju osobine kompaktnosti u metričkim prostorima, vidjeli smo da je svaki relativno kompaktan skup ograničen i da je svaki kompaktan skup zatvoren. Kod konačnodimenzionalnih prostora to su i dovoljni uslovi.

Teorem 2.23. *Neka je X konačnodimenzionalan normiran prostor. Da bi skup $A \subseteq X$ bio relativno kompaktan potrebno je i dovoljno da je on ograničen skup.*

Dokaz : Na osnovu Teorema 1.45 imamo potrebne uslove.
Dokažimo neophodnost. Neka je A ograničen podskup od X i neka je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz u A. Kako su to ujedno elementi prostora X, a ovaj je dimenzije n, to vrijedi,

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k e_i \ ,$$

gdje su e_i $(i = 1,2,...,n)$ vektori baze prostora X. Zbog ograničenosti niza i nizovi njegovih koordinata su ograničeni, pa za svako $i = 1,2,...,n$, postoji podniz $(x_i^{k_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset (x_i^k)_{k\in\mathbb{N}}$, takav da

$$x_i^{k_j} \to x_i^0 \ , \ (j \to \infty) \ .$$

Ovo znači da podniz $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira po koordinatama, pa na osnovu Teorema 2.15, taj je podniz i konvergentan.
Iz proizvoljnog niza smo izdvojili konvergentan podniz, dakle A je relativno kompaktan skup. $\square$

Teorem 2.24. *Neka je X konačnodimenzionalan normiran prostor. Da bi skup $A \subseteq X$ bio kompaktan potrebno je i dovoljno da je on ograničen i zatvoren skup.*

Sljedećom teoremom dobijamo objašnjenje zašto tvrđenje Teorem 2.23 nije tačno u beskonačnodimenzionalnim prostorima. Naziva se Rieszovom lema ili "teorem o skoro normali".

Teorem 2.25 (Rieszova lema o skoronormali). *Neka je L neprazan pravi potprostor Banachovog prostora X. Tada za svako $\varepsilon > 0$, postoji $x_\varepsilon \in X$, za koga vrijedi*

$$||x_\varepsilon|| = 1 \quad i \quad d(x_\varepsilon, L) \geq 1 - \varepsilon \ .$$

Dokaz : Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno zadat. Kako je L pravi potprostor od X, postoji $x_0 \in X \setminus L$. Zbog zatvorenosti L tada vrijedi

$$d(x_0, L) = d > 0 \ .$$

Kako je po definiciji

$$d(x_0, L) = \inf_{x\in L} ||x - x_0|| \ ,$$

postoji niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L$, takav da je zadovoljeno

$$||x_n - x_0|| = d_n \longrightarrow d > 0 \ , \ (n \longrightarrow \infty) \ .$$

Ne gubeći na opštosti, možemo smatrati da je $d_n > 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Formirajmo sada niz

$$y_n = \frac{1}{d_n}(x_n - x_0) \ ,$$

za koga očigledno vrijedi $||y_n|| = 1$, za $n \in \mathbb{N}$. Neka je sada $x \in L$ proizvoljan, onda imamo

$$||y_n - x|| = \frac{||x_0 - x_n - d_n x||}{d_n} = \frac{||x_0 - (x_n + d_n x)||}{d_n} \ ,$$

a kako je L potprostor, to $x_n + d_n x \in L$. Zato možemo zaključiti

$$||y_n - x|| \geq \frac{1}{d_n} \inf_{y\in L} ||x_0 - y|| = \frac{d}{d_n} \ .$$

Kako $d_n \longrightarrow d$ $(n \longrightarrow \infty)$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za $n \geq n_0$ vrijedi

$$\frac{d}{d_n} > 1 - \varepsilon \ .$$

Uzimajući da je $x_\varepsilon = y_{n_0}$, zaključujemo da je $||x_\varepsilon - x|| > 1 - \varepsilon$, za svako $x \in L$. Kako desna strana posljednje nejednakosti ne ovisi o $x \in L$, uzimajući infimum dobijamo

$$d(x_\varepsilon, L) = \inf_{x\in L} ||x_\varepsilon - x|| \geq 1 - \varepsilon \ ,$$

što je i trebalo dokazati. □

Na osnovu Rieszove teoreme sada jednostavno zaključujemo da u svakom beskonačnodimenzionalnom Banachovom prostoru postoje ograničeni skupovi koji nisu relativno kompaktni. Zaista, neka je X proizvoljan beskonačnodimenzionalan prostor i neka je $x_1 \in X$ proizvoljan, takav da je $||x_1|| = 1$. Posmatrajmo

$$L_1 = \{x \in X \,|\, x = \lambda x_1 \ , \ \lambda \in \Phi\} \ .$$

Tada je očigledno $L_1 \subset X$ i $dim(L_1) = 1$. Kako je $X \neq L_1$, prema Rieszovoj teoremi postoji $x_2 \in X \setminus L_1$, takav da je $||x_2|| = 1$ i $d(x_2, L_1) \geq \frac{1}{2}$, a tim prije je zadovoljeno $||x_2 - x_1|| \geq \frac{1}{2}$. Označimo sada sa L_2 lineal nad vektorima x_1 i x_2. $dim(L_2) = 2$ pa je opet $X \neq L_2$, te na osnovu Rieszove teoreme postoji $x_3 \in X \setminus L_2$, $||x_3|| = 1$ i $d(x_3, L_2) \geq \frac{1}{2}$. Lahko provjeravamo da će vrijediti

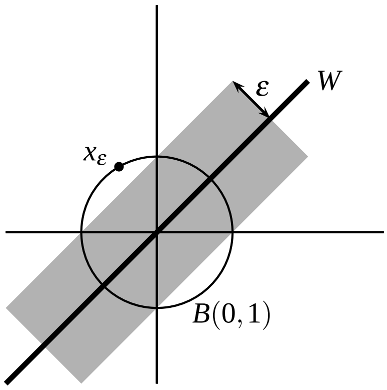
$$||x_3 - x_1|| \geq \frac{1}{2} \text{ i } ||x_3 - x_2|| \geq \frac{1}{2} \ .$$

Nastavimo li ovaj postupak, dobićemo niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa osobinama

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ ||x_n|| = 1 \quad , \quad (\forall n, m \in \mathbb{N}, \ n \neq m) \ ||x_n - x_m|| \geq \frac{1}{2} \ .$$

Zbog prve osobine dobijeni niz je očigledno ograničen, a zbog druge osobine iz njega očigledno ne možemo izdvojiti niti jedan konvergentan podniz. Dakle, skup $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ je ograničen, ali nije relativno kompaktan.

Da bi smo stvorili sliku o onome o čemu govori Rieszova lema, posmatrajmo dvodimenzionalni euklidski prostor $(\mathbb{R}^2, d_2)$. Svaki jednodimenzionalni potprostor W ovog prostora predstavljen je kao prava linija koja prolazi kroz koordinatni početak.



Slika 2.3: Rieszova lema u $(\mathbb{R}^2, d_2)$

Posmatrajmo jediničnu kuglu $B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ i neka je $0 < \varepsilon < 1$ proizvoljan. "Opišimo" oko potprostora W traku (osjenčeni dio na slici) širine 2ε. Nije teško vidjeti (Slika 2.3) da postoji element x_ε koji leži na sferi $S(0,1)$ ($||x_\varepsilon|| = 1$), a koji je izvan osjenčene trake, to jest čija je udaljenost od potprostora W veća od ε.

2.6 Konveksnost u normiranim prostorima

Definicija 2.16. *Neka je X vektorski prostor i $x, y \in X$. Skup*

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty \mid 0 \leq t \leq 1\} \ ,$$

nazivamo segment s krajevima x i y.

Definicija 2.17. *Skup $A \subset X$ je konveksan ako za bilo koje dvije tačke $x, y \in A$ vrijedi $[x, y] \subseteq A$.*

Lema 2.26. *Neka je X normiran prostor, $x_0 \in X$ i $r > 0$. Kugle $B(x_0, r)$ i $K(x_0, r)$ su konveksni skupovi u X.*

Dokaz : Za $x, y \in B(x_0, r)$ i $t \in [0, 1]$ imamo

$$\begin{aligned} ||((1-t)x + ty) - x_0|| &= ||(1-t)(x - x_0) + t(y - x_0)|| \\ &\leq (1-t)\underbrace{||x - x_0||}_{<r} + t\underbrace{||y - x_0||}_{<r} < r\ . \end{aligned}$$

Analogno se dokazuje slučaj za zatvorenu kuglu. □

Teorem 2.27. *Ako je S konveksan podskup normiranog prostora X, onda je i njegovo zatvorenje $\overline{S}$ konveksan skup.*

Dokaz : Neka su $x, y \in S$, $t \in [0, 1]$ i neka je $z = (1-t)x + ty$. Neka su $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ takvi da je $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ i $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Zbog konveksnosti skupa S za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $z_n = (1-t)x_n + ty_n \in S$, ali tada

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}((1-t)x_n + ty_n) = (1-t)x + ty \in \overline{S}\ .$$

□

Jasno je da je presjek proizvoljna dva konveksna skupa opet konveksan skup. Šta više, presjek proizvoljno mnogo konveksnih skupa je i sam konveksan.

Definicija 2.18. *Neka je X normiran prostor i $S \subseteq X$. Presjek svih konveksnih skupova koji sadrže skup S nazivamo konveksni omotač skupa S i označavamo ga sa $conv(S)$.*
Skup $\overline{conv}(S)$ je presjek svih zatvorenih konveksnih nadskupova od S i nazivamo ga zatvorenje konveksnog omotača skupa S.

Neka su $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ i $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, 2, ...n)$ takvi da je $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Za elelemt $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ kažemo da je konveksna kombinacija elemenata $x_1, x_2, ..., x_n$.

Teorem 2.28. *Neka je X normiran prostor i $S \subseteq X$.*

1. *$conv(S)$ je skup svih mogućih konveksnih kombinacija elemenata iz S.*
2. *$\overline{conv}(S) = \overline{conv(S)}$.*

Jasno je da je svaki vektorski prostor, a samim tim i potprostor vektorskog prostora, konveksan skup. Definišimo sada srodan pojam koji karakteriše jaču osobinu prostora od osobine konveksnosti.

Definicija 2.19. *Neka je X normiran prostor. Kažemo da je X strogo konveksan ako za proizvoljne različite $x, y \in S(0, 1)$ vrijedi*

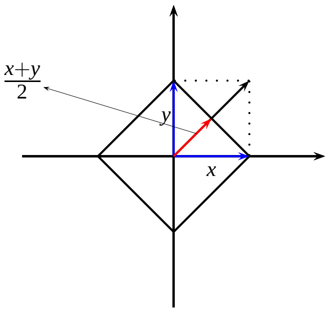
$$\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right| < 1\ .$$

Primjer 2.13. Prostor $\mathbb{R}^2$ sa d_2 metrikom jeste strogo konveksan prostor (slika desno), ali prostor $\mathbb{R}^2$ sa metrikom d_1 nije strogo konveksan prostor (slika lijevo).

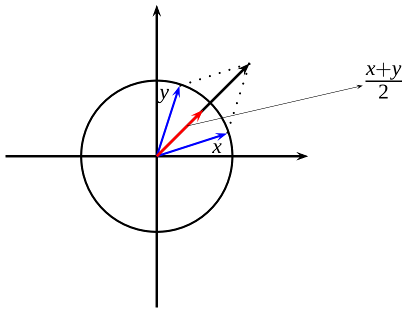
♢

Teorem 2.29. *U normiranom prostoru X sljedeći iskazi su ekvivalentni:*

1. *X je strogo konveksan.*
2. *Ako za proizvoljne $x, y \in S(0, 1)$, vrijedi $[x, y] \subseteq S(0, 1)$, onda je $x = y$.*
3. *Ako je za nenula elemente $x, y \in X$ zadovoljeno $||x + y|| = ||x|| + ||y||$, onda postoji $\lambda > 0$ takav da je $x = \lambda y$.*



(a) Sfera u metričkom prostoru $(\mathbb{R}^2, d_1)$.



(b) Sfera u metričkom prostoru $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

3 Linearni operatori

Neka su X i Y dva proizvoljna skupa. Preslikavanje $A : X \rightarrow Y$ nazivamo operator, pri čemu koristimo standardnu definiciju preslikavanja, da svakom elementu iz podskupa od X pridružujemo po nekom pravilu jedinstven element iz Y. Dakle, pod terminom operator podrazumijevamo najopštiji oblik preslikavanja, a opštost se ogleda u tome da se područje originala nalazi u proizvoljnom prostoru X, a područje slika u proizvoljnom prostoru Y. Ako nije drugačije naglašeno, u daljem izlaganju podrazumijeva se da su X i Y linearni vektorski prostori. Često se umjesto termina operator koriste i termini preslikavanje, transformacija ili funkcija. Sa $D_A \subseteq X$ ćemo označavati domen preslikavanja operatora A

$$D_A = \{x \in X \mid A(x) \text{ je definisano } \} \ ,$$

i podrazumijevamo da je on linearan vektorski prostor. Uobičajeno se podrazumijeva da je domen operatora čitav X, osim ako nije precizirano drugačije. Sa $R_A \subseteq Y$ (ili sa $Rang(A)$) označavamo područje slika ili kodomen operatora A

$$R_A = \{y \in Y \mid y = A(x) \text{ za neko } x \in X\} \ .$$

Za $x \in X$, djelovanje operatora A uobičajeno ćemo zapisivati sa Ax, umjesto $A(x)$.

Definicija 3.1. *Za operator $A : X \rightarrow Y$ kažemo da je aditivan ako i samo ako za proizvoljne $x_1, x_2 \in D_A \subseteq X$, vrijedi*

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 \ .$$

Definicija 3.2. *Za operator $A : X \rightarrow Y$ kažemo da je homogen ako i samo ako vrijedi*

$$(\forall x \in D_A \subseteq X)(\forall \lambda \in \Phi) \ A(\lambda x) = \lambda Ax \ .$$

Definicija 3.3. *Za operator $A : X \rightarrow Y$ kažemo da je linearan operator ako i samo ako je on istovremeno aditivan i homogen, tj. ako vrijedi*

$$(\forall x_1, x_2 \in D_A \subseteq X)(\forall \lambda, \mu \in \Phi) \ A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda Ax_1 + \mu Ax_2 \ .$$

Lema 3.1. *Za proizvoljan linearan operator vrijede osobine:*

1. $A0 = 0$.
2. $A(-x) = -Ax$.

Dokaz :

1. Iz osobina linearnog vektorskog prostora i linearnosti operatora imamo $Ax = A(x + 0) = Ax + A0$, a zbog jedinstvenosti neutralnog elementa za sabiranje imamo $A0 = 0$.

2. Koristeći gornju osobinu i linearnost operatora, imamo $0 = A0 = A(x + (-x)) = Ax + A(-x)$, iz čega je zbog jedinstvenosti inverznog elementa za sabiranje onda $A(-x) = -Ax$.

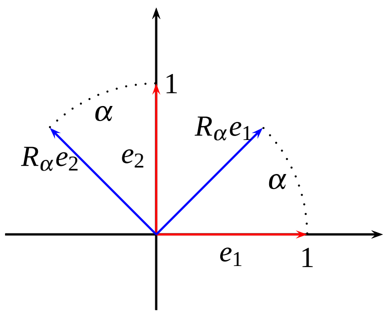
$\square$

Primjer 3.1. Neka su V i W konačnodimenzionalni linearni vektorski prostori, pri čemu je $dim(V) = m$ i $dim(W) = n$ ($m,n \in \mathbb{N}$). Neka je $B_V = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ baza prostora V, a $B_W = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ baza prostora W i neka je $F : V \to W$ linearno preslikavanje. Za proizvoljan v_i ($i \in \{1,2,...,m\}$) njegova slika Fv_i leži u prostoru W, pa postoje jedinstveni koeficijenti $a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{ni} \in \Phi$, takvi da je

$$Fv_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} w_j \ .$$

Označimo sa $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ($1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$) matricu koju dobijemo tako što svaki vektor baze B_V preslikamo preslikavanjem F, a pri tome jedinstveno određene koeficijente postavimo kao kolone matrice A. Za matricu A kažemo da je matrična reprezentacija linearnog operatora F u odnosu na baze B_V i B_W ili jednostavnije to iskazujemo sa time da je A matrica linearnog operatora F.

Iz geometrije znamo da je rotacija linearna transformacija. Ako posmatramo $\mathbb{R}^2$ kao linearan vektorski prostor neka je $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rotacija realne ravni za ugao $\alpha \in [0, 2\pi]$. Neka je $\{e_1, e_2\} = \{(1,0)^T, (0,1)^T\}$ standardna baza u $\mathbb{R}^2$. Tada $R_\alpha e_1$ treba da predstavlja rotirani vektor e_1 , a $R_\alpha e_2$, rotirani vektor e_2 za ugao α. Nije teško vidjeti da vrijedi



Slika 3.1: Rotacija ravni za ugao α

$$R_\alpha e_1 = (\cos\alpha, \sin\alpha)^T \ , \ R_\alpha e_2 = (-\sin\alpha, \cos\alpha)^T \ ,$$

tj. operator rotacije je reprezentovan matricom

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} .$$

Sada za proizvoljan vektor $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, na osnovu reprezentacije linearnih preslikavanja u konačnodimenzionalnim prostorima imamo,

$$R_\alpha x = A\cdot x = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha \\ x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha \end{bmatrix} \qquad \diamondsuit$$

Gornji primjer nam govori da su matrice na konačnodimenzionalnim prostorima ustvari linearna preslikavanja. Tojest vrijedi,

Lema 3.2. *Neka su V i W linearni vektorski prostori dimenzija m i n respektivno i neka su B_V i B_W njihove baze. Neka je $F : V \to W$ linearan operator i $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. Matrica A reprezentuje operator F ako i samo ako je za proizvoljan vektor $x \in V$*

$$Fx = A\cdot x \ .$$

Dokaz : Neka je $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrica linearnog operatora F. Za proizvoljan $x \in V$ neka je $x = (b_1, b_2, ..., b_m)^T$ njegova reprezentacija u bazi B_V. Tada imamo,

$$\begin{aligned} Fx &= F\left(\sum_{j=1}^{m} b_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{m} b_j F v_j \\ &= \sum_{j=1}^{m} b_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_j\right) w_i \ . \end{aligned}$$

Dakle, vektor Fx u bazi B_W ima reprezentaciju

$$Fx = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{1j} b_j, \sum_{j=1}^{m} a_{2j} b_j, ..., \sum_{j=1}^{m} a_{nj} b_j\right)^T = A\cdot x \ .$$

Obratno, neka je B matrica takva da je $Fx = B\cdot x$, za sve $x \in V$ i neka je A matrica operatora F. Birajući vektor $x = (1, 0, ..., 0)^T \in V$, očigledno je prva kolona matrice B jednaka prvoj koloni matrice A. Analogno se utvrđuje jednakost i ostalih kolona, tj. mora vrijediti $B = A$. □

Definicija 3.4. *Neka je $A : X \to Y$ linearan operator. Skup*

$$Ker(A) = \{x \in X \,|\, Ax = 0\} \ ,$$

nazivamo jezgro operatora ili nul-prostor operatora. Skup

$$Rang(A) = \{y \in Y \,|\, (\exists x \in X)\ Ax = y\} \ ,$$

nazivamo rang operatora A.

Osobine injektivnosti i surjektivnosti lagano izražavamo preko novouvedenih skupova. Tako imamo da je linearan operator injektivan ako i samo ako je $Ker(A) = \{0\}$, a surjektivan ako i samo ako je $Rang(A) = Y$. Bijektivnost imamo ako je operator istovremeno i injektivan i surjektivan. Takođe vrijede i sljedeće osobine.

Teorem 3.3. *Neka je $A : X \to Y$ linearan operator. Tada vrijedi:*

1. *$Ker(A)$ je linearni vektorski potprostor od X.*
2. *$Rang(A)$ je linearni vektorski potprostor od Y.*
3. *Ako su X i Y konačnodimenzionalni prostori onda je*

$$dim(X) = dim(Ker(A)) + dim(Rang(A)) \ .$$

Primjer 3.2. Neka je X skup svih polinoma četvrtog stepena, definisanih na $(-1, 1)$, tj. $X = \left\{P_4(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \,|\, a, b, c, d, e \in \mathbb{R}\ ,\ x \in (-1, 1)\right\}$ i analogno $Y = \left\{P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \,|\, a, b, c, d\right.$
Posmatrajmo preslikavanje

$$Du = \frac{du}{dx} = u' \ ,\ u \in X \ .$$

Očigledno je operator D sa X u Y. Za $u, v \in X$ je $D(u+v) = (u+v)' = u' + v' = Du + Dv$. Osim toga je za $u \in X$ i $\lambda \in \Phi$, $D(\lambda u) = (\lambda u)' = \lambda U' = \lambda Du$. Dakle, D je linearan operator sa prostora X u prostor Y.
Kako je izvod konstante 0, to je jezgro ovog operatora skup svih polinoma nultog stepena (konstante),

dakle $Ker(D) \neq \{0\}$, pa operator nije injektivan.
Za proizvoljan polinom trećeg stepena $v(x) = P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, polinom

$$P_4(x) = \int P_3(x)dx = \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + dx + C \in X \ ,$$

te vrijedi $Rang(D) = Y$, tj. operator je surjekcija.
Primjetimo da će preslikavanje $D : C^1[0,1] \to C[0,1] \times \mathbb{R}$, definisano sa

$$Du = \begin{pmatrix} u'(x) \\ u(0) \end{pmatrix} \ ,$$

biti injektivno preslikavanje, šta više bijekcija. $\diamondsuit$

Primjer 3.3. Desni šift operator A_R definisan na $l_\infty(\mathbb{R})$ je operator zadat sa

$$A_R(x) = A_R(x_1, x_2, x_3, ...) = (0, x_1, x_2, x_3, ...) \ , \ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty(\mathbb{R}) \ ,$$

a lijevi šift operator A_L na $l_\infty(\mathbb{R})$ zadat je sa

$$A_L(x) = A_L(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_3, x_4, ...) \ , \ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty(\mathbb{R}) \ .$$

Očigledno je $Ker(A_R) = \{0\}$, a rang operatora je skup svih ograničenih nizova kod kojih je prva koordinata 0,

$$Rang(A_R) = \{x = (0, x_1, x_2, ...) \mid x \in l_\infty(\mathbb{R})\} \ .$$

Jezgro operatora A_L je jednodimenzinalan potprostor

$$Ker(A_L) = \{x = (a, 0, 0, ...) \mid a \in \mathbb{R}\} \ ,$$

a njegov rang je cijeli prostor $l_\infty(\mathbb{R})$.
Dakle, operator A_R jeste injektivan, ali nije surjektivan, dok operator A_L nije injektivan, a jeste surjektivan.
Primjedba: Ovakva situacija nije moguća kod linearnih preslikavanja na konačnodimenzionalnim prostorima. Naime, ako je $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) linearan operator, tada vrijedi: $Ker(A) = \{0\}$ ako i samo ako je $Rang(A) = \mathbb{R}^n$. $\diamondsuit$

Primjer 3.4. *Fredholmov integralni operator* $K : C[0,1] \to C[0,1]$, definisan sa

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y) dy \ ,$$

je linearan operator za proizvoljnu neprekidnu funkciju $k(\cdot,\cdot)$ koju nazivamo jezgro integralnog operatora (Jezgro integralnog operatora nema nikakve veze sa $Ker(K)$). Za ovaj operator kažemo da je *degenerisan* ako mu je jezgro oblika

$$k(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)\psi_i(y) \ ,$$

gdje su $\phi_i, \psi_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da su skupovi $\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\}$ i $\{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n\}$ linearno nezavisni. Tada je rang operatora K konačnodimenzionalan potprostor razapet sa $\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\}$, a jezgro operatora je

$$Ker(K) = \left\{ f \in C[0,1] \mid \int_0^1 f(y)\psi_i(y)dy = 0 \ , \imath = 1, 2, ..., n \right\} \ .$$

Može se pokazati da su i jezgro i rang ovog operatora zatvoreni potprostori od $C[0,1]$. $\diamondsuit$

3.1 Ograničenost i neprekidnost

Definicija 3.5. *Za linearan operator $A : X \to Y$ kažemo da je neprekidan u tački $x_0 \in D_A$ ako i samo ako za svaku okolinu V tačke Ax_0, postoji okolina U tačke x_0, tako da je za svako $x \in U$, $Ax \in V$.*

Ako su X i Y metrički prostori, gornju definiciju iskazujemo sa

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in D_A)(d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(Ax, Ax_0) < \varepsilon) ,$$

a u normiranim prostorima sa

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in D_A)(||x - x_0||_X < \delta \Rightarrow ||Ax - Ax_0||_Y < \varepsilon) .$$

Kažemo da je linearan operator neprekidan na skupu D ako je neprekidan u svakoj tački skupa D.

Za definisanje pojma neprekidnosti možemo koristiti i nizovnu definiciju.

Definicija 3.6. *Za linearan operator $A : X \to Y$ kažemo da je neprekidan u tački $x_0 \in D_A$ ako za proizvoljan niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, takav da $x_n \to x_0$ ($n \to \infty$), vrijedi*

$$Ax_n \to Ax_0 \ , \ (n \to \infty) .$$

Teorem 3.4. *Ako je aditivan operator $A : X \to Y$ neprekidan u jednoj tački domena, onda je on neprekidan na čitavom domenu.*

Dokaz : Neka je $A : X \to Y$ aditivan operator i neka je $x_0 \in D_A$ tačka u kojoj je operator neprekidan. Neka je sada $x \in D_A$ proizvoljan. Uzmimo proizvoljan niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D_A$, takav da $x_n \to x$ ($n \to \infty$). Posmatrajmo niz $(x_n - x + x_0)_{n\in\mathbb{N}} \subset D_A$. Očigledno vrijedi

$$x_n - x + x_0 \to x_0 \ , \ (n \to \infty) ,$$

pa zbog neprekidnosti operatora u tački x_0 imamo

$$A(x_n - x + x_0) \to Ax_0 \ , \ (n \to \infty) .$$

Na osnovu aditivnosti i osobina limesa, sada vrijedi

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} A(x_n - x + x_0) &= \lim_{n\to\infty} (Ax_n - Ax + Ax_0) \\ &= \lim_{n\to\infty} Ax_n - Ax + Ax_0 \\ &= Ax_0 , \end{aligned}$$

iz čega je onda

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax ,$$

tj. operator je neprekidan i u tački x. Zbog proizvoljnosti $x \in D_A$, zaključujemo da je A neprekidan na čitavom skupu D_A. □

Definicija 3.7. *Neka je $A : X \to Y$ linearan operator. Kažemo da je A ograničen linearan operator ako važi*

$$(\exists M > 0)(\forall x \in X) \ ||Ax||_Y \le M||x||_X \ . \tag{3.1}$$

Infimum svih brojeva M za koje važi (3.1) nazivamo norma operatora A i označavamo je sa $||A||_{X\to Y}$ ili jednostavno sa $||A||$, podrazumijevajući djelovanje operatora. Linearan operator je ograničen ukoliko mu je norma konačna i pri tome onda vrijedi

$$(\forall x \in X) \ ||Ax||_Y \le ||A||_{X\to Y} ||x||_X \ .$$

Teorem 3.5. *Neka je $A : X \to Y$ ograničen homogen operator. Tada vrijedi*

$$||A|| = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{||Ax||}{||x||} = \sup_{||x||\leq 1} ||Ax|| = \sup_{||x||=1} ||Ax|| \ .$$

Dokaz : Označimo sa

$$\alpha = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{||Ax||}{||x||} \ .$$

Tada za svako $\varepsilon > 0$, postoji $x' \in X \setminus \{0\}$, takav da je $||Ax'|| / ||x'|| > \alpha - \varepsilon$, tj. $||Ax'|| > (\alpha - \varepsilon) ||x'||$. Na osnovu definicije norme operatora onda imamo $||A|| > \alpha - \varepsilon$, za proizvoljno $\varepsilon > 0$, odnosno $||A|| \geq \alpha$.
Ako bi bilo $||A|| > \alpha$, tada bi za neko $\varepsilon > 0$ vrijedilo $||A|| - \alpha = \varepsilon$. Tada bi iz $\alpha < ||A|| - \varepsilon/2$ imali

$$\frac{||Ax||}{||x||} \leq \alpha < ||A|| - \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

tj. za svako $x \in X \setminus \{0\}$ bi vrijedilo

$$||Ax|| \leq \left(||A|| - \frac{\varepsilon}{2}\right) ||x|| \ .$$

Posljednje nije u saglasnosti sa tim da je norma operatora infimum svih brojeva koji zadovoljavaju (3.1), pa dakle mora vrijediti

$$||A|| = \alpha = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{||Ax||}{||x||} \ .$$

Zbog homogenosti operatora dalje imamo

$$\sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{||Ax||}{||x||} = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \left|\left| A\left(\frac{x}{||x||}\right)\right|\right| = \sup_{||x||=1} ||Ax|| \ .$$

Ostaje još pokazati drugu jednakost. Naime, ako posmatramo samo elemente koji zadovoljavaju $||x|| \leq 1$, tada imamo

$$||A|| = \alpha = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{||Ax||}{||x||} \geq \sup_{||x||\leq 1} \frac{||Ax||}{||x||} \geq \sup_{||x||\leq 1} ||Ax|| \ .$$

Sa druge strane, kako je supremum na većem skupu veći, to vrijedi

$$\sup_{||x||\leq 1} ||Ax|| \geq \sup_{||x||=1} ||Ax|| = ||A|| \ ,$$

pa zaključujemo da mora biti $||A|| = \sup_{||x||\leq 1} ||Ax||$. □

Za linearna preslikavanja vrijedi sljedeća "lijepa" osobina.

Teorem 3.6. *Linearan operator je neprekidan ako i samo ako je ograničen.*

Dokaz : Neka je $A : X \to Y$ neprekidan linearan operator. Pretpostavimo da on nije ograničen. Tada

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n \in X,\ ||x_n|| = 1)\ ||Ax_n|| > n \ .$$

Posmatrajmo sada sljedeći niz,

$$z_n = \frac{x_n}{n} \ , \ n \in \mathbb{N} \ .$$

Za njega vrijedi

$$||z_n|| = \frac{||x_n||}{n} = \frac{1}{n} \to 0 \ , \ n \to \infty \ ,$$

tj. $z_n \to 0$ ($n \to \infty$). Ali tada imamo

$$||Az_n|| = \frac{1}{n}||Ax_n|| \geq 1 \ , \ n \in \mathbb{N} \ ,$$

a to znači da $Az_n \nrightarrow 0$ ($n \to \infty$), što je u suprotnosti sa neprekidnošću operatora.

Neka je sada A ograničen operator, tj. $||A|| < +\infty$. Uzmimo proizvoljno $x \in D_A$ i neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D_A$, takav da $x_n \to x$ ($n \to \infty$). Zbog ograničenosti sada imamo

$$0 \leq ||Ax_n - Ax|| = ||A(x_n - x)|| \leq ||A|| \, ||x_n - x|| \to 0 \ , \ n \to \infty \ .$$

Dakle, A je neprekidan u tački x, pa je prema Teoremi 3.4, on neprekidan operator. □

Teorem 3.7. *Neka je $A : X \to Y$ linearan operator. Operator A je neprekidan ako i samo ako ograničene skupove iz X preslikava u ograničene skupove u Y.*

Dokaz : Neka je $A : X \to Y$ ograničen linearan operator, tj.

$$(\forall x \in X) \ ||Ax|| \leq ||A|| \, ||x|| \ , \ (||A|| < \infty)$$

i neka je $S \subset X$ ograničen skup, tj.

$$(\exists M > 0)(\forall x \in S) \ ||x|| \leq M \ .$$

Označimo sa S' sliku skupa S, $S' = \{Ax | \ x \in S\}$. Za proizvoljno $y \in S'$ tada vrijedi

$$||y|| = ||Ax|| \leq ||A|| \, ||x|| \leq M \, ||A|| = M' < \infty \ ,$$

te je S' ograničen skup.

Neka A slika ograničene skupove u ograničene skupove. Kako je jedinična kugla $K = \{x \in X | \ ||x|| \leq 1\}$, ograničen skup u X, to je i skup

$$AK = \{Ax | \ ||x|| \leq 1\}$$

ograničen u Y, a to znači

$$(\exists M > 0)(\forall y \in AK) \ ||y|| \leq M \ ,$$

odnosno

$$(\exists M > 0)(\forall x \in X, \ ||x|| \leq 1) \ ||Ax|| \leq M \ .$$

Posljednja činjenica nije ništa drugo do ograničenost operatora ili što je ekvivalentno, njegova neprekidnost. □

U ispitivanju ograničenosti proizvoljnog operatora $A : X \to Y$ prvo nastojimo pokazati da za svako $x \in X$ vrijedi $||Ax|| \leq M||x||$, za neko $M > 0$ (po mogućnosti najbolju aproksimaciju), čime ustvari pokažemo ograničenost operatora ($||A|| \leq M$). Pokazati da je $||A|| = M$ znači naći konkretan element $x' \in X$, za koga je $||Ax'|| = M||x'||$. Ovo bi značilo da je $||A|| \geq M$, što sa ranije pokazanim daje ukupno $||A|| = M$.

Primjer 3.5. Linearni operator $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definisan sa $Ax = ax$, gdje je $a \in \mathbb{R}$, je ograničen operator čija je norma $||A|| = |a|$. ♢

Primjer 3.6. Identičko preslikavanje $I : X \to X$, $Ix = x$, je primjer ograničenog linearnog operatora za proizvoljan normiran prostor X i norma mu je $||I|| = 1$.
Ukoliko neki operator ima normu 0, onda to mora biti nuloperator, to jest $\mathbf{0}x = 0$. ♢

Primjer 3.7. Posmatrajmo lijevi i desni shift operator na l_2, tj. preslikavanja $A_L : l_2 \to l_2$ i $A_R : l_2 \to l_2$, zadata sa

$$A_R x = (0, x_1, x_2, \ldots) \ , \ A_L x = (x_2, x_3, x_4, \ldots) \ \text{ za } \ x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in l_2 \ .$$

Oba operatora su očigledno linearna. Pri tome je

$$||A_R x|| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = ||x|| \ ,$$

a odavde je onda $||A_R|| = 1$. Za lijevi shift imamo

$$||A_L x|| = \left(\sum_{i=2}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = ||x|| \ ,$$

tako da je $||A_L|| \leq 1$. Ako posmatramo specijalno vektor oblika $x = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \in l_2$, tada je

$$||A_L x|| = \left(\sum_{i=2}^{\infty} |x_{i-1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = ||x|| \ ,$$

te je $||A_L|| = 1$. ♢

U nešto težim primjerima, pretpostavimo da je pokazana ograničenost operatora, to jest za sve $x \in X$ vrijedi $||Ax|| \leq M||x||$. Ako je moguće naći niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, takav da je

$$\frac{||Ax_n||}{||x_n||} \to M \ , \ (n \to \infty) \ ,$$

iz toga onda zaključujemo da je $||A|| = M$.

Primjer 3.8. Posmatrajmo operator $T : L_2(a,b) \to L_2(a,b)$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$), zadat sa

$$Tx(t) = f(t)x(t) \ ,$$

gdje je $f \in C[a,b]$. Linearnost se jednostavno pokazuje, a za ograničenost imamo

$$\begin{aligned} ||Tx|| &= \left(\int_a^b |f(t)x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b |f(t)|^2 |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \max_{a\leq t\leq b} |f(t)| \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \ . \end{aligned}$$

Dakle, $||Tx||_{L_2(a,b)} \leq ||f||_{C[a,b]} ||x||_{L_2(a,b)}$, iz čega onda imamo $||T|| \leq ||f||_{C[a,b]}$.

Kako je f neprekidna funkcija na segmentu $[a,b]$, postoji $c \in [a,b]$ u kojoj funkcija uzima maksimalnu vrijednost (ne gubeći na opštosti, neka je $c \in (a,b)$). Za $n \in \mathbb{N}$, posmatrajmo funkcije

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad |t-c| < \frac{1}{n} \\ 0 & ; \quad \text{inače} \end{cases}$$

Tada imamo

$$\frac{||Tx_n||}{||x_n||} = \frac{n}{2} \left(\int_{c-\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \to |f(c)| \ , \ (n \to \infty) \ ,$$

zato što je f neprekidna funkcija. Iz ovoga onda zaključujemo da je

$$||T|| = |f(c)| = \max_{a\leq t\leq b} |f(t)| = ||f||_{C[a,b]} \ . \qquad \diamondsuit$$

Primjer 3.9. Neka je $X = C[0,1]$ sa standardnom normom. Posmatrajmo operator $K : X \to X$, definisan sa

$$Kf(x) = \int_0^x f(t)dt \ .$$

Integralni operator sa promjenljivom granicom se naziva *Volterrin integralni operator*. Za njega vrijedi

$$||Kf|| = \sup_{0\le x\le 1}\left|\int_0^x f(t)dt\right| \le ||f|| \sup_{0\le x\le 1}\int_0^x dt = ||f|| \ .$$

Dakle, $||K|| \le 1$ te je K ograničen linearan operator. Šta više, za izbor konstantne funkcije $f_0(x) = 1$, ta norma se i dostiže, to jest $||K|| = 1$. Rang ovog operatora je skup neprekidno diferencijabilnih funkcija na $[0,1]$ koje se anuliraju za $x = 0$, $C_0^1[0,1]$. On jeste linearan vektorski potprostor od $C[0,1]$, ali zbog toga što nije zatvoren skup ($C_0^1[0,1] \subset C[0,1]$ i posmatramo indukovanu normu sa $C[0,1]$), on nije Banachov potprostor. Nedostatak zatvorenosti se ima zbog efekta ”glatkosti” operatora K, koji neprekidne funkcije slika u diferencijabilne funkcije (integral povećava glatkost funkcije) $\diamondsuit$

Primjer 3.10. Na osnovu Leme 3.2, linearna preslikavanja na konačnodimen-zionalnim prostorima su reprezentovana matricama i uobičajeno sa A označa-vamo i linearno preslikavanje i njemu korespondiranu matricu.
Različite norme na $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ inudukivat će i različite norme matrice koja reprezentuje linearni operator. Neka je $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearan operator i neka je norma $||x||_2^2 = x^T \cdot x = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_k|^2$ ($k \in \mathbb{N}$). Na osnovu definicije norme operatora, normu možemo izračunati maksimizacijom veličine $||Ax||_2^2$ na jediničnoj sferi $||x||_2^2 = 1$. Dakle, u pitanju je uslovna ekstremizacija, čija je Lagrangeova funkcija

$$f(x,\lambda) = (Ax)^T \cdot Ax - \lambda(x^T \cdot x - 1) \ ,$$

gdje je λ Lagrangeov multiplikator. Računajući gradijent funkcije f i izjednačavajući ga sa 0, $\nabla f = 0$, dobijamo da mora vrijediti uslov

$$A^T \cdot A \cdot x = \lambda x \ . \tag{3.2}$$

Vidimo da je x svojstveni vektor matrice $A^T \cdot A$ i da je λ odgovarajuća svojstvena vrijednost. Pri tome je $A^T \cdot A$ matrica formata $n \times n$ koja ima konačno mnogo realnih, nenegativnih svojstvenih vrijednosti. Množeći (3.2) sa x^T sa lijeve strane dobijamo uslov

$$x^T A^T Ax = (Ax)^T \cdot Ax = \lambda x^T \cdot x \ ,$$

ili što je isto $||Ax||_2^2 = \lambda ||x||_2^2$, a kako je $||x||_2 = 1$ zaključujemo da je $||Ax||_2^2 = \lambda$. Dakle, maksimalna vrijednost od $||Ax||_2^2$ predstavlja maksimalnu svojstvenu vrijednost matrice $A^T \cdot A$. Ako sa $r(B)$ označimo najveću apsolutnu vrijednost svojstvenih vrijednosti operatora B (*spektralni radijus*), onda Euclidsku normu matrice A možemo zadati sa

$$||A||_2 = \sqrt{r(A^T \cdot A)} \ . \tag{3.3}$$

Ako koristimo maksimum normu, $||x||_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$, zbog

$$A \cdot x = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j\right)^T \ ,$$

imamo da je

$$
\begin{aligned}
||Ax||_\infty &\leq \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \\
&\leq \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \max_{1\leq j\leq n} |x_j| \\
&= \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot ||x||_\infty \ .
\end{aligned}
$$

Dakle, $||Ax||_\infty \leq \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. Pretpostavimo da se maksimum desne strane dogodi za $i = i_0$. Birajući $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tako da su mu koordinate $x_j = sgn(a_{i_0 j})$, imamo da je $||x_0||_\infty = 1$ i

$$
||Ax_0|| = |a_{i_0 1}| + |a_{i_0 2}| + \cdot + |a_{i_0 n}| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}| \ .
$$

Kako je $||A||_\infty \geq ||Ax_0||$, zaključujemo da je norma operatora data sa

$$
||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ .
$$

Sličnom argumentacijom bi za izbor norme $||x||_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k|$, dobili da je

$$
||A||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \ .
$$

Primjedba: Može se pokazati da je za proizvoljno $1 < p < \infty$ zadovoljeno $||A||_p \leq ||A||_1^{\frac{1}{p}} ||A||_\infty^{1-\frac{1}{p}}$.

Primjedba: Svaka od gore navedenih normi matričnog operatora je proizašla iz pretpostavljenih normi na domenu i kodomenu preslikavanja. Međutim, postoje norme ovih opertatora koje nisu pridružene niti jednoj normi na $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$. Takav primjer je Hilbert-Schmidt norma

$$
||A|| = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ . \qquad \diamondsuit
$$

Primjer 3.11. U Primjeru 3.4 smo posmatrali Fredholmov integralni operator $K : C[0,1] \to C[0,1]$, definisan sa

$$
Kf(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y) dy \ ,
$$

gdje je jezgro $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. To je ograničen linearana operator sa normom

$$
||K|| = \max_{0\leq x\leq 1} \int_0^1 k(x,y) dy \ .
$$

Ovo na neki način predstavlja analogon maksimalnoj sumi po vrstama kod ∞-norme za matrične operatore. $\diamondsuit$

Linearna preslikavanja na konačnodimenzionalnim prostorima su obavezno ograničena ili ekvivalentno, neprekidna. Međutim, na beskonačnodimenzio-nalnim prostorima to nije uvijek slučaj.

Primjer 3.12. Neka je $X = C^{\infty}[0,1]$ (skup funkcija definisanih na $[0,1]$ koje imaju neprekidan izvod bilo kog reda) sa supremum normom. X jeste normiran prostor ali nije Banachov prostor jer nije kompletan. Posmatrajmo *operator diferenciranja* $D : X \to X$, $Du = u'$. On jeste linearan operator, ali nije neprekidan. Zaista, posmatrajmo funkcije $f_n(x) = e^{nx}$. Kako je $Df_n(x) = ne^{nx}$, jasno je da će tada vrijediti

$$\frac{||Df_n||}{||f_n||} = n \ ,$$

a desnu stranu gornje jednakosti možemo učiniti po volji velikom, te operator D ne može biti ograničen.
Jedna od fundamentalnih teškoća primjenjene matematike upravo je neograničenost operatora diferenciranja. ♢

Naredna tvrdnja nalazi mnoge primjene, a govori o "produženju" linearnog ograničenog operatora

Teorem 3.8. ***(Ograničena linearna transformacija)*** *Neka je X normiran prostor i Y Banachov prostor. Ako je M svuda gust potprostor od X i ako je $A : M \to Y$ ograničen linearan operator, tada postoji jedinstven ograničen linearan operator $\overline{A} : X \to Y$, takav da je $\overline{A}x = Ax$ za sve $x \in M$ i $||\overline{A}|| = ||A||$.*

Dokaz : Za svako $x \in X$ postoji $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$, takav da $x_n \to x$ kad $n \to \infty$. Definišimo preslikavanje

$$\overline{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n \ . \tag{3.4}$$

Y je kompletan prostor, a $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyjev niz jer je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz i A je ograničen operator na M, pa zaključujemo da gornji limes postoji za svako $x \in X$.
Neka su $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dva različita niza koji konvergiraju ka $x \in X$. Na osnovu relacije trougla je

$$||x_n - x'_n|| \le ||x_n - x|| + ||x - x'_n|| \ ,$$

pa puštajući da n teži ka ∞ imamo

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - x'_n|| = 0 \ .$$

A je ograničen operator na M pa vrijedi

$$||Ax_n - Ax'_n|| \le ||A|| \cdot ||x_n - x'_n|| \to 0 \ (n \to \infty) \ .$$

Dakle, nizovi $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(Ax'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiraju ka istoj vrijednosti, te granični proces (3.4) ne ovisi o izboru niza. Ovim potvrđujemo da je preslikavanje $\overline{A}$ dobro definisano.
Linearnost operatora $\overline{A}$ slijedi iz linearnosti operatora A. Za $x \in M$, birat ćemo konstantni niz $x_n = x$ ($n \in \mathbb{N}$), te je očigledno $\overline{A}x = Ax$ za $x \in M$.
Ograničenost operatora $\overline{A}$ slijedi iz nejednakosti

$$||\overline{A}x|| = \lim_{n\to\infty} ||Ax_n|| \le \lim_{n\to\infty} ||A|| \, ||x_n|| = ||A|| \, ||x|| \ ,$$

tojest $||\overline{A}|| \le ||A||$ i činjenice da je $\overline{A}x = Ax$ za $x \in M$. Dakle, $||\overline{A}|| = ||A||$.

Ostaje još pokazati jedinstvenost ovakvog operatora $\overline{A}$. Neka je i $\widetilde{A}$ još jedno preslikavanje sa datim osobinama. Za proizvoljno $x \in X$ neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u M koji konvergira ka x. Tada je

$$\widetilde{A}x = \widetilde{A}(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{A}x_n = \lim_{n\to\infty} \overline{A}x_n = \overline{A}x \ .$$

dakle, $\widetilde{A} = \overline{A}$. □

I naredno tvrđenje govori o produženju operatora, a na određen način je upštije od tvrdnje Teorem 3.8. Naime, ograničen linearan operator često je definisan na potprostoru nekog šireg prostora, a bilo bi poželjno proširiti domen tog oparatora bez promjene norme operatora.

Teorem 3.9. *(**Teorem o produženju**) Neka je X normiran prostor i neka je $\overline{X}$ njegovo kompletiranje. Neka je Y Banachov prostor i $A : X \to Y$ ograničen linearan operator. Tada postoji jedinstven $\overline{A} : \overline{X} \to Y$ takav da je $\overline{A}x = Ax$ za sve $x \in X$ i $||\overline{A}|| = ||A||$.*

Dokaz ove činjenice je u potpunosti analogan dokazu Teorem 3.8. Operator $\overline{A}$ uveden u gornjoj tvrdnji nazivamo produženje operatora A. Kao što rekosmo, česte su situacije u kojima je primjena ovakvog teorema od velike koristi. Naime, ako radimo sa linearnim ograničenim operatorom definisanim na normiranom prostoru koji nije kompletan, a kako nam je kompletnost esencijalna za mnoge karakteristike, ovo tvrđenje nam dozvoljava ”dodefinisati” operator na širi prostor od startnog, koji je kompletan, tako da operator zadrži sve karakteristike sa startnog prostora i norma mu se ne promjeni na širem porstoru.

3.1.1 Skup ograničenih linearnih operatora

Skup svih ograničenih linearnih operatora koji djeluju sa prostora X u prostor Y označavat ćemo sa $\mathscr{L}(X,Y)$,

$$\mathscr{L}(X,Y) = \{A : X \to Y \mid A \text{ ograničen i linearan } \} .$$

Specijalno, ako je $X = Y$ koristit ćemo oznaku $\mathscr{L}(X)$. Na $\mathscr{L}(X,Y)$ možemo definisati operacije sabiranja i množenja skalarom. Neka su $A, B \in \mathscr{L}(X,Y)$ i neka je $\lambda \in \Phi$. Za $x \in X$ definišemo

$$(A+B)x \stackrel{def}{=} Ax + Bx \ , \ (\lambda A)x \stackrel{def}{=} \lambda Ax \ .$$

Pri tome je $D_{A+B} = D_A \cap D_B$ i $D_{\lambda A} = D_A$.

Neka su $x, y \in X$ i $\lambda, \mu, \alpha \in \Phi$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
(A+B)(\lambda x + \mu y) &= A(\lambda x + \mu y) + B(\lambda x + \mu y) \\
&= \lambda Ax + \mu Ay + \lambda Bx + \mu By \\
&= \lambda (A+B)x + \mu (A+B)y \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha A(\lambda x + \mu y) &= \alpha(\lambda Ax + \mu Ay) \\
&= \alpha\lambda Ax + \alpha\mu Ay \\
&= \lambda (\alpha A)x + \mu (\alpha A)y \ .
\end{aligned}$$

Dakle, $A+B$ i αA su linearni operatori. Osim toga vrijedi

$$||(A+B)x|| = ||Ax + Bx|| \leq ||Ax|| + ||Bx|| \leq (||A|| + ||B||)\, ||x|| \ , \ x \in X \ ,$$

i

$$||(\alpha A)x|| \leq |\alpha|\, ||A||\, ||x|| \ ,$$

pa zaključujemo da su oni i ograničeni operatori, tj. $A+B, \alpha A \in \mathscr{L}(X,Y)$, čime smo pokazali da je $\mathscr{L}(X,Y)$ linearan vektorski prostor. Šta više, vrijedi

Teorem 3.10. *Neka je X proizvoljan normiran prostor i Y Banachov prostor. $\mathscr{L}(X,Y)$ je Banachov prostor.*

Dokaz : Već smo pokazali da je $\mathscr{L}(X,Y)$ linearan vektorski prostor. Kako je svaki $A \in \mathscr{L}(X,Y)$ ograničen operator, onda je veličina

$$||A|| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{||Ax||}{||x||} \ , \tag{3.5}$$

dobro definisana. Pri tome vrijedi:

1. $0 \leq ||A|| = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{||Ax||}{||x||} < +\infty$.

2.

$$\begin{aligned} ||A|| = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 0 = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{||Ax||}{||x||} \geq \frac{||Ax||}{||x||} \ , \ x \in X \setminus \{0\} \\ &\Leftrightarrow \quad ||Ax|| \leq 0 \ , \ x \in X \setminus \{0\} \\ &\Leftrightarrow \quad ||Ax|| = 0 \ , \ x \in X \setminus \{0\} \\ &\Leftrightarrow \quad Ax = 0 \ , \ x \in X \setminus \{0\} \\ &\Leftrightarrow \quad A \equiv 0 \ . \end{aligned}$$

3. Za $\lambda \in \Phi$,

$$\begin{aligned} ||\lambda A|| &= \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{||(\lambda A)x||}{||x||} = |\lambda| \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{||(\lambda A)x||}{||\lambda x||} \\ &= |\lambda| \sup_{y\in X\setminus\{0\}} \frac{||Ay||}{||y||} = |\lambda|\,||A|| \ . \end{aligned}$$

4. $||(A+B)x|| \leq (||A||+||B||)\,||x||$ tojest,

$$||A+B|| \leq ||A|| + ||B|| \ .$$

Dakle, sa (3.5) je definisana norma na $\mathscr{L}(X,Y)$, te je $\mathscr{L}(X,Y)$ normiran prostor.
Neka je sada $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}(X,Y)$, proizvoljan Cauchyjev niz tojest, neka vrijedi

$$||A_n - A_m|| \to 0 \ , \ n,m \to \infty \ .$$

Tada za proizvoljan $x \in X$ imamo

$$||A_n x - A_m x|| \leq ||A_n - A_m||\,||x|| \to 0 \ , \ n,m \to \infty \ ,$$

odnosno, za svaki $x \in X$, niz $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ je Cauchyjev niz. Zbog kompletnosti prostora Y, ovi nizovi su konvergentni. Označimo sa

$$A_0 x = \lim_{n\to\infty} A_n x \ , \ x \in X \ .$$

Neka su $x,y \in X$ i $\alpha,\beta \in \Phi$ proizvoljni. Tada,

$$\begin{aligned} A_0(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n\to\infty} A_n(\alpha x + \beta y) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\alpha A_n x + \beta A_n y) \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} A_n x + \beta \lim_{n\to\infty} A_n y \\ &= \alpha A_0 x + \beta A_0 y \ , \end{aligned}$$

pa je A_0 linearan operator. Iz cauchyjevosti niza $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ imamo

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n,m \in \mathbb{N}) \left(n,m \geq n_0 \Rightarrow ||A_n - A_m|| < \frac{\varepsilon}{2} \right) \ .$$

Ako je $x \in X$, $||x|| \le 1$, onda za $n,m \ge n_0$ vrijedi

$$||(A_n - A_m)x|| \le ||A_n - A_m|| < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Držimo li n fiksnim, a pustimo da m teži u beskonačnost, dobijamo iz posljednjeg

$$||(A_n - A_0)x|| \le \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

ili

$$\sup_{||x|| \le 1} ||(A_n - A_0)x|| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \ .$$

Dakle, za svako $n \ge n_0$, operator $A_n - A_0$ je ograničen, pa kako su i A_n ograničeni operatori, takav mora biti i operator A_0 odnosno, $A_0 \in \mathscr{L}(X,Y)$. Osim toga iz gornjeg imamo

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})(n \ge n_0 \Rightarrow ||A_n - A_0|| < \varepsilon) \ ,$$

što ne znači ništa drugo nego da $A_n \to A_0$ ($n \to \infty$), tj. niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan u $\mathscr{L}(X,Y)$ odnosno, $\mathscr{L}(X,Y)$ je kompletan prostor. Iz svega rečenog imamo da je $\mathscr{L}(X,Y)$ Banachov prostor. $\square$

U dokazu gornje teoreme smo koristli konvergenciju niza operatora u operatorskoj normi na $\mathscr{L}(X,Y)$.

Definicija 3.8. *Neka je niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}(X,Y)$ i $A \in \mathscr{L}(X,Y)$. Ako*

$$||A_n - A|| \to 0 \ \ kada \ \ n \to \infty$$

tada kažemo da niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformna konvergira ka A i ovu vrstu konvergencije operatora nazivamo uniformna konvergencija.

Uniformna konvergencija diktirana je topologijom na $\mathscr{L}(X,Y)$ koja je indukovana standardnom normom na $\mathscr{L}(X,Y)$. Ova topologija (uniformna topologija) u opštem slučaju nije jaka topologija. Šta više, kad god je X beskonačnodimenzionalan prostor jaka topologija na $\mathscr{L}(X,Y)$ je različita od topologije indukovane normom na $\mathscr{L}(X,Y)$.

Primjer 3.13. Neka je $X = C[0,1]$. Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $K_n : X \to X$ definisan sa,

$$K_n f(x) = \int_0^1 xy^n f(y)dy \ .$$

Za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ je $K_n \in \mathscr{L}(X,X)$ i pri tome vrijedi $K_n \to 0$ ($n \to \infty$) jer je

$$||K_n f(x)|| \le \max_{y\in[0,1]} |f(y)| \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 xy^n dy = ||f|| \cdot \frac{1}{n+1} \to 0 \ , \ n \to \infty \ .$$

Možemo posmatrati i generalni slučaj. Neka su $k_n(x,y)$ neprekidne funkcije na $[0,1] \times [0,1]$ i neka su njima definisani operatori

$$K_n f(x) = \int_0^1 k_n(x,y) f(y)dy \ .$$

Ako $\max_{x\in[0,1]} \int_0^1 k_n(x,y)dy \to 0$ ($n \to \infty$), tada će niz $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergirati ka nul-operatoru. $\diamondsuit$

Definicija 3.9. *Neka je niz* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}(X,Y)$ *i* $A \in \mathscr{L}(X,Y)$. *Ako je*

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax \ \text{ za svako } x \in X \ ,$$

kažemo da niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jako konvergira ka A i ovu konvergenciju operatora nazivamo jaka konvergencija.*

Jaka konvergencija operatora je u stvari konvergencija po tačkama, u odnosu na normu u prostoru Y. Uniformna i jaka konvegrencija vektora u Banachovom prostoru su jednoteista stvar, dok kod operatora na Banachovim prostorima to su dva različita pojma. Uniformna konvergencija je jača od jake konvergencije.

Teorem 3.11. *Ako niz operatora* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uniformno konvergira ka operatoru A tada on i jako konvergira ka operatoru A.*

Primjer 3.14. Posmatrajmo projektivna preslikavanja P_n na prostoru l_2. Dakle, $P_n : l_2 \to l_2$ i definisan je sa

$$P_n(x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1},...) = (x_1,x_2,...,x_n,0,0,...) \ .$$

Za $n,m \in \mathbb{N}$ i $n \neq m$ imamo $||P_n - P_m|| = 1$ te dakle niz $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nije uniformno konvergentan. S druge strane, za proizvoljan $x \in l_2$ je $P_n x \to x$ $(n \to \infty)$ tojest, niz $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira jako ka identičkom opeeratoru I. ♢

Primjer 3.15. Za $n \in \mathbb{N}$ posmatrajmo preslikavanja $T_n : C[0,1] \to \mathbb{R}$, definisana sa

$$T_n f = \int_0^1 \sin(n\pi x) f(x)dx \ .$$

Neka je $p = p(x)$ proizvoljan polinom. Koristeći se parcijalnom integracijom imamo

$$T_n p = \frac{p(0) - \cos(n\pi)p(1)}{n\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos(n\pi x)p'(x)dx \ .$$

Puštajući da $n \to \infty$, jasno je da $T_n p \to 0$, za proizvoljan polinom p. Neka je sada $f \in C[0,1]$ proizvoljna. Prema Weierstrassovom teoremu, za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji polinom p, takav da je $||f - p|| < \frac{\varepsilon}{2}$, a prema pokazanom, postojat će i $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq n_0$ će biti $|T_n p| < \frac{\varepsilon}{2}$. Kako je $||T_n|| \leq 1$ za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$, onda je

$$|T_n f| = |T_n f - T_n p + T_n p| \leq ||T_n|| \cdot ||f - p|| + |T_n p| < \varepsilon \ .$$

Zajključujemo da će vrijediti $T_n f \to 0$ $(n \to \infty)$, za proizvoljno $f \in C[0,1]$ tojest, niz $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira jako ka nul-operatoru.

Ako specijalno izaberemo funkcije $f_n(x) = \sin n\pi x \in C[0,1]$, za koje je $||f_n|| = 1$ i $|T_n f| = \frac{1}{2}$, jasno je da tada vrijedi $||T_n|| \geq \frac{1}{2}$ (provjeriti da je zaista $||T_n|| = \frac{2}{\pi}$) te očigledno ovaj niz operatora nije uniformno konvergentan. ♢

Kompozicija linearnih operatora je takođe linearan operator. Šta više, kompozicija ograničenih operatora je ograničen operator.

Teorem 3.12. *Neka su* X,Y *i* Z *normirani prostori i neka je* $A \in \mathscr{L}(X,Y)$ *i* $B \in \mathscr{L}(Y,Z)$. *Tada je* $BA \in \mathscr{L}(X,Z)$ *i vrijedi*

$$||BA|| \leq ||A|| \cdot ||B|| \ .$$

Dokaz : Za proizvoljno $x \in X$, zbog ograničenosti operatora A i B imamo

$$||(BA)x|| = ||B(Ax)|| \leq ||B|| \cdot ||Ax|| \leq ||B|| \cdot ||A|| \cdot ||x|| \ .$$

Odavde je očigledno $||BA|| \leq ||A|| \cdot ||B||$. □

Kao posljedicu gornje tvrdnje imamo da za proizvoljne $A \in \mathscr{L}(X,X)$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi, $||A^n|| \leq ||A||^n$. Dakle, u opštem slučaju ne vrijedi jednakost norme kompozicije i proizvoda normi. Naime, neka su $A, B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadata matricama

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} .$$

Euklidske norme ovih matrica su $||A|| = |\lambda|$, $||B|| = |\mu|$, dok je $||AB|| = ||BA|| = 0$, te za $\lambda, \mu \neq 0$ očigledno vrijedi $||BA|| < ||A|| \cdot ||B||$.

Linearan vektorski prostor na kome je definisano množenje naziva se *algebra*. Kompozicija operatora definiše produkt na prostoru $\mathscr{L}(X,X)$, te dati prostor predstavlja algebru. Kako je kompozicija preslikavanja asocijativna $(AB)C = A(BC)$, to je $\mathscr{L}(X,X)$ asocijativna algebra, ali ne i komutativna jer u opštem slučaju ne vrijedi $AB = BA$.

3.1.2 Primjene operatorske konvergencije

Iskoristimo pojam operatorske konvergencije za definisanje eksponencijalne funkcije sa operatorskim eksponentom. Neka je $A : X \to X$ ograničen linearan operator na Banachovom prostoru X. Po analogiji za razvoj eksponencijalne funkcije u McLaurinov red, stavimo

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots \tag{3.6}$$

Stavljajući specijalno $||A||$ umjesto A u gornjoj jednakosti, dobijamo običan numerički red

$$e^{||A||} = 1 + ||A|| + \frac{1}{2!}||A||^2 + \frac{1}{3!}||A||^3 + \cdots + \frac{1}{n!}||A||^n + \cdots ,$$

koji je konvergentan za proizvoljno $||A|| < \infty$, a što onda znači da je red na desnoj strani u (3.6) apsolutno konvergentan na $\mathscr{L}(X)$, a time i konvergentan. Šta više, vidimo da vrijedi

$$||e^A|| \leq e^{||A||} .$$

Ako operatori A i B komutiraju, onda množenjem i rearanžiranjem sume u eksponencijalnom razvoju nam daju da vrijedi

$$e^A e^B = e^{A+B} .$$

Rješenje Cauchyjevog problema za linearnu, skalarnu običnu diferencijalnu jednačinu $x_t = ax$, sa polaznim uslovom $x(0) = x_0$, dato je sa $x(t) = x_0 e^{at}$.
Ovaj rezultat možemo generalizovati na linearni sistem ovakvih jednačina tojest,

$$x_t = Ax\ ,\ x(0) = x_0 \tag{3.7}$$

gdje je $x : \mathbb{R} \to X$, X Banachov prostor i $A : X \to X$ ograničen linearan operator. Ne toliko očigledno, ali očekivano će rješenje problema (3.7) biti $x(t) = e^{tA}x_0$. To imamo zbog sljedećeg,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{tA} &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h}\right) \\ &= e^{tA}\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{hA} - I}{h}\right) \\ &= e^{tA}\lim_{h\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}A^n h^n \\ &= Ae^{tA} . \end{aligned}$$

Kao važan specijalan slučaj gornjeg rezultata imamo konačne linearne sisteme ODE, gdje je $X = \mathbb{R}^n$, a A kvadratna matrica formata $n \times n$.

Primjer 3.16. Neka je $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija i K integralni operator

$$Ku(x) = \int_0^1 k(x,y)u(y)dy \ .$$

Rješenje problema,

$$u_t(x,t) + \lambda u(x,t) = \int_0^1 k(x,y)u(y,t)dy \ , \ u(x,0) = u_0(x) \ ,$$

za $u(\cdot,t) \in C[0,1]$ je $u = e^{(K-\lambda I)t}u_0$ ♢

Jednoparamatarska familija operatora $T(t) = e^{tA}$ se naziva *tok* evolucione jednačine (3.7). Operator $T(t)$ preslikava rješenje koje imamo u trenutku 0 u rješenje koje imamo u vremenskom trenutku t. Za ovu familiju vrijede naredne tvrdnje.

Teorem 3.13. *Neka je $A : X \to X$ ograničen linearan operator i neka je $T(t) = e^{tA}$ za $t \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

1. $T(0) = I$.
2. $T(s)T(t) = T(s+t)$.
3. $T(t) \to I$ *uniformno kada* $t \to 0$.

Proizvoljna jednoparametarska familija $\{T(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ koja zadovoljava 1., 2. i 3. gornje teoreme, naziva se jednoparametarska *uniformno neprekidna grupa*. Osobine 1. i 2. impliciraju da ovakvi operatori formiraju komutativnu grupu u odnosu na kompoziciju, dok osobina 3. znači da $T : \mathbb{R} \to \mathscr{L}(X)$ je neprekidno preslikavanje u odnosu na norma topologiju na $\mathscr{L}(X)$ u tački $t = 0$. Osobine grupe impliciraju da je T uniformno neprekidna na $\mathbb{R}$ tojest, $||T(t) - T(t_0)|| \to 0$ kada $t \to t_0$, za svako $t_0 \in \mathbb{R}$.

Svaka jednoparametarska uniformno neprekidna grupa operatora može biti zapisana u formi $T(t) = e^{tA}$, za pogodan operator A, koga onda nazivamo *generator grupe*. Generatora ovakve grupe možemo dobiti izračunavajući

$$A = \lim_{t\to 0} \frac{T(t) - I}{t} \ .$$

Mnoge linearne parcijalne diferencijalne jednačine predstavljaju evolucione jednačine oblika (3.7), gdje je A neograničen operator. Pod određenim uslovima na operator A, postoji rješenje familije $T(t)$, koje je moguće definisano samo za $t \geq 0$ i koje je strogo neprekidno po t, radije nego uniformno neprekidno. Za ovakvu familiju onda kažemo da predstavlja C_0-semigrupu (primjer za ovo je jednačina toplote).

Kao drugi primjer gdje koristimo operatorsku konvergenciju navodimo numeričku analizu.
Neka su X i Y Banachovi prostori i $A : X \to Y$ nesingularan linearni operator. Za zadato $f \in Y$ posmatrajmo operatorsku jednačinu

$$Au = f \ , \tag{3.8}$$

sa nepoznatom u. Pretpostavimo da možemo aproksimirati jednačinu (3.8) jednačinom

$$A_\varepsilon u_\varepsilon = f_\varepsilon \ , \tag{3.9}$$

čije rješenje u_ε možemo naći na jednostavniji način. Pretpostavljamo da je $A_\varepsilon : X \to Y$ nesingularan linearan operator koji ima ograničen inverz. Familiju jednačina (3.9) nazivamo aproksimaciona šema problema (3.8). Naprimjer, ako je (3.8) diferencijalna jednačina, tada je (3.9) odgovarajuća diferentna šema, gdje je ε mrežna podjela. Jedna od komplikacija može biti da numerička aproksimacija A_ε djeluje na prostoru X_ε koji je različit od X. Zato jednostavnosti radi pretpostavimo da to nije slučaj tojest, da A i A_ε djeluju sa istog prostora X. Primarni zahtjev na aproksimacionu šemu je da je ona konvergentna, što uvodimo definicijom.

Definicija 3.10. *Aproksimaciona šema (3.9) konvergira ka (3.8) ako i samo ako $u_\varepsilon \to u$ ($\varepsilon \to 0$), kada $f_\varepsilon \to f$.*

Ideju da A_ε aproksimira A preciziramo kroz pojam konzistentnosti.

Definicija 3.11. *Aprokismaciona šema (3.9) je konzistentna sa (3.8) ako i samo ako $A_\varepsilon v \to Av$ ($\varepsilon \to 0$), za svako $v \in X$.*

Drugačije rečeno, aproksimaciona šema je konzistentna ako A_ε konvergira jako ka A kada $\varepsilon \to 0$. Konzistentnos nije sama po sebi dovoljna za konvergenciju. Za to nam je potrebna još jedna osobina aproksimacione šeme.

Definicija 3.12. *Aproksimaciona šema (3.9) je stabilna ako i samo ako postoji konstanta M neovisna o ε, takva da je*

$$||A_\varepsilon^{-1}|| \le M\ .$$

Konzistentnost i konvergencija uvezuju operatore A_ε i A, dok je osobina stabilnosti samo vezana za operator A_ε. Stabilnost će igrati krucijalnu ulogu u konvergenciji jer spriječava povećanje greške u aproksimacionom rješenju kada $\varepsilon \to 0$.

Teorem 3.14. *Konzistentna aproksimaciona šema je konvergentna ako i samo ako je stabilna.*

Dokaz : Posmatrajmo problem $Au = f$ i njegovu aproksimativnu šemu $A_\varepsilon u_\varepsilon = f_\varepsilon$ i neka je aproksimaciona šema konzistentna.
Neka je aproksimaciona šema stabilna. Ako na jednakost

$$u - u_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1}(A_\varepsilon u - Au + f - f_\varepsilon)\ ,$$

primjenimo normu i iskoristimo definiciju norme operatora i nejednakost trougla, dobijamo

$$||u - u_\varepsilon|| \le ||A_\varepsilon^{-1}||(||A_\varepsilon u - Au|| + ||f - f_\varepsilon||)\ .$$

Kako $A_\varepsilon u \to Au$ kada $\varepsilon \to 0$ (konzistentnost) i kako je $||A_\varepsilon^{-1}|| \le M$ (stabilonost), zaključujemo da će vrijediti $u \to u\varepsilon$ kad $f_\varepsilon \to f$, a to predstavlja konvergenciju aproksimacione šeme.

Pretpostavimo sada da je aproksimaciona šema konvergentna. Za proizvoljno $f \in Y$ neka je $u_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} f$. Puštajući da $\varepsilon \to 0$ iz konvergencije imamo da je $u_\varepsilon \to u$ tojest, niz (u_ε) je konvergentan, a time i ograničen. Dakle, postoji konstanta M_f neovisna o ε, takva da je $||u_\varepsilon|| = ||A_\varepsilon^{-1} f|| \le M_f$. Teorem o unifromnoj ograničenosti (koga ćemo raditi nešto kasnije) nam tada garantuje da će postojati univerzalna konstanta $M > 0$ takva da je $||A_\varepsilon|| \le M$, a to prdstavlja stabilnost aproksimacione šeme. □

Na žalost, neki ovakav generalni kriterij za konvergenciju aproksimacione šeme ne postoji za nelinearne probleme.

3.2 Inverzni operator

Neka je $A: X \to Y$ linearan operator čiji je domen $D_A \subseteq X$ i kodomen $R_A \subseteq Y$. Ukoliko za svako $y \in R_A$, jednačina $y = Ax$ ima jedinstveno rješenje $x \in D_A$, onda kažemo da postoji inverzno preslikavanje, u oznaci A^{-1}, preslikavanja A i zapisujemo $x = A^{-1}y$. Pri tome je $D_{A^{-1}} = R_A$ i $R_{A^{-1}} = D_A$. Dakle, za postojanje inverznog operatora linearnog operatora $A: D_A \to R_A$, dovoljno je da A bude injektivno preslikavanje. Kao što je pokazano ranije injektivnost je direktno vezana za jezgro operatora. Naime, linearan operator A je injektivan ako i samo ako je $Ker(A) = \{0\}$. Ukoliko je $Ker(A) = \{0\}$ kažemo da je operator nesingularan, u suprotnom je operator singularan.

3.2.1 Opšta teorija o inverznom operatoru

Teorem 3.15. *Ako postoji, inverzni operator linearnog operatora je i sam linearan operator.*

Dokaz : Neka postoji inverzni operator i neka su $y_1, y_2 \in D_{A^{-1}} = R_A$ i $\alpha, \beta \in \Phi$ proizvoljni. Tada postoje jednoznačni $x_1, x_2 \in D_A$, takvi da je $Ax_1 = y_1$ i $Ax_2 = y_2$, a ovo znači i $x_1 = A^{-1}y_1$, $x_2 = A^{-1}y_2$. Sada imamo,

$$\begin{aligned} A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) &= A^{-1}(\alpha Ax_1 + \beta Ax_2) \\ &= A^{-1}A(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ &= \alpha x_1 + \beta x_2 \\ &= \alpha A^{-1}y_1 + \beta A^{-1}y_2 \,. \end{aligned}$$

$\square$

Sljedeće dvije elementarne tvrdnje za inverzni operator navodimo bez dokaza.

Teorem 3.16. *Ako postoji inverzni operator od A, tada je* $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Teorem 3.17. *Neka za operatore A i B postoje inverzni operatori. Tada postoji inverzni operator od $A \circ B$ i vrijedi*

$$(A \circ B)^{-1} = B^{-1} \circ A^{-1} \,.$$

Teorem 3.18. *Neka je $A: X \to Y$ linearan operator. A ima ograničen inverzan operator na R_A ako i samo ako vrijedi*

$$(\exists m > 0)(\forall x \in X) \ ||Ax|| \geq m||x|| \,. \tag{3.10}$$

Pri tome vrijedi $\left|\left|A^{-1}\right|\right| \leq \frac{1}{m}$.

Dokaz : Neka A ima ograničen inverzni operator, tj. neka vrijedi

$$(\exists M > 0)(\forall y \in R_A) \ \left|\left|A^{-1}y\right|\right| \leq M||y|| \,.$$

Kako za svako $y \in R_A$, postoji $x \in D_A$ tako da je $A^{-1}y = x$, gornju činjenicu možemo iskazati i sa

$$(\exists M > 0)(\forall x \in D_A) \ ||x|| \leq M||Ax|| \,,$$

odnosno stavljajući da je $m = \frac{1}{M}$ imamo

$$(\exists m > 0)(\forall x \in D_A) \ ||Ax|| \geq m||x|| \,.$$

Neka sada vrijedi (3.10) pri čemu $A: X \to R_A \subseteq Y$. Neka je $Ax = 0$ za neko $x \in X$. Tada na osnovu (3.10) vrijedi

$$0 = ||Ax|| \geq m||x|| \,,$$

a odavde je onda $||x|| = 0$, te je $x = 0$. Dakle, A ima inverzni operator $A^{-1} : R_A \to X$, pa jednačina $y = Ax$ ima jedinstveno rješenje $x = A^{-1}y$. Na osnovu ovoga, iz (3.10) onda imamo

$$(\exists m > 0)(\forall y \in R_A)\ ||y|| \geq m \left|\left|A^{-1}x\right|\right| \ ,$$

ili

$$(\exists m > 0)(\forall y \in R_A)\ \left|\left|A^{-1}y\right|\right| \leq \frac{1}{m}||y|| \ .$$

Ovo znači da je operator A^{-1} ograničen, a osim toga, prema definiciji ograničenosti operatora, zaključujemo i da vrijedi

$$\left|\left|A^{-1}\right|\right| \leq \frac{1}{m} \ .$$

□

3.2.2 Primjena teorije inverznog oparatora

Teorem o geometrijskom redu

Jedan specijalan slučaj egzistencije inverznog operatora dajamo u sljedećoj tvrdnji, a često se pojavljuje u numeričkoj analizi i primjenjenoj matematici.

Teorem 3.19. ***(Teorem o geometrijskom redu)***
Neka je X Banachov prostor i $A \in \mathscr{L}(X)$ takav da je $||A|| < 1$. Tada je $I - A$ bijekcija na X, njegovo inverzno preslikavanje je ograničen linearan operator za koga vrijedi

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \ \ i \ \ ||(I-A)^{-1}|| \leq \frac{1}{1-||A||} \ .$$

Dokaz : Neka je $n \geq 0$ proizvoljan. Posmatrajmo red $M_n = \sum_{i=0}^{n} A^i$. Za $p \in \mathbb{N}$ proizvoljno vrijedi

$$||M_{n+p} - M_n|| = \left|\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} A^i \right|\right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} ||A^i|| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} ||A||^i \ .$$

Koristeći pretpostavku $||A|| < 1$, zaključujemo

$$||M_{n+p} - M_n|| \leq \frac{||A||^{n+1}}{1-||A||} \ . \tag{3.11}$$

Dakle,

$$\sup_{p\geq 1} ||M_{n+p} - M_n|| \to 0 \ , \ n \to \infty \ ,$$

te je dakle $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u $\mathscr{L}(X)$, a kako je ovaj kompletan prostor, postoji $M \in \mathscr{L}(X)$ takav da

$$M_n \to M \ , \ n \to \infty \ .$$

Koristeći definiciju od M_n, jednostavnim računom se provjerava da vrijedi

$$(I-A) \circ M_n = M_n \circ (I-A) = I - A^{n+1} \ .$$

Puštajući da $n \to \infty$ imamo

$$(I-A) \circ M = M \circ (I-A) = I \ .$$

Gornje znači da je $(I-A)$ bijekcija na X i pri tome je

$$M = (I-A)^{-1} = \lim_{n\to\infty} M_n = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \ .$$

Za proizvoljno $n \geq 0$ je

$$||M_n|| = \left|\left|\sum_{i=0}^{n} A^i\right|\right| \leq \sum_{i=0}^{n} ||A^i|| \leq \sum_{i=0}^{n} ||A||^i \leq \frac{1}{1-||A||} \ .$$

Puštajući da $n \to \infty$ zaključujemo ograničenost operatora M,

$$||M|| = ||(I-A)^{-1}|| \leq \frac{1}{1-||A||} \ .$$

□

Gornji teorem nam govori da pod pretpostavkama teorema, za proizvoljno $y \in X$, jednačina $(I-A)x = y$ ima jedinstveno rješenje $x = (I-A)^{-1}y \in X$. Šta više, ovo rješenje je neprekidno zavisno o $y \in X$. Zaista, ako je $(I-A)x_1 = y_1$ i $(I-A)x_2 = y_2$, tada je

$$x_1 - x_2 = (I-A)^{-1}(y_1 - y_2) \ ,$$

odakle je onda

$$||x_1 - x_2|| \leq C \cdot ||y_1 - y_2|| \ ,$$

gdje je $C = \frac{1}{1-||A||}$. Teorem nam omogućava dobiti i aproksimativno rješenje jednačine $(I-A)x = y$ sa

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \ ,$$

gdje je $x_n = \sum_{i=0}^{n} A^i y$.

Primjer 3.17. Posmatrajmo linearnu integralnu jednačinu drugog reda

$$\lambda u(x) - \int_a^b k(x,y)u(y)dy = f(x) \ , \ a \leq x \leq b \ .$$

Neka su $\lambda \neq 0$, $k(\cdot,\cdot)$ neprekidna funkcija po $x,y \in [a,b]$ i $f \in C[a,b]$. Neka je $X = C[a,b]$ sa standardnom maksimum normom. Gornju jednačinu uobičajeno simbolički zapisujemo u formi

$$(\lambda I - K)u = f \ , \tag{3.12}$$

gdje je K integralni operator generisan jezgrom k,

$$Ku(x) = \int_a^b k(x,y)u(y)dy \ .$$

Jednačinu (3.12) možemo transformisati u jednačinu

$$(I-A)u = \frac{1}{\lambda} f \ ,$$

gdje je $A = \frac{1}{\lambda}K$, čime problem prelazi u domen teorema o geometrijskom redu. Pod pretpostavkom da je

$$||A|| = \frac{1}{|\lambda|}||K|| < 1 \ ,$$

tada postoji $(I-A)^{-1}$ i pri tome je $||(I-A)^{-1}|| \leq \frac{1}{1-||A||}$. Pretpostavka će biti zadovoljena ako je

$$||K|| = \max_{a\leq x\leq b} \int_a^b |k(x,y)|dy < |\lambda| \tag{3.13}$$

i tada možemo tvrditi da će postojati $(\lambda I-K)^{-1}$ i da će biti zadovoljeno

$$||(\lambda I-K)^{-1}|| \leq \frac{1}{|\lambda|-||K||} \ .$$

Dakle, pod pretpostavkom (3.13) za $f\in C[a,b]$, jednačina (3.12) će imati jedinstveno rješenje $u\in C[a,b]$ za koga će vrijediti

$$||u||_\infty \leq ||(\lambda I-K)^{-1}||\cdot||f||_\infty \leq \frac{||f||_\infty}{|\lambda|-||K||} \qquad \diamondsuit$$

Primjetimo da je teorem o geometrijskom redu potpuna generalizacija slučaja realnog geometrijskog reda

$$(1-x)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n \ , \ x\in\mathbb{R} \ , \ |x|<1 \ ,$$

ili kompleksnog slučaja

$$(1-z)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \ , \ z\in\mathbb{C} \ , \ |z|<1 \ .$$

Iz dokaza teorema vidimo da će za $A\in\mathscr{L}(X)$ na Banachovom prostoru X, za $||A||<1$ red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$ konvergirati u $\mathscr{L}(X)$ i to ka ograničenom linearnom operatoru $(I-A)^{-1}$.
Još generalnije, možemo definisati operatorsku funkciju $f(A)$, pomoću realne funkcije f realne promjenljive (ili kompleksne funkcije kompleksne promjenljive) koja je analitička funkcija za $x=0$ tojest, može se razviti u potencijalni red

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \ |x|<\delta \ ,$$

za neko $\delta>0$ i $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, $n\in\mathbb{N}_0$. Sada ako je X Banachov prostor i $A\in\mathscr{L}(X)$, takav da je $||A||<\delta$, možemo definisati

$$f(A)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n \ .$$

Red na desnoj strani je dobro definisan operator iz $\mathscr{L}(X)$ zahvaljujući pretpostavci $||A||<\delta$. Primjeri ovakvih operatorskih funkcija bi bili

$$e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n \ ,$$

$$\sin(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}A^{2n+1} \ ,$$

$$arctg(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}A^{2n+1} \ , \ ||A||<1 \ ,$$

gdje je $A\in\mathscr{L}(X)$, X Banachov prostor.

Generalizacija teorema o geometrijskom redu

Teorem 3.20. *Neka je X Banachov prostor i $A \in \mathscr{L}(X)$. Pretpostavimo da za neko cjelobrojno $m \geq 1$ vrijedi $||A^m|| < 1$. Tada je $(I-A)$ bijekcija na X, njegov inverzni operator je linearan operator za koga vrijedi*

$$||(I-A)^{-1}|| \leq \frac{1}{1-||A^m||}\sum_{i=0}^{m-1}||A^i|| \ .$$

Dokaz : Operator A^m zadovoljava uslove Teorema 3.19, te vrijedi da postoji $(I-A^m)^{-1}$ koji je ograničen linearan operator na X i pri tome je

$$(I-A^m)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty}(A^m)^i \ \text{ u } \ \mathscr{L}(X) \ .$$

Pri tome vrijedi procjena

$$||(I-A^m)^{-1}|| \leq \frac{1}{1-||A^m||} \ .$$

Iz jednakosti

$$(I-A)\circ\left(\sum_{i=0}^{m-1}A^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{m-1}A^i\right)\circ(I-A) = I-A^m \ ,$$

zaključujemo da je $(I-A)$ bijekcija na X, a množenjem posljednjeg sa odgovarajućim inverzima imamo da vrijedi

$$(I-A)^{-1} = \left(\sum_{i=0}^{m-1}A^i\right)\circ(I-A^m)^{-1} \ .$$

Pri tome je

$$\begin{aligned}||(I-A)^{-1}|| &= \left|\left|\left(\sum_{i=0}^{m-1}A^i\right)\circ(I-A^m)^{-1}\right|\right| \leq \left|\left|\left(\sum_{i=0}^{m-1}A^i\right)\right|\right|\cdot||(I-A^m)^{-1}|| \\ &\leq \frac{1}{1-||A^m||}\left(\sum_{i=0}^{m-1}||A^i||\right) \ .\end{aligned}$$

□

Gornji rezultat će nam poslužiti za nalaženje rješenja integralne jednačine Volterrinog tipa drugog reda

$$u(x) - \int_0^x h(x,y)u(y)dy = f(x) \ , \ x \in [0,\beta] \ ,$$

gdje je $\beta > 0$, $h(\cdot,\cdot)$ neprekidna funkcija za $0 \leq y \leq x \leq \beta$ i $f \in C[0,\beta]$. Ako bi smo koristili Teorem 3.19, za egzistenciju i jedinsvenost rješenja polazne jednačine bi nam trebala procjena

$$\max_{0\leq x\leq\beta}\int_0^x |h(x,y)|dy < 1 \ .$$

Međutim, koristeći se Teoremom 3.20 možemo doći do istog na drugačiji način. Polaznu jednačinu posmatrajmo u formi $(I-A)u = f$, gdje je $A : C[0,\beta] \to C[0,\beta]$, linearan ograničen integralni operator, zadat sa

$$Au(x) = \int_0^x h(x,y)u(y)dy \ , \ 0 \leq x \leq \beta \ .$$

Iterirani operator A^k (kompozicija operatora sa samim sobom) ima sljedeću formu

$$A^k u(x) = \int_0^x h_k(x,y)u(y)dy \ ,$$

za $k = 1,2,3,..$, gdje je $h_1(x,y) = h(x,y)$ i pri čemu je

$$h_{k+1}(x,y) = \int_y^x h_k(x,z)h(z,y)dz \ .$$

Iz pretpostavke o neprekidnosti funkcije h imamo njenu ograničenost i neka je

$$M = \max_{0\leq y\leq x\leq \beta} |h(x,y)| \ .$$

Tada je $|h_1(x,y)| \leq M$ za $0 \leq y \leq x \leq \beta$. Pretpostavimo da je za neko cjelobrojno $k \geq 1$ zadovoljeno

$$|h_k(x,y)| \leq M^k \frac{(x-y)^{k-1}}{(k-1)!} \ , \ 0 \leq y \leq x \leq \beta \ .$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} |h_{k+1}(x,y)| &\leq \int_y^x |h_k(x,z)h(z,y)|dz \\ &\leq M^{k+1} \int_y^x \frac{(x-z)^{k-1}}{(k-1)!} dz \\ &= M^{k+1} \frac{(x-y)^k}{k!} \ . \end{aligned}$$

Sada za proizvoljno $k \geq 1$ i proizvoljno $x \in [0,\beta]$ imamo

$$\begin{aligned} |A^k u(x)| &\leq \int_0^x |h_k(x,y)||u(x)|dx \\ &\leq \int_0^x M^k \frac{(x-y)^{k-1}}{(k-1)!} dy \cdot ||u||_\infty \\ &= M^k \frac{x^k}{k!} \cdot ||u||_\infty \ , \end{aligned}$$

iz čega zaključujemo da je

$$||A^k|| \leq M^k \frac{\beta^k}{k!} \ , \ k = 1,2,3,...$$

Jasno je sada da će za dovoljno veliko k biti zadovoljeno $||A^k|| < 1$ te je zadovoljen uslov Teorema 3.20, iz čega onda dobijamo informaciju o ograničenosti operatora $(I-A)^{-1}$, a time i ograničenja za rješenje polazne integralne jednačine.

Perturbaciona metoda

Jedna važna tehnika u primjenjenoj matematici bazira se na zamjeni polazne jednačine njoj "bliskom" jednačinom za koju imamo egzistenciju rješenja. Važan alat u toj tehnici je sljedeći teorem o perturbaciji.

Teorem 3.21. *Neka su X i Y normirani prostori od kojih je bar jedan kompletan i neka je $L \in \mathscr{L}(X,Y)$ koji ima ograničen inverzan operator $L^{-1} : Y \to X$. Neka je $A \in \mathscr{L}(X,Y)$ koji zadovoljava*

$$||A-L|| < \frac{1}{||L^{-1}||} \ .$$

Tada je A bijektivno preslikavanje na X, $A^{-1} \in \mathscr{L}(Y,X)$ i vrijedi

$$||A^{-1}|| \leq \frac{||L^{-1}||}{1-||L^{-1}||\cdot||A-L||} \ . \tag{3.14}$$

Šta više, vrijedi

$$||A^{-1}-L^{-1}|| \leq \frac{||L^{-1}||^2\cdot||A-L||}{1-||L^{-1}||\cdot||A-L||}\ . \tag{3.15}$$

Za rješenja jednačina $Lx_1 = f$ i $Ax_2 = f$ tada vrijedi procjena,

$$||x_1-x_2|| \leq ||A^{-1}||\cdot||(A-L)x_1||\ . \tag{3.16}$$

Dokaz : Neka je $A\in\mathscr{L}(X,Y)$ takav da $||A-L|| < \frac{1}{||L^{-1}||}$. Ukoliko je Y kompletan prostor izrazimo ovaj operator sa $A=(I-(L-A)\circ L^{-1})\circ L$, a ukoliko je X kompletan onda stavimo $A=L\circ(I-L^{-1}\circ(L-A))$. Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je Y kompletan prostor. Tada je operator $(L-A)\circ L^{-1}$ linearan na Y i za koga prema pretpostavkama tvrđenja vrijedi

$$||(L-A)\circ L^{-1}|| \leq ||(L-A)||\cdot||L^{-1}|| < 1\ ,$$

te je on i ograničen. Tada prema Teoremu 3.19 postoji $(I-(L-A)\circ L^{-1})^{-1}$, pri čemu je

$$||(I-(L-A)\circ L^{-1})^{-1}|| \leq \frac{1}{1-||(L-A)\circ L^{-1}||} \leq \frac{1}{1-||L-A||\cdot||L^{-1}||}\ .$$

Dakle, postoji A^{-1} i pri tome je

$$A^{-1} = L^{-1}\circ(I-(L-A)\circ L^{-1})^{-1}\ ,$$

i za koga vrijedi procjena (3.14),

$$||A^{-1}|| \leq ||L^{-1}||\cdot||(I-(L-A)\circ L^{-1})^{-1}|| \leq \frac{||L^{-1}||}{1-||L-A||\cdot||L^{-1}||}\ .$$

Kako je $L^{-1}-A^{-1} = A^{-1}\circ(A-L)\circ L^{-1}$, onda vrijedi i procjena (3.15),

$$||L^{-1}-A^{-1}|| \leq ||A^{-1}||\cdot||(A-L)\circ L^{-1}|| \leq \frac{||L^{-1}||^2\cdot||A-L||}{1-||L^{-1}||\cdot||A-L||}\ .$$

Neka je $Lx_1 = f$ i $Ax_2 = f$. Iz utvrđene egzistencije inverznih operatora imamo da je $x_1 = L^{-1}f$ i $x_2 = A^{-1}f$. Tada je

$$x_1-x_2 = (L^{-1}-L^{-1})f = A^{-1}\circ(A-L)\circ L^{-1}f = A^{-1}\circ(A-L)x_1\ ,$$

što nakon uzimanja norme i korištenja ograničenosti odgovarajućih operatora daje

$$||x_1-x_2|| \leq ||A^{-1}||\cdot||(A-L)x_1||\ .$$

□

Operator A u gornjoj teoremi se naziva perturbacija operatora L. Gornji teorem bi mogli parafrazirati na sljedeći način: *Operator koji je blizu operatora koji ima ograničen inverz i sam će imati ograničen inverz.* Ova ideja je okvir koji se koristi u mnogim problemima rješivosti linearnih diferencijalnih i integralnih jednačina, a varijacija ovakve ideje se koristi čak i pri rješavanju nelinearnih problema.

Nejednakost (3.15) možemo čitati kao lokalnu Lipschitz neprekidnost operatorskog inverza, a nejednakost (3.16) možemo shvatiti kao procjenu greške rješenja koja nastaje ako za zadati operator A koristimo njemu "bliski" operator L, ili ako za poznati operator L koristimo njemu perturbovan

operator A, dakle zavisno od načina pristupa rješavanju problema.
Posmatrajmo jednačinu $Lx = f$ kao egzaktan problem i posmatrajmo niz alroksimacionih problema $L_n x_n = f$ ($n \in \mathbb{N}$). Pod pretpostavkom da niz $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka operatoru L možemo primjeniti teorem o perturbaciji i konstatovati da će za dovoljno veliko n, problem $L_n x_n = f$ imati jedinstveno rješenje x_n^*, za koga će vrijediti

$$||x - x_n^*|| \leq ||L_n^{-1}|| \cdot ||(L - L_n)x|| \ . \tag{3.17}$$

Postojanost (*konzistentnost*) aproksimacije definisana je uslovom da

$$||(L - L_n)x|| \to 0 \ , \ n \to \infty \ .$$

Stabilnost rješenja je definisana uslovom da je niz $(L_n)_{n\geq k}$ unifrmno ograničen. Jasno je da konzistentnost plus stabilnost daju konvergenciju,

$$||x - x_n^*|| \to 0 \ , \ n \to \infty \ .$$

Procjena greške (3.17) daje nam dovoljne uslove za konvergenciju (i procjenu reda greške pod pretpostavkom o regularnosti rješenja x) čak i prije nego riješimo aproksimacioni problem $L_n x_n = f$. Ovakvu procjenu nazivamo *a priori* procjena greške.

Drugi način korištenja procjene (3.16) jeste posmatranje stvarnog problema $Ax = f$ i L_n ($n \in \mathbb{N}$) kao aproksimacije operatora A. Neka je x_n rješenje aproksimacionog problema $L_n x_n = f$, koji ima jedinstveno rješenje za dovoljno veliko n. Tada opet imamo procjenu

$$||x - x_n|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||(A - L_n)x_n|| \ .$$

Pretpostavimo da imamo procjenu za $||A^{-1}||$. Nakon što nađemo aproksimativno rješenje x_n, gornja procjena nam daje gornje ograničenje greške rješenja polaznog problema. Ova procjena se naziva *a posteriori* procjena greške.

Primjer 3.18. Ispitajmo rješivost integralne jednačine za $\lambda \neq 0$,

$$\lambda u(x) - \int_0^1 \sin(xy)u(y)dy = f(x) \ , \ 0 \leq x \leq 1 \ .$$

Na osnovu Primjera 3.17 imamo da ako je

$$|\lambda| > ||K|| = \int_0^1 \sin y dy = 1 - \cos 1 \approx 0.4597 \ ,$$

tada polazna jednačina ima jedinstveno rješenje $u \in C[0,1]$, za svako $f \in C[0,1]$.
Naravno, postavlja se pitanje da li možemo proširiti skup vrijednosti za λ za koje polazna jednačina ima jedinstveno rješenje? Odgovor na ovo pitanje ćemo potražiti primjenom perturbacione metode. Kako je $\sin(xy) \approx xy$ za male vrijednosti od $|xy|$, polazni problem ćemo uporediti sa modifikovanim problemom

$$\lambda v(x) - \int_0^1 xyv(y)dy = f(x) \ , \ 0 \leq x \leq 1 \ .$$

U notaciji perturbacionog metoda, polazna jednačina je $Au = f$, a gornja je $Lv = f$. Prostor $X = C[0,1]$ sa standardnom maksimumm normom i $A, L \in \mathscr{L}(X)$.
Modifikovanu jednačinu možemo rješiti eksplicitno. Pod pretpostavkom da je $\lambda \neq 0$, eksplicitno rješenje ima formu

$$v(x) = \frac{1}{\lambda}(f(x) + cx) \ ,$$

za neku konstantu c. Zamjenjujući ovu formu u modifikovanoj jednačini, nalazimo vrijednost konstante c, te je rješenje modifikovane jednačine

$$v(x) = \frac{1}{\lambda}\left(f(x) + \frac{1}{\lambda - \frac{1}{3}}\int_0^1 xyf(y)dy\right)\ ,\ \text{za}\ \lambda \neq 0, \frac{1}{3}\ .$$

Ova jednakost nam u stvari definiše $L^{-1}f$, za svako $f \in C[0,1]$. Za korištenje teorema o perturbaciji potrebne su nam sljedeće veličine, koje dobijamo kraćim računom.

$$||L^{-1}|| \leq \frac{1}{|\lambda|}\left(1 + \frac{1}{2|\lambda - \frac{1}{3}|}\right)\ .$$

$$||L - A|| = \int_0^1 (y - \sin y)dy = \cos 1 - \frac{1}{2} \approx 0.0403\ .$$

Uslov teorema o perturbaciji $||A - L|| < \frac{1}{||L^{-1}||}$ sada glasi

$$\cos 1 - \frac{1}{2} < \left(\frac{1}{|\lambda|}\left(1 + \frac{1}{2|\lambda - \frac{1}{3}|}\right)\right)^{-1}\ ,$$

ili u ekvivalentnoj formi

$$\frac{1}{|\lambda|}\left(1 + \frac{1}{2|\lambda - \frac{1}{3}|}\right) < \frac{1}{\cos 1 - \frac{1}{2}}\ . \tag{3.18}$$

Na slici 3.2 vidimo da za realne vrijednosti od λ postoje tri područja u kojima je zadovoljena nejednakost (3.18): $\lambda < 0$, $0 < \lambda < \frac{1}{3}$ i $\lambda > \frac{1}{3}$. U slučaju $\lambda < 0$, nejednakost (3.18) će biti zadovoljena ako je $\lambda < \lambda_0 \approx -0.0881$, gdje je λ_0 negativno rješenje jednačine

$$\lambda^2 - \left(\frac{5}{6} - \cos 1\right)\lambda - \frac{5}{6}\left(\cos 1 - \frac{1}{2}\right)\ .$$

Bez primjene perturbacione teorije jedinstvenost rješenja polazne jednačine smo mogli garantovati za $|\lambda| > 0.4597$, a vidimo primjenom perturbacione teorije da ćemo to moći garantovati i za slučaj $\lambda < -0.0881$, što predstavlja očigledno poboljšanje. ♢

3.2.3 Princip otvorenog preslikavanja

Lema 3.22. *Neka je M svuda gust skup u Banachovom prostoru X. Tada se svaki nenula vektor $x \in X$ može prikazati u formi*

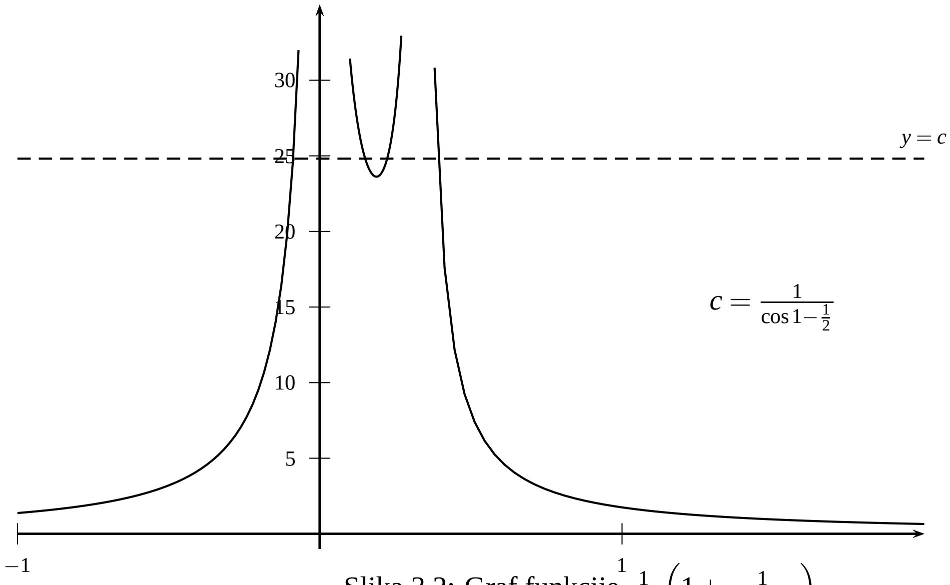
$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\ ,$$

gdje su $x_n \in M$ ($n \in \mathbb{N}$), takvi da je

$$||x_n|| \leq \frac{3}{2^n}||x||\ ,\ n \in \mathbb{N}\ .$$

Dokaz : Neka je $x \in X$ proizvoljan. Kako je M svuda gust u X, postoji $x_1 \in M$, takav da je $||x - x_1|| \leq \frac{||x||}{2}$. Sada vektor $x - x_1 \in X$, pa opet zbog svuda gustosti skupa M, postoji $x_2 \in M$, takav da je $||x - x_1 - x_2|| \leq \frac{||x||}{2^2}$. Na isti način, postoji $x_3 \in M$, takav da je $||x - x_1 - x_2 - x_3|| \leq \frac{||x||}{2^3}$ odnosno, postoji $x_n \in M$, takav da je

$$||x - x_1 - x_2 - \cdots - x_n|| \leq \frac{||x||}{2^n}\ .$$



Slika 3.2: Graf funkcije $\frac{1}{|\lambda|}\left(1+\frac{1}{2|\lambda-\frac{1}{3}|}\right)$.

Zbog načina izbora elemenata $x_n \in M$ ($n \in \mathbb{N}$), vrijedi

$$\left|\left|x-\sum_{k=1}^{n} x_k\right|\right| \to 0\ ,\ n \to \infty\ ,$$

tj. red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergira ka elementu x.

Pri tome vrijede sljedeće ocjene normi,

$$\begin{aligned}
||x_1|| &= ||x_1 - x + x|| \leq ||x_1 - x|| + ||x|| \leq \frac{3}{2}||x||\ , \\
||x_2|| &= ||x_2 + x_1 - x + x - x_1|| \leq ||x_2 + x_1 - x|| + ||x - x_1|| \leq \frac{3}{2^2}||x||\ ,
\end{aligned}$$

ili za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned}
||x_n|| &= ||x_n + x_{n-1} + \cdots + x_1 - x + x - x_1 - \cdots - x_{n-1}|| \\
&\leq ||x_n + x_{n-1} + \cdots + x_1 - x|| + ||x - x_1 - \cdots - x_{n-1}|| \\
&\leq \frac{3}{2^n}||x||\ .
\end{aligned}$$

□

Teorem 3.23. ***(Banachov teorem o inverznom operatoru)*** *Neka je A ograničen linearan operator koji obostrano jednoznačno preslikava Banachov prostor X na Banachov prostor Y. Tada je i inverzni operator A^{-1} takođe ograničen.*

Dokaz : Zbog pretpostavki teorema, preslikavanje A je bijektivno, pa inverzni operator A^{-1} postoji. Posmatrajmo u prostoru Y skupove

$$M_k = \left\{y \in Y \mid \left|\left|A^{-1}y\right|\right| \leq k||y||\right\}\ ,\ k \in \mathbb{N}\ .$$

Pretpostavimo da postoji $y_0 \in Y$ ($y_0 \neq 0$), takav da $y_0 \notin M_k$, niti za jedno $k \in \mathbb{N}$. Tada bi vrijedilo $\left|\left|A^{-1}y_0\right|\right| > k||y_0||$ za sve $k \in \mathbb{N}$, odnosno

$$(\forall k \in \mathbb{N})\ ||Ax_0|| < \frac{1}{k}||x_0||\ (Ax_0 = y_0)\ .$$

Iz toga onda imamo da je $||Ax_0|| = 0$, tj. $Ax_0 = 0 = y_0$, a što je u suprotnosti sa pretpostavkom da y_0 nije nula element.
Dakle, vrijedi

$$Y = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k \ .$$

Zbog kompletnosti prostora Y, na osnovu Berove teoreme o kategorijama, bar jedan od skupova, neka je to M_n, je gust u nekoj kugli B. Unutar kugle B, posmatrajmo prsten

$$P = \left\{ z \in B |\ \alpha < \left|\left| z - y' \right|\right| < \beta \right\} \ ,$$

gdje je $0 < \alpha < \beta$, a $y' \in M_n$ proizvoljan. Translirajmo prsten P, tako da mu centar bude u nuli, čime dobijamo skup

$$P_0 = \{z |\ \alpha < ||z|| < \beta\} \ .$$

Neka je sada $z \in P \cap M_n$, tada $z - y' \in P_0$ i pri tome vrijedi

$$\begin{aligned}
\left|\left|A^{-1}(z-y')\right|\right| &\leq \left|\left|A^{-1}z\right|\right| + \left|\left|A^{-1}y'\right|\right| \\
&\leq n(||z|| + \left|\left|y'\right|\right|) \\
&\leq n(\left|\left|z-y'\right|\right| + 2\left|\left|y'\right|\right|) \\
&= n\left|\left|z-y'\right|\right| \left(1 + \frac{2\,||y'||}{||z-y'||}\right) \\
&\leq n\left|\left|z-y'\right|\right| \left(1 + \frac{2\,||y'||}{\alpha}\right) \ .
\end{aligned}$$

Izraz $n\left(1 + \frac{2||y'||}{\alpha}\right)$ ne zavisi od z i ako stavimo da je

$$N = 1 + n\left\lfloor 1 + \frac{2\,||y'||}{\alpha} \right\rfloor \ ,$$

zaključujemo da $z - y' \in M_N$. Kako je M_n gust u B, a time i u P, to je skup M_N gust u P_0.

Neka je sada $y \in Y$ proizvoljan nenula element. Moguće je izabrati $\lambda \in \Phi$, takav da je $\alpha < ||\lambda y|| < \beta$, tj. da je $\lambda y \in P_0$. Kako je M_N gust u P_0, postoji niz $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M_N$ koji konvergira ka λy. Tada niz $(\frac{1}{\lambda}y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira ka y, a zbog činjenice da $\frac{1}{\lambda}y_k \in M_N$ ($k \in \mathbb{N}$, $\lambda \neq 0$), zaključujemo da je M_N gust i u $Y \setminus \{0\}$, odnosno i u Y.

Neka je opet y proizvoljan nenula element iz Y. Kako je M_N gust u Y, na osnovu Leme 3.22, postoje $y_k \in M_N$ ($k \in \mathbb{N}$), takvi da je

$$y = \sum_{k\in\mathbb{N}} y_k \ , \ ||y_k|| \leq \frac{3}{2^k}\, ||y|| \ .$$

Stavimo $x_k = A^{-1}y_k \in X$ ($k \in \mathbb{N}$). Kako vrijedi

$$||x_k|| = \left|\left|A^{-1}y_k\right|\right| \leq N\,||y_k|| \leq \frac{3N\,||y||}{2^k} \ ,$$

to red $\sum_{k\in\mathbb{N}} x_k$ konvergira ka nekom elementu $x \in X$ i pri tome je

$$||x|| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} ||x_k|| \leq 3N\,||y|| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 3N\,||y|| \ .$$

Zbog konvergencije reda $\sum_{k\in\mathbb{N}} x_k$ i neprekidnosti operatora A, imamo

$$Ax = \sum_{k\in\mathbb{N}} Ax_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} y_k = y \ ,$$

odakle je onda $x = A^{-1}y$. Sada vrijedi

$$\left|\left|A^{-1}y\right|\right| = ||x|| \leq 3N\,||y|| \ ,$$

za proizvoljno $y \in Y$, a ovo znači da je A^{-1} ograničen operator. □

Gornji teorem je jedan od najkorištenijih alata za rješavanje jednačina oblika $Lx = y$, kada je $L : X \to Y$ linearan operator. On nam daje egzistenciju i jedinstvenost rješenja za proizvoljan $y \in Y$ kroz postojanje inverznog operatora L^{-1}. Pored toga, činjenica o ograničenosti (neprekidnosti) inverznog operatora nam daje informaciju o *stabilnosti* rješenja. Naime, zbog neprekidnosti L^{-1}, male promjene y uzrokuju male promjene rješenja jednačine. Objasnimo pojam stabilnosti rješenja preciznije. Posmatrajmo jednačine $Lx = y$ i $Lx' = y'$. Tada je zbog linearnosti inverza

$$x - x' = L^{-1}(y) - L^{-1}y' = L^{-1}(y - y') \ ,$$

a odavde zbog ograničenosti imamo

$$||x - x'|| \leq ||L^{-1}|| \cdot ||y - y'|| \ .$$

Jasno je sada da ako je $y - y'$ mala veličina, tada će i $x - x'$ morati biti mala veličina. Veličina $||L^{-1}||$ nam tada daje vezu između greške koju pravimo na veličini y i greške koju dobijamo na veličini x.

Mnogo važniji način gledanja je posmatranje relativne promjene ovih dviju grešaka,

$$\frac{||x - x'||}{||x||} \leq \frac{||L^{-1}|| \cdot ||y - y'||}{||x||} = ||L^{-1}|| \cdot ||L|| \frac{||y - y'||}{||L|| \cdot ||x||} \ .$$

Kako je još $||y|| = ||Lx|| \leq ||L|| \cdot ||x||$, dobijamo procjenu

$$\frac{||x - x'||}{||x||} \leq ||L^{-1}|| \cdot ||L|| \frac{||y - y'||}{||y||} \ .$$

Kvantitativnu veličinu $||L^{-1}|| \cdot ||L||$ nazivamo *uslvni broj* jednačine. Primjetimo da je uvijek $||L^{-1}|| \cdot ||L|| \geq ||L^{-1}L|| = ||I|| = 1$ tojest, uslovni broj je uvijek veći ili jednak 1. Problemi u kojima je uslovni broj malen (blisko jedinici) nazivaju se *dobro-uslovljeni* problemi, a za velike uslovne brojeve kažemo da je problem *loše-uslovljen*.

Stav o inverznom operatoru se uobičajeno iskazuje kao posljedica mnogo poznatije teoreme o otvorenom preslikavanju.

Teorem 3.24. ***(Princip otvorenog preslikavanja)***
Neka su X i Y Banachovi prostori i neka je A ograničen linearan operator koji slika X na Y. Tada je A otvoreno preslikavanje, tj. slika otvorenog skupa u X je otvoren skup u Y.

Dakle, najjednostavnije rečeno, svako neprekidno, linearno i bijektivno preslikavanje između dva Banachova prostora ima meprekidno inverzno preslikavanje.

Trivijalno je rang operatora linearni vektorski potprostor (Teorem 3.3), ali da bi obezbjedili da je i on Banachov potprostor (ako je kodomen Banachov prostor) neophodna nam je njegova zatvorenost. U nekim situacijama to imamo na jednostavan način ako je kodomen čitav prostor.

Primjer 3.19. Posmatrajmo operator $T = I + K : C[0,1] \to C[0,1]$, gdje je K Volterrin integralni operator

$$Kf(x) = \int_0^x f(y)dy \ .$$

(Često se operator T naziva perturbacijom identitete (I) za operator K) Pokažimo da je $Rang(T)$ zatvoren skup. Za proizvoljno $g \in C[0,1]$ posmatrajmo jednačinu $g = Tf$ tojest,

$$f(x) + \int_0^x f(y)dy = g(x) \ .$$

Stavimo da je $F(x) = \int_0^x f(y)dy$, pri čemu je onda $F' = f$, pa polazna jednačina prelazi u jednačinu

$$F'(x) + F(x) = g(x) \text{ uz uslov } F(0) = 0 \ .$$

Rješenje ovog Cauchyjevog probleme je funkcija

$$F(x) = \int_0^x e^{-(x-y)} g(y)dy \ .$$

Diferencirajući posljednju jednačinu po varijabli x dobijamo

$$F'(x) = f(x) = g(x) - \int_0^x e^{-(x-y)} g(y)dy \ , \tag{3.19}$$

i pri tome je $f \in C[0,1]$. Dakle, za svako $g \in C[0,1]$ postoji $f \in C[0,1]$, tako da je $Tf = g$, te je $Rang(T) = C[0,1]$, a time je to i zatvoren skup.
Očigledno je zbog rečenog, da jednačina $Tf = 0$ ima samo rješenje $f = 0$, pa je operator T injektivan. Dakle, T je bijektivan operator između Banachovih prostora i pri tome je ograničen, te je on invertibilan. Šta više, iz (3.19) vidimo da je

$$T^{-1} = (I+K)^{-1} = I - L \ ,$$

gdje je L Volterin integralni operator

$$Lg(x) = \int_0^x e^{-(x-y)} g(y)dy \ . \qquad \diamondsuit$$

Narednim tvrđenjem dajemo jedan dobar kriterij utvrđivanja zatvorenosti ranga operatora.

Teorem 3.25. *Neka je $A : X \to Y$ ograničen linearan operator između Banachovih prostora. Sljedeća tvrđenja su ekvivalentna:*

1. *Postoji konstanta $c > 0$, takva da za sve $x \in X$ vrijedi $c||x|| \leq ||Ax||$.*
2. *A ima zatvoren rang i jedino rješenje jednačine $Ax = 0$ je $x = 0$.*

Dokaz : Pretpostavimo da operator A zadovoljava uslov 1. Tada jednačina $Ax = 0$ implicira da je $||x|| = 0$ odnosno $x = 0$. Pokažimo da je $Rang(A)$ zatvoren skup. U tom cilju neka je $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan konvergentan niz iz $Rang(A)$, takav da $y_n \to y \in Y$ $(n \to \infty)$. Tada postoji niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, tako da je $Ax_n = y_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Za proizvoljne $n, m \in \mathbb{N}$, na osnovu pretpostavke 1. vrijedi

$$||x_n - x_m|| \leq \frac{1}{c}||Ax_n - Ax_m|| = \frac{1}{c}||y_n - y_m|| \ ,$$

a kako je $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz, takav je onda i niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zbog kompletnosti prostora X, onda je ovaj niz ikonvergentan tojest, $x_n \to x \in X$ $(n \to \infty)$. Operator A je ograničen, odnosno neprekidan te vrijedi

$$Ax = A(\lim_{n\to\infty}) = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} y_n = y \ .$$

Dakle, $y \in Rang(A)$ te je $Rang(A)$ zatvoren skup.

Pokažimo obrat, neka je zadovoljen uslov 2. Kako je $Rang(A)$ zatvoren skup, on je onda Banachov potprostor od Y.

Za proizvoljne $x_1, x_2 \in X$, ako je $Ax_1 = Ax_2$, tada je $A(x_1 - x_2) = 0$, pa zbog drugog dijela prtpostavke 2. je $x_1 = x_2$. Ovo znači da je $A : X \to Y$ injektivno preslikavanje. Sve u svemu, $A : X \to Rang(A)$ je tada bijektivno preslikavanje između Banachovih prostora, pa prema teoremu o otvorenom preslikavanju, operator $A^{-1} : Rang(A) \to X$ je ograničen. Dakle, postoji konstanta $C > 0$, takva da za sve $y \in Rang(A)$ vrijedi

$$||A^{-1}y|| \le C||y|| \ .$$

Stavljajući u ovaj izraz $y = Ax$ imamo

$$c||x|| \le ||Ax|| \ ,$$

za sve $x \in X$, gdje je $c = \frac{1}{C}$. □

Primjer 3.20. Posmatrajmo Volterrin integralni operator $K : C[0,1] \to C[0,1]$. Specijalno, posmatrajmo funkcionalni niz $f_n(x) = \cos(n\pi x)$ $(n \in \mathbb{N})$. Sada imamo,

$$K f_n = \int_0^x \cos(n\pi y)dy = \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} \to 0 \ , \ n \to \infty \ .$$

Kako je $||f_n|| = 1$, očigledno je da nije moguće procjeniti $||f_n||$ pomoću $||K f_n||$ (ne postoji konstanta $c > 0$ u uslovu a) gornje teoreme), a čega je posljedica da $Rang(K)$ nije zatvoren skup. ♢

Pokazuje se da je zatvorenost jezgra operatora mnogo lakše obezbjeđena.

Teorem 3.26. *Ako su X i Y normirani prostori i $A : X \to Y$ ograničen linearan operator, tada je $Ker(A)$ zatvoren potprostor od X.*

Dokaz : Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Ker(A)$ proizvoljan i neka $x_n \to x \in X$ $(n \to \infty)$. Zbog neprekidnosti operatora A tada imamo

$$Tx = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} Tx_n = 0 \ .$$

Dakle, $x \in Ker(A)$, a zbog proizvoljnosti niza zaključujemo da je $Ker(A)$ zatvoren skup. □

Specijalno, jezgro ograničenog operatora koji djeluje sa Banachovog prostora je Banachov potprostor.

3.3 O još dva principa

Među najbitna tvrđenja funkcionalne analize spadaju i sljedeća dva. To su princip konvergencije i princip uniformne ograničenosti.

Teorem 3.27. ***(Princip uniformne ograničenosti)***
Neka je $\mathcal{T}$ proizvoljna familija ograničenih linearnih operatora koji djeluju sa Banachovog prostora X u normiran prostor Y. Neka za svako $x \in X$, postoji konstanta $M(x) > 0$ (koja zavisi eventualno samo od x), tako da vrijedi

$$(\forall\ T \in \mathcal{T})\ ||Tx|| \le M(x) \ .$$

Tada postoji konstanta M, za koju vrijedi

$$(\forall\ T \in \mathcal{T})\ ||T|| \le M \ .$$

Dokaz : Pretpostavimo da familija $\mathcal{T}$ nije ograničena niti na jednoj kugli u X. Posmatrajmo kuglu $K_0 = K(0, \frac{1}{2})$ i kako $\mathcal{T}$ nije ograničena ni na njoj, postoji $T = T_1 \in \mathcal{T}$ i $x_1 \in K(0, \frac{1}{2})$, tako da

je $||T_1x_1|| > 1$.
Neka je sada r_1 proizvoljan, takav da vrijedi

$$0 < r_1 < \min\left\{ \frac{||T_1x_1|| - 1}{||T_1||}, \frac{1}{2} \right\} .$$

Označimo sa $K_1 = K(x_1, r_1)$. Za proizvoljan $x \in K_1$ je $||x - x_1|| \leq r_1$ i pri tome je

$$\begin{aligned} ||T_1x|| &= ||T_1x_1 - T_1(x_1 - x)|| \\ &\geq ||T_1x_1|| - ||T_1(x_1 - x)|| \\ &\geq ||T_1x_1|| - ||T_1||\,||x - x_1|| \\ &\geq ||T_1x_1|| - ||T_1||r_1 \\ &> 1 . \end{aligned}$$

Dakle, za proizvoljno $x \in K_1$, vrijedi $||T_1x|| > 1$.

Polazeći sada od kugle $K_1 = K(x_1, r_1)$, na isti način utvrđujemo postojanje operatora $T_2 \in \mathcal{T}$ i $x_2 \in K_1$, te kugle $K_2 = K(x_2, r_2) \subset K_1$, takvih da je

$$(\forall x \in K_2)\ ||T_2x|| > 2 ,$$

pri čemu je $r_2 < \frac{1}{2^2}$. Nastavljajući ovaj postupak, dolazimo do niza operatora $T_1, T_2, ..., T_n, ...$ i niza kugli $K_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset K_n \supset \cdots$ čiji su poluprečnici $r_1, r_2, ..., r_n, ...$, takvi da je $r_n < \frac{1}{2^n}$ ($n \in \mathbb{N}$), i pri tome je

$$||T_nx|| > n \ ,\ x \in K_n .$$

Na osnovu teorema o karakterizaciji kompletnosti imamo da je

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \{x_0\} \ ,\ \text{ za neko } \ x_0 \in X .$$

Šta više, $x_n \to x_0$ ($n \to \infty$), gdje je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz centara konstruisanih kugli. Pri tome je za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$, $||T_nx_0|| > n$, a to je nemoguće jer smo pretpostavili da za svako $x \in X$, vrijedi

$$||Tx|| \leq M(x) .$$

Dakle, mora postojati kugla $K(x', r')$, takva da je

$$||Tx|| \leq M' ,$$

za sve $x \in K(x', r')$ i za sve $T \in \mathcal{T}$.

Neka je sada $x \in K(0, r')$ proizvoljan. Tada $x + x' \in K(x', r')$, pa za svako $T \in \mathcal{T}$ imamo

$$||Tx|| = \left|\left| -Tx' + T(x + x') \right|\right| \leq \left|\left| Tx' \right|\right| + \left|\left| T(x + x') \right|\right| \leq M(x') + M' .$$

Stavimo li $M'' = M(x') + M'$, vrijedi

$$(\forall x \in K(0, r'))\ ||Tx|| \leq M'' ,$$

za svako $T \in \mathcal{T}$.
Neka je sada $x \in X$ proizvoljan ($x \neq 0$). Tada je $\frac{x}{||x||}r' \in K(0, r')$, pa vrijedi

$$\left|\left| T\left(\frac{x}{||x||}r' \right) \right|\right| \leq M'' ,$$

tj.

$$||Tx|| \leq \frac{M''}{r'} ||x|| \ .$$

Stavimo $M = \frac{M''}{r'}$, dakle vrijedi

$$(\forall\, T \in \boldsymbol{\tau})(\forall x \in X)\ ||Tx|| \leq M ||x|| \ ,$$

a ovo upravo znači

$$(\forall\, T \in \boldsymbol{\tau})\ ||T|| \leq M \ .$$

□

Znamo iz matematičke analize da za funkcionalni niz možemo posmatrati dvije vrste konvergencije, konvergenciju po tačkama i uniformnu konvergenciju i da je uniformna konvergencija ”jača” od tačkaste konvergencije. U opštem slučaju iz konvegrencije po tačkama nemamo uniformnu konvergenciju. Princip uniformne ograničenosti, pojednostavljeno govoreći, nam kazuje da pri određenim uslovima, familija ograničenih linearnih operatora koja je konvergentna po tačkama, je i uniformno konvergentna. Dokazani teorem smo mogli iskazati i u obratnoj formi, tj

Teorem 3.28. *Ako niz $(||T_n||)_{n\in\mathbb{N}}$ nije ograničen, tada postoji $x^* \in X$, takav da je*

$$\limsup_{n\to\infty} ||T_n x^*|| = +\infty \ .$$

Ovako iskazan teorem naziva se *princip rezonancije*.

Teorem 3.29. ***(Princip konvergencije)***
Neka je $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz ograničenih linearnih operatora koji djeluju sa normiranog prostora X u Banachov prostor Y. Ako su zadovoljeni uslovi

1. $(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N})\ ||T_n|| \leq M$.
2. *Postoji $\lim_{n\to\infty} T_n x$, za sve x iz skupa koji je gust u nekoj kugli prostora X.*

Tada postoji $\lim_{n\to\infty} T_n x$, za sve $x \in X$ i sa

$$T_0 x = \lim_{n\to\infty} T_n x$$

je definisan ograničen linearan operator T_0, za koga vrijedi

$$||T_0|| \leq \liminf ||T_n|| \ .$$

Dokaz : Neka je S skup koji je gust u nekoj kugli $K(x_0, r)$, tako da postoji $\lim_{n\to\infty} T_n x$, za sve $x \in S$.

Neka su sada $x \in K(x_0, r)$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljni. Tada postoji $y \in S$, takav da je $||x-y|| < \frac{\varepsilon}{4M}$. Osim toga, zbog konvergencije niza $(T_n y)_{n\in\mathbb{N}}$, za svako $y \in S$, postoji $N \in \mathbb{N}$, tako da za proizvoljne $n, m \geq N$, vrijedi

$$||T_n y - T_m y|| < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Na osnovu svega ovoga, za $n, m \geq N$, sada imamo

$$\begin{aligned} ||T_n x - T_m x|| &= ||(T_n x - T_n y) + (T_n y - T_m y) + (T_m y - T_m x)|| \\ &\leq ||T_n(x-y)|| + ||T_n y - T_m y|| + ||T_m(x-y)|| \\ &\leq ||T_n||\,||x-y|| + ||T_n y - T_m y|| + ||T_m||\,||x-y|| \\ &\leq 2M||x-y|| + ||T_n y - T_m y|| \\ &< 2M\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ . \end{aligned}$$

Ovo znači da je za proizvoljno $x \in K(x_0, r)$, niz $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev, a kako se on nalazi u Banachovom prostoru Y, on je i konvergentan, tj. postoji

$$\lim_{n\to\infty} T_n x \ , \ x \in K(x_0, r) \ .$$

Neka je sada $x \in X$ proizvoljan ($x \neq 0$). Tada je

$$x_0 + \frac{r}{||x||} x \in K(x_0, r) \ ,$$

pa postoji

$$\lim_{n\to\infty} T_n \left(x_0 + \frac{r}{||x||} x \right) = \lim_{n\to\infty} \left(T_n x_0 + T_n \left(\frac{r}{||x||} x \right) \right) \ .$$

Zato što $x_0 \in K(x_0, r)$, postoji $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x_0$, a to onda znači da mora postojati i

$$\lim_{n\to\infty} T_n \left(\frac{r}{||x||} x \right) \ ,$$

tj. postoji

$$\lim_{n\to\infty} T_n x \ .$$

Dakle, za svako $x \in X$, postoji $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x$. Definišimo onda za $x \in X$

$$T_0 x = \lim_{n\to\infty} T_n x \ .$$

Za proizvoljne $x', x'' \in X$ i za proizvoljne $\alpha, \beta \in \Phi$, vrijedi

$$\begin{aligned} T_0(\alpha x' + \beta x'') &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x' + \beta x'') \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\alpha T_n x' + \beta T_n x'' \right) \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} T_n x' + \beta \lim_{n\to\infty} T_n x'' \\ &= \alpha T_0 x' + \beta T_0 x'' \ , \end{aligned}$$

te je T_0 linearan operator.
Za proizvoljno $x \in X$ je

$$\begin{aligned} ||T_0 x|| &= \lim_{n\to\infty} ||T_n x|| \\ &= \liminf_{n\to\infty} ||T_n x|| \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} (||T_n|| \, ||x||) \\ &= (\liminf_{n\to\infty} ||T_n||) \, ||x|| \ . \end{aligned}$$

Iz posljednjeg vidimo da je T_0 ograničen operator, i da pri tome vrijedi

$$||T_0|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||T_n|| \ .$$

□

Pretpostavka o ograničenosti operatora, to jest $||T|| < \infty$ za $T \in \tau$ nije obavezujuća da bi supremum normi takvih operatora bio konačan. Naprimjer, neka je I identično preslikavanje netrivijalnog normiranog prostora X. Posmatrajmo familiju $\tau = \{nI \mid n \in \mathbb{N}\}$. Jasno je da $\tau \subset \mathscr{L}(X, X)$, ali očigledno je $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||nI|| = \infty$. Naravno, konsekvenca ovoga je ta da je uslov 2. u Teoremu 3.29 zadovoljen na skupu $D = \{0\}$ koji nije gust u X.

Vidimo da je bitna pretpostavka u obje teoreme kompletnost prostora, i to u principu uniformne ograničenosti zahtjevamo da je domen X Banachov prostor, a u principu konvergencije zahtjevamo da je kodomen Y Banachov prostor. Ova dva stava kada ih objedinimo, daju poznati *Banach-Steinhausov* stav.

Teorem 3.30. *Neka su X i Y Banachovi prostori i neka je $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz ograničenih linearnih operatora koji djeluju sa X u Y. Da bi niz $(T_nx)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergirao ka Ax za svako $x \in X$, gdje je $A : X \to Y$ ograničen linearan operator, potrebno je i dovoljno da su zadovoljeni uslovi*

1. *Niz $(||T_n||)_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen.*
2. *Postoji $\lim\limits_{n\to\infty} T_nx$ na nekom svuda gustom skupu elemenata.*

3.4 Zatvoreni operator

Neka su X i Y Banachovi prostori. Sa $X \times Y$ označavamo Descartesov produkt skupova X i Y. Ako na $X \times Y$ uvedemo unutrašnju i spoljašnju kompoziciju na sljedeći način,

- $(\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in X \times Y)\ (x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2,y_1+y_2)$,
- $(\forall (x,y) \in X \times Y)(\forall \lambda \in \Phi)\ \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$,

lahko se provjerava da $X \times Y$ dobija strukturu vektorskog prostora.
Na $X \times Y$ možemo definisati i normu na sljedeći način

$$||(x,y)|| = ||x|| + ||y|| \ , \ (x,y) \in X \times Y \ ,$$

u odnosu na koju je $X \times Y$ Banachov prostor (pokazati ove dvije tvrdnje!).

Definicija 3.13. *Neka je $A : X \to Y$ linearan operator. Skup*

$$G_A = \{(x,Ax) |\ x \in D_A\} \subseteq X \times Y \ ,$$

nazivamo grafom operatora A.

Definicija 3.14. *Neka su X i Y Banachovi prostori i neka je $A : X \to Y$ linearan operator. Kažemo da je A zatvoren operator ako i samo ako je G_A zatvoren skup u $X \times Y$.*

U gornjoj definiciji pod zatvorenošću skupa G_A se podrazumijeva zatvorenost skupa u odnosu na jaku topologiju na $X \times Y$, indukovanu definisanom normom na tom prostoru.

Teorem 3.31. *Linearan operator A koji slika Banachov prostor X u Banachov prostor Y je zatvoren ako i samo ako iz*

1. *$x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D_A$ i*
2. *$Ax_n \to y_0$,*

slijedi $x_0 \in D_A$ i $Ax_0 = y_0$.

Dokaz : Dokaz ostavljen čitaocu za vježbu! □

Definicija 3.15. *Neka su $A,B : X \to Y$ linearni operatori. Za operator B kažemo da je proširenje operatora A, u oznaci $A \subset B$, ako i samo ako je $G_A \subset G_B$.*
Za linearan operator A kažemo da dopušta zatvorenje ako postoji zatvoren operator A_1, takav da je $A \subset A_1$. Operator A_1 nazivamo zatvorenjem operatora A. Ako za proizvoljno drugo zatvorenje A_2 operatora A, vrijedi $A_1 \subset A_2$, za A_1 kažemo da je minimalno zatvorenje operatora A.

Teorem 3.32. *Da bi linearan operator $A : X \to Y$ dopuštao zatvorenje neophodno je i dovoljno da zatvorenje $\overline{G}_A$ grafika G_A ne sadrži elemente oblika $(0,y)$ za $y \neq 0$.*

Dokaz : Neka operator A dopušta zatvorenje i neka je A_1 njegovo proizvoljno zatvorenje. To znači da je $G_A \subset G_{A_1}$ i G_{A_1} je zatvoren skup. Zbog toga je onda $\overline{G}_A \subset \overline{G}_{A_1} = G_{A_1}$.
Neka je sada $(0,y) \in \overline{G}_A$. Tada je $(0,y) \in G_{A_1}$, te je $0 \in D_{A_1}$ i $A_1 0 = y$. Kako je A_1 linearan operator to mora vrijediti $A_1 0 = 0$, to jest $y = 0$, pa $\overline{G}_A$ ne sadrži elemente oblika $(0,y)$, gdje je $y \neq 0$.

Pretpostavimo sada da $\overline{G}_A$ ne sadrži elemente oblika $(0,y)$, $y \neq 0$. Označimo sa

$$D_{\overline{A}} = \left\{ x \in X \,|\, (\exists y \in Y)\ (x,y) \in \overline{G}_A \right\} \ .$$

Skup $D_{\overline{A}}$ je linearan vektorski prostor. Zaista, $\overline{G}_A$ je linearan jer je on zatvorenje linearnog prostora G_A. Neka su sada $x_1, x_2 \in D_{\overline{A}}$. Tada postoje $y_1, y_2 \in Y$, takvi da je $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \overline{G}_A$. Zbog linearnosti $\overline{G}_A$, tada je

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \overline{G}_A \ ,$$

a ovo opet znači da je $x_1 + x_2 \in D_{\overline{A}}$.
Neka je $x \in D_{\overline{A}}$ i $\lambda \in \Phi$. Tada postoji $y \in Y$, takav da je $(x,y) \in \overline{G}_A$, te opet imamo da je

$$\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y) \in \overline{G}_A \ .$$

Dakle, $\lambda x \in D_{\overline{A}}$.

Sada tvrdimo da za svako $x \in D_{\overline{A}}$ postoji tačno jedno $y \in Y$, tako da je $(x,y) \in \overline{G}_A$. Zaista, da bar jedan y postoji, imamo na osnovu definicije skupa $D_{\overline{A}}$. Pretpostavimo da postoje dva, to jest $(x,y),(x,y') \in \overline{G}_A$. Zbog linearnosti skupa $\overline{G}_A$, vrijedi

$$(x,y) - (x,y') = (0, y - y') \in \overline{G}_A \ ,$$

a zbog polazne pretpostavke zaključujemo da mora biti $y = y'$.

Za proizvoljan $x \in D_{\overline{A}}$, označimo sa $y = \overline{A}x$ onaj postojeći jedinstveni $y \in Y$. Na taj način smo definisali novo preslikavanje $\overline{A}$, za koga je domen očigledno, upravo skup $D_{\overline{A}}$. Lahko se pokazuje da je $\overline{A}$ linearan operator, a također i to da je graf $G_{\overline{A}}$ operatora $\overline{A}$, upravo $\overline{G}_A$. Onda je $G_{\overline{A}}$ zatvoren skup, a time je $\overline{A}$ zatvoren operator. Kako je očigledno $G_A \subset \overline{G}_A = G_{\overline{A}}$, jasno je da je $\overline{A}$ zatvorenje operatora A.

Šta više, neka je A_1 bilo koje zatvorenje operatora A, to jest $G_A \subset G_{A_1}$, onda je

$$G_{\overline{A}} = \overline{G}_A \subset \overline{G}_{A_1} = G_{A_1} \ ,$$

a ovo znači da je $\overline{A} \subset A_1$, odnosno $\overline{A}$ je minimalno zatvorenje operatora A. □

Gornji teorem se može iskazati i u sljedećoj formi

Teorem 3.33. *Da bi linearan operator $A : X \to Y$ dopuštao zatvorenje potrebno je i dovoljno da ako vrijedi $x_n \to 0$ ($n \to \infty$, $x_n \in D_A$) i $Ax_n \to y$ ($n \to \infty$), onda mora biti $y = 0$.*

Ovaj oblik teorema nam daje način kako ćemo izvršiti zatvaranje operatora ako je to moguće. Naime, ako je gornji uslov ispunjen, onda definišemo operator $\overline{A}$ tako da mu je domen skup $D_{\overline{A}}$, svih $x \in X$ za koje postoji niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D_A$, tako da vrijedi

$$x_n \to x \ , \ Ax_n \to y \ , \ (n \to \infty) \ ,$$

gdje je $y \in Y$, takav da je

$$\overline{A}x = y = \lim_{n\to\infty} Ax_n \ .$$

Naravno, ostaje da vidimo kakva je veza između neprekidnosti i zatvorenosti operatora. U dosadašnjim izlaganjima uglavnom smo posmatrali neprekidne operatore. Međutim, i veoma jednostavni operatori, u primjenama česti, nisu neprekidni.

Primjer 3.21. Neka je $M \subset l_1$, skup svih nizova iz l_1 koji imaju samo konačno mnogo koordinata različitih od nula i neka je $A : M \to l_1$, zadat sa

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...) \in M \ , \ Ax = (0, x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...) \ .$$

A je linearan operator za koga je za proizvoljno $x \in M$

$$||Ax|| = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = ||x|| \ ,$$

to jest vrijedi $||A|| \leq 1$. Dakle, A je neprekidan operator.
Međutim, posmatramo li niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$, gdje je $x_n = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, ..., \frac{1}{2^n}, 0, ...)$ $(n \in \mathbb{N})$, jasno je da $x_n \to x_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, ..., \frac{1}{2^n}, ...) \in l_1$ $(n \to \infty)$, ali $x_0 \notin M$, pa A nije zatvoren operator. ♢

Gornji primjer nam pokazuje da neprekidnost linearnog operatora ne povlači njegovu zatvorenost. Zato iskažimo sljedeću tvrdnju, čiji dokaz je ostavljen čitaocu za vježbu.

Teorem 3.34. *Da bi neprekidan linearan operator bio zatvoren, potrebno je i dovoljno da je on definisan na potprostoru Banachovog prostora.*

Sljedeći primjer nam daje preslikavanje koje jeste zatvoreno ali nije neprekidno.

Primjer 3.22. Posmatrajmo operator $\frac{d}{dx} : C^1[0,1] \to C[0,1]$, zadat sa

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x) \ .$$

Za posmatrani operator diferenciranja se lahko pokazuje da je on linearan operator. Međutim, ako posmatramo niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1[0,1]$, gdje je $f_n(x) = x^n$, imamo

$$\left|\left|\frac{d}{dx} f_n(x)\right|\right| = \left|\left|nx^{n-1}\right|\right|_{C[0,1]} = n \ , \ n \in \mathbb{N} \ .$$

Iz ovoga je očigledno da operator diferenciranja nije ograničen operator.
Neka je $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1[0,1]$ proizvoljan niz, takav da

$$g_n \to g_0 \ \text{ i } \ \frac{dg_n}{dx} \to \phi \ , \ n \to \infty \ ,$$

druga od ovih pretpostavki znači da niz izvoda $(g_n')_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergira ka funkciji ϕ (po metrici prostora $C[0,1]$). Sada za proizvoljno $x \in [0,1]$ imamo

$$\begin{aligned}
\int_0^x \phi(t)dt &= \int_0^x \lim_{n\to\infty} \frac{dg_n}{dt}(t)dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^x \frac{dg_n}{dt}(t)dt \ \ (\text{ zbog uniformne konvergencije }) \\
&= \lim_{n\to\infty} (g_n(x) - g_n(0)) \\
&= g_0(x) - g_0(0) \ .
\end{aligned}$$

Dakle,

$$g_0(x) = g_0(0) + \int_0^x \phi(t)dt \ , \ x \in [0,1] \ .$$

Funkcija $\phi \in C[0,1]$ jer je ona kao granična vrijednost uniformno konvergentnog niza neprekidnih funkcija i sama neprekidna. To nam onda gornja jednakost daje da je $g_0 \in C^1[0,1]$, a osim toga jasno je da vrijedi $\frac{dg_0}{dx} = \phi$ na $[0,1]$. Ostaje nam pozvati se na Teorem 3.31 i konstatovati zatvorenost operatora. ♢

Narednim teoremom dajemo uslove pod kojima će zatvoren operator biti ograničen i poznat je pod nazivom **Banachov teorem o zatvorenom grafiku.**

Teorem 3.35. *Neka je A zatvoren linearan operator koji preslikava Banachov prostor X u Banachov prostor Y. Ako je skup D_A skup druge kategorije u X, onda vrijedi $D_A = X$ i A je neprekidan operator.*

Dokaz : Za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$, posmatrajmo skupove

$$X_n = \{x \in D_A \mid ||Ax|| \leq n||x||\} \ .$$

Jasno je da vrijedi

$$D_A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \ .$$

Kako je po pretpostavci D_A skup druge kategorije u X, postoji X_{n_0} koji je gust u nekoj kugli $K(x_0, r)$ $(r > 0)$.
Neka je sada $K(x_1, r_1)$, takva da je $K(x_1, r_1) \subset K(x_0, r)$, pri čemu je $x_1 \in X_{n_0}$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan (bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je $\varepsilon < \frac{r_1}{2}$). Ako je $y \in X$, takav da je $||y|| = r_1$, tada je $y + x_1 \in K(x_1, r_1)$. Kako je X_{n_0} gust u $K(x_1, r_1)$, postoji $z \in X_{n_0}$, takav da je $||x_1 + y - z|| < \varepsilon$. S druge strane imamo

$$\begin{aligned}
||z|| &= ||(z - x_1 - y) + (x_1 + y)|| \\
&\leq ||z - x_1 - y|| + ||x_1 + y|| \\
&\leq \varepsilon + ||x_1|| + ||y|| \\
&\leq \frac{r_1}{2} + ||x_1|| + r_1 \\
&< 2r_1 + ||x_1|| \ .
\end{aligned}$$

Takođe vrijedi

$$\begin{aligned}
||z - x_1|| &= ||(z - x_1 - y) + y|| \\
&\geq ||y|| - ||z - x_1 - y|| \\
&> r_1 - \varepsilon \geq \frac{r_1}{2} \ .
\end{aligned}$$

Kako su $x_1, z \in X_{n_0} \subset D_A$, tada i $z - x_1 \in D_A$, pa vrijedi

$$||A(z - x_1)|| \leq ||Ax_1|| + ||Az|| \leq n_0||x_1|| + n_0||z|| = n_0(||x_1|| + ||z||) \ .$$

Iz svega ovoga zaključujemo

$$\begin{aligned}
||A(z - x_1)|| &\leq n_0(||x_1|| + ||z||) \\
&\leq 2n_0(r_1 + ||x_1||) \\
&= \frac{2n_0(r_1 + ||x_1||)}{\frac{r_1}{2}} \frac{r_1}{2} \\
&\leq \frac{4n_0(r_1 + ||x_1||)}{r_1} ||z - x_1|| \ .
\end{aligned}$$

Označimo sa n_1 prvi prirodan broj koji nije manji od $\frac{4n_0(r+||x_1||)}{r_1}$. Posljednju nejednakost onda zapisujemo sa

$$||A(z - x_1)|| \leq n_1||z - x_1|| \ ,$$

a ovo znači da $z - x_1 \in X_{n_1}$. Dakle, pokazali smo da za svako $y \in X$, $||y|| = r_1$, postoji element iz X_{n_1} (to je upravo element $z - x_1$), koji proizvoljno dobro aproksimira element y.

Ako je sada $y \in K(0,r_1)$, to jest neka je $||y|| \leq r_1$, onda za element $y_1 = \frac{r_1}{||y||}y$, vrijedi $||y_1|| = r_1$, pa prema dokazanom, postoji $z_1 \in X_{n_1}$, takav da je za proizvoljno $\varepsilon > 0$

$$||y_1 - z_1|| < \varepsilon \ .$$

Ovo onda znači

$$\left|\left|y - \frac{||y||}{r_1}z_1\right|\right| < \frac{||y||}{r_1}\varepsilon \leq \varepsilon \quad (\text{jer } \frac{||y||}{r_1} \leq 1) \ ,$$

a zbog homogenosti skupova X_n (to jest ako $x \in X_n$, onda i $\lambda x \in X_n$, za proizvoljno $\lambda \in \Phi$) onda imamo da je za $z_1 \in X_{n_1}$, element $z = \frac{||y||}{r_1}z_1 \in X_{n_1}$, pa zaključujemo da proizvoljan $y \in K(0,r_1)$ možemo proizvoljno dobro aproksimirati elementom $z \in X_{n_1}$ odnosno, X_{n_1} je gust u kugli $K(0,r_1)$.

Pokažimo sada da je $K(0,r_1) \subset D_A$. Zaista, neka je $x \in K(0,r_1)$ proizvoljan. Kako je X_{n_1} gust u $K(0,r_1)$, postoji $y_1 \in X_{n_1}$, takav da vrijedi

$$||x - y_1|| < \frac{r_1}{2} \ .$$

Ovo znači da je $x - y_1 \in K(0,r_1)$, pa opet postoji $y_2 \in X_{n_1}$, takav da je

$$||x - y_1 - y_2|| < \frac{r_1}{2^2} \ .$$

Ako ovaj postupak produžimo, dobijamo niz $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X_{n_1}$ za koga je

$$||x - (y_1 + y_2 + \cdots + y_k)|| < \frac{r_1}{2^k} \ , \ k \in \mathbb{N} \ .$$

Označimo sa $z_k = y_1 + y_2 + \cdots + y_k$, $k \in \mathbb{N}$. Kako $y_i \in X_{n_1} \subset D_A$ ($i \in \mathbb{N}$), tada i $z_k \in D_A$, a osim toga vrijedi

$$z_k \to x \ , \ k \to \infty \ .$$

Takođe imamo

$$\begin{aligned} ||y_k|| &= ||(y_k + y_{k-1} + \cdots + y_1 - x) + (x - y_1 + y_2 + \cdots + y_{k-1})|| \\ &\leq \frac{r_1}{2^k} + \frac{r_1}{2^{k-1}} \\ &< \frac{r_1}{2^{k-2}} \ . \end{aligned}$$

Neka su sada $m,n \in \mathbb{N}$, $n > m$ proizvoljni. Tada imamo

$$\begin{aligned} ||Az_n - Az_m|| &= ||A(z_n - z_m)|| \\ &= ||A(y_n + y_{n-1} + \cdots + y_{m+1})|| \\ &\leq ||Ay_n|| + ||Ay_{n-1}|| + \cdots + ||Ay_{m+1}|| \\ &\leq n_1(||y_n|| + ||y_{n-1}|| + \cdots + ||y_{m+1}||) \\ &< n_1\left(\frac{r_1}{2^{n-2}} + \frac{r_1}{2^{n-3}} + \cdots + \frac{r_1}{2^{m-1}}\right) \\ &= \frac{r_1 n_1}{2^{m-1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-m-1}}\right) \\ &< \frac{r_1 n_1}{2^{m-1}} \ . \end{aligned}$$

Iz gornjeg zaključujemo da vrijedi

$$||Az_n - Az_m|| \to 0 \ , \ n,m \to \infty \ ,$$

a ovo znači da je $(Az_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u Y i zbog potpunosti prostora Y, on je i konvergentan. Neka je granična vrijednost tog niza element y. Tada imamo za niz $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D_A$

$$z_k \to x\ ,\ k \to \infty$$

$$Az_k \to y\ ,\ k \to \infty\ ,$$

pa zbog zatvorenosti operatora zaključujemo da $x \in D_A$ i $Ax = y$, to jest pokazali smo da je $K(0,r_1) \subset D_A$.

Opet na osnovu homogenosti skupa imamo da je za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$, skup $nK(0,r_1) \subset D_A$, a kako je

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nK(0,r_1)\ ,$$

imamo da je $X \subseteq D_A$, to jest mora vrijediti $X = D_A$.

Ostaje nam još pokazati ograničenost operatora A.
Vidjeli smo da za proizvoljno $x \in K(0,r_1)$, postoji niz $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $z_k = y_1 + y_2 + \cdots y_k$ ($y_i \in X_{n_1}$, $i \in \mathbb{N}$, $||y_k|| < \frac{r_1}{2^{k-2}}$), koji konvergira ka x i za koga je

$$Ax = \lim_{n\to\infty} Az_n\ .$$

Odavde je $||Ax|| \leq \lim_{n\to\infty} ||Az_n||$, i pri tome je

$$||Az_n|| \leq n_1(||y_1|| + ||y_2|| + \cdots + ||y_n||) < 4r_1n_1\ .$$

Neka je sada $x \in X$ proizvoljan. Tada $\frac{r_1}{||x||}x \in K(0,r_1)$, pa je na osnovu pokazanog zadovoljeno

$$\left|\left|A\left(\frac{r_1}{||x||}x\right)\right|\right| < 4n_1r_1$$

tojest, vrijedi $||Ax|| \leq 4n_1\,||x||$. Ovo znači da je operator A ograničen, a time je teorem dokazan. □

Sljedeća tvrdnja je direktna posljedica gornje teoreme jer je X kao Banachov prostor, skup druge kategorije u sebi.

Posljedica 3.36. *Ako je A zatvoren linearan operator definisan na cijelom Banachovom prostoru X, onda je A neprekidan operator.*

I sljedeća jednostavna tvrdnja ostavljena je čitaocu za vježbu.

Teorem 3.37. *Ako je linearan operator A zatvoren i ako postoji inverzni operator A^{-1}, tada je i A^{-1} zatvoren operator.*

Sljedeću tvrdnju nećemo dokazivati ali se preporučuje čitaocu da je analizom uporedi sa ranije spomenutom teoremom o otvorenom preslikavanju jer se u literaturi često i ovaj teorem naziva "teorem o otvorenom preslikavanju".

Teorem 3.38. *Neka je A zatvoren linearan operator koji slika Banachov prostor X u Banachov prostor Y. Neka je R_A skup druge kategorije u Y, onda vrijedi*

1. *$R_A = Y$.*

2. *Postoji konstanta $m > 0$, takva da za svako $y \in Y$, postoji $x \in X$, takav da je $Ax = y$ i $||y|| \geq m\,||x||$.*

3. *Ako A^{-1} postoji, onda je i on ograničen operator.*

4

Linearni funkcionali

Izučavajući operatore i njihove osobine, mi smo ustvari posmatrali preslikavanja sa proizvoljnog protora X u proizvoljan prostor Y. Ukoliko prostor Y preciziramo, tojest ukoliko je $Y = \mathbb{R}$ ili $Y = \mathbb{C}$, onda takvim operatorima dajemo poseban naziv.

Neka je X proizvoljan linearan prostor. Preslikavanje $f : X \longrightarrow \Phi$, gdje je $\Phi = \mathbb{R}$ ili $\Phi = \mathbb{C}$, nazivamo funkcional. Dakle, fukcionali su specijalna vrsta operatora, pa sve iskazano o operatorima vrijedi i za funkcionale. Tako imamo, za funkcional $f : X \longrightarrow \Phi$ kažemo da je aditivan, ako za proizvoljne $x, y \in X$ vrijedi

$$f(x+y) = f(x) + f(y) ,$$

a ako i za proizvoljan $\lambda \in \Phi$ vrijedi

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) ,$$

kažemo da je funkcional homogen. Za homogen i aditivan funkcional jednostavno kažemo da je linearan funkcional.

I normu funkcionala definišemo kao normu operatora, stim da normu u kodomenu zamjenjujemo sa modulom,

$$||f|| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{||x||} = \sup_{||x|| \leq 1} \frac{|f(x)|}{||x||} = \sup_{||x||=1} |f(x)| .$$

Primjer 4.1. Neka je $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan fiksan element. Tada je sa

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i , \; x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n ,$$

definisan linearan funkcional $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. ♢

Primjer 4.2. Neka je $x \in C[a,b]$ proizvoljan. Tada je sa

$$f(x) = \int_a^b x(t)dt ,$$

definisan linearan funkcional $f : C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. ♢

Primjer 4.3. Za fiksirano $t_0 \in [a,b]$, sa

$$g(x) = x(t_0)$$

je takođe definisan linearan funkcional na $C[a,b]$. ♢

Primjer 4.4. Na prostoru l_p $(1 \leq p \leq +\infty)$ primjer linearnog funkcionala je

$$f(x) = x_k , \; k \in \mathbb{N} ,$$

gdje je $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l_p$. ♢

Skup svih linearnih neprekidnih funkcionala, definisanih na normiranom linearnom vektorskom prostoru X, označavamo sa X^*. Dake, saglasno odgovarajućem skupu za operatore imamo da je $X^* = \mathscr{L}(X, \Phi)$. Na osnovu Teorema 3.10, prostor X^* je Banachov prostor jer je Φ takav, i nazivamo ga *dualni*, *adjungovani* ili *konjugovani* prostor prostora X.

4.1 Geometrijski smisao linearnih funkcionala

Neka je $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ proizvoljan linearan funkcional definisan na linearnom vektorskom prostoru X. Kao i kod operatora sa

$$Ker(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\} ,$$

označavamo jezgro funkcionala f. $Ker(f)$ je linearan vektorski prostor jer za $x,y \in Ker(f)$ i za proizvoljne $\lambda, \mu \in \Phi$ imamo

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = 0 .$$

Međutim, jezgro funkcionala ne mora biti potprostor prostora X, tj. on nije obavezno zatvoren skup. Šta više, vrijedi

Teorem 4.1. *Neka je X normiran prostor i f linearan funkcional na X. f je ograničen ako i samo ako je $Ker(f)$ zatvoren skup.*

Dokaz : Neka je f ograničen, dakle neprekidan funkcional i neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Ker(f)$, takav da $x_n \to x$ $(n \to \infty)$. Tada vrijedi

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 ,$$

tj. $x \in Ker(f)$.

Obratno, neka je $Ker(f)$ zatvoren skup. Ako je $Ker(f) = X$, to znači da je f funkcional identički jednak 0, a kao takav je i ograničen. Pretpostavimo zato da je $Ker(f) \neq X$, tj. postoji $x_0 \in X \setminus Ker(f)$. Zbog zatvorenosti jezgra, postoji $r > 0$, takav da $B(x_0,r) \cap Ker(f) = \varnothing$. Ne umanjujući opštost, neka je $f(x_0) = 1$ (inače bi umjesto x_0 posmatrali $\frac{x_0}{f(x_0)}$). Neka je sada $x \in X$ proizvoljan, takav da $x \notin Ker(f)$. Kako je $f(x) \neq 0$, onda je

$$-\frac{x}{f(x)} + x_0 \in Ker(f) ,$$

a to opet znači da $-\dfrac{x}{f(x)} + x_0 \notin B(x_0,r)$. Tada je

$$\left|\left|\left(-\frac{x}{f(x)} + x_0\right) - x_0\right|\right| \geq r$$

tojest, $\frac{||x||}{|f(x)|} \geq r$. Odavde sada imamo da vrijedi $|f(x)| \leq \dfrac{1}{r}||x||$, za svako $x \notin Ker(f)$. Kako ova nejednakost vrijedi trivijalno i za elemente jezgra, zaključujemo da je f ograničen funkcional. □

Posljedica 4.2. *Neka je f linearan funkcional na normiranom prostoru X. f je neograničen funkcional ako i samo ako $Ker(f)$ je pravi podskup od X i svuda gust u X.*

Lema 4.3. *Neka je f proizvoljan, netrivijalan ograničen linearan funkcional na linearnom vektorskom prostoru X. Kodimenzija potprostora $Ker(f)$ jednaka je 1.*

Dokaz : Prije svega, kako je f ograničen funkcional, na osnovu Teoreme 4.1, $Ker(f)$ je zatvoren pa je kao takav i potprostor od X. Neka je $x_0 \in X$, takav da $x_0 \notin Ker(f)$, tj. $f(x_0) \neq 0$ (takav postoji jer je f netrivijalan). Bez umanjenja opštosti, pretpostavimo da je $f(x_0) = 1$ (u suprotnom bi posmatrali element $\frac{x_0}{f(x_0)}$). Za proizvoljan $x \in X$, označimo sa

$$y = x - f(x)x_0 .$$

Kako je $f(y) = f(x - f(x)x_0) = f(x) - f(x)f(x_0) = 0$, jasno $y \in Ker(f)$. Dakle, za proizvoljan $x \in X$ imamo

$$x = \alpha x_0 + y \ , \text{ gdje je } y \in Ker(f) \ .$$

Tvrdimo sada da je gornja reprezentacija elementa x jedinstvena. Zaista, neka je

$$x = \alpha_1 x_0 + y_1 \ \text{ i } \ x = \alpha_2 x_0 + y_2 \ , \ y_1, y_2 \in Ker(f) \ , \ \alpha_1, \alpha_2 \in \Phi \ .$$

Oduzimanjem ove dvije jednakosti bi dobili $(\alpha_1 - \alpha_2)x_0 = y_2 - y_1$. Ako bi bilo $\alpha_1 \neq \alpha_2$, to bi značilo da je

$$x_0 = \frac{y_2 - y_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \in Ker(f) \ ,$$

što protivriječi izboru elementa x_0. Dakle, reprezentacija je jedinstvena.

Neka su sada $x_1, x_2 \in X$. Prema prethodnom postoje jedinstvene reprezentacije

$$x_1 = f(x_1)x_0 + y_1 \ , \ y_1 \in Ker(f) \ ,$$

$$x_2 = f(x_2)x_0 + y_2 \ , \ y_2 \in Ker(f) \ .$$

Tada je

$$x_1 - x_2 = (f(x_1) - f(x_2))x_0 + (y_1 - y_2) \ .$$

Iz ovoga sada vidimo da će $x_1 - x_2 \in Ker(f)$ ako i samo ako je $f(x_1) - f(x_2) = 0$, tj. x_1 i x_2 pripadaju istoj klasi ekvivalencije količničkog prostora $X/Ker(f)$ ako i samo ako je $f(x_1) = f(x_2)$.

Označimo sa ξ_0 onu klasu ekvivalencije koja sadrži element x_0. Ako je sada ξ proizvoljna klasa ekvivalencije, ona je određena bilo kojim svojim predstavnikom, a na osnovu gornjeg, za predstavnika možemo izabrati upravo elemet αx_0. Ovo opet znači da vrijedi

$$\xi = \alpha \xi_0 \ ,$$

za proizvoljnu klasu ekvivalencije, a to ne znači ništa drugo nego da je dimenzija količničkog prostora $X/Ker(f)$ jednaka 1. $\square$

Lema 4.4. *Ukoliko dva linearna funkcionala imaju ista jezgra, onda su oni proporcionalni.*

Dokaz : Neka za linearne funkcionale f i g vrijedi $Ker(f) = Ker(g)$. Neka je x_0 takav da je $f(x_0) = 1$. Tada na osnovu dokaza gornje leme imamo za proizvoljno x

$$x = f(x)x_0 + y \ , \ y \in Ker(f) = Ker(g) \ .$$

Djelujmo funkcionalom g na x, dobijamo

$$g(x) = f(x)g(x_0) + g(y) = f(x)g(x_0) \ .$$

Ako bi sada imali da je $g(x_0) = 0$, to bi značilo da je funkcional g identički jednak nuli, ali onda bi zbog jednakosti jezgara i funkcional f bio identički jednak nuli, što nije moguće zbog izbora elementa x_0. Dakle $g(x_0) \neq 0$, a to onda znači $\frac{g(x)}{f(x)} = g(x_0)$, za proizvoljno x. $\square$

Lema 4.5. *Neka je X linearan vektorski prostor i L njegov potprostor kodimenzije 1. Tada postoji ograničen linearan funkcional na X takav da je $Ker(f) = L$.*

Dokaz : Kako je kodimenzija od L u X jednaka 1, postoji $x_0 \in X$ takav da se svaki $x \in X$ može predstaviti na jedinstven način u obliku

$$x = \alpha x_0 + y \ ; \ \alpha \in \Phi \ , \ y \in L \ .$$

Definišimo sada funkcional $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, sa $f(x) = \alpha$. Jednostavno se sada pokazuje da vrijedi $Ker(f) = L$. $\square$

Neka je L potprostor prostora X, kodimenzije 1. Tada L predstavlja hiperpovrš u prostoru X. Međutim, svaka klasa ekvivalencije iz X/L takođe predstavlja hiperpovrš datog prostora i to "paralelnu" potprostoru L. Pri tome pod "paralelnošću" ovdje podrazumijevamo da se svaka od tih klasa može dobiti paralelnim pomjeranjem ili translacijom potprostora L za neki vektor $x_0 \in X$,

$$\xi \in X/L \ , \ \xi = L + x_0 = \{y \mid y = x + x_0 \ , \ x \in L\} \ .$$

Ako je $x_0 \in L$, tada je $\xi = L$. U suprotnom, ako $x_0 \notin L$, onda je $\xi \neq L$.

Lema 4.6. *Neka je f proizvoljan netrivijalan, ograničen linearan funkcional na X. Tada je skup*

$$H = \{x \in X \mid f(x) = 1\} \ ,$$

hiperpovrš u prostoru X, šta više, paralelna je potprostoru $Ker(f)$.

Dokaz : Kao što smo vidjeli, $Ker(f)$ zaista jeste potprostor od X i pri tome mu je kodimenzija 1, te je i hiperpovrš. Neka je sada $y \in H$ proizvoljan, tj. $f(y) = 1$. Kako se svaki vektor $x \in X$ može predstaviti na jedinstven način sa

$$x = \alpha x_0 + y' \ , \ \alpha \in \Phi \ , \ y' \in Ker(f) \ ,$$

(za neko $x_0 \in X$) to isto će vrijediti i za element y, tj. postoje jedinstveni $\alpha' \in \Phi$ i $y' \in Ker(f)$, takvi da je $y = \alpha' x_0 + y'$. Kako je

$$f(y) = \alpha' f(x_0) + f(y') = \alpha' f(x_0) = 1 \ ,$$

zaključujemo da mora biti $\alpha' = \frac{1}{f(x_0)}$, a to daje da se proizvoljan vektor $y \in H$, može predstaviti u obliku

$$y = \frac{x_0}{f(x_0)} + y' \ , \ y' \in Ker(f) \ .$$

Ovo ne znači ništa drugo nego da je kodimenzija od H u X jednaka 1, tj. H je hiperpovrš, a osim toga iz posljednje jednakosti zaključujemo da vrijedi

$$H = Ker(f) + \frac{x_0}{f(x_0)} \ .$$

$\square$

Šta više, vrijedi i obrat ovog tvrđenja.

Lema 4.7. *Neka je H proizvoljna hiperpovrš u prostoru X, paralelna potprostoru $L \subset X$. Tada postoji jedinstven ograničen linearan funkcional f na X, takav da je*

$$H = \{x \in X \mid f(x) = 1\} \ .$$

Dokaz : Neka je za neko $x_0 \in X$, $H = L + x_0$. Tada se svaki vektor $x \in X$ može na jednoznačan način predstaviti u obliku

$$x = \alpha x_0 + y \ , \ y \in L \ .$$

Stavljajući da je $f(x) = \alpha$, dobijamo traženi funkcional jer će u tom slučaju hiperpovrš biti određena sa $f(x) = 1$. Ako bi postojao i funkcional g na X, takav da je za $x \in H$, $g(x) = 1$, tada bi moralo biti $g(y) = 0$, za $y \in L$, a to bi zbog

$$g(\alpha x_0 + y) = \alpha = f(\alpha x_0 + y) \ ,$$

značilo poklapanje funkcionala. $\square$

Sa ove dvije leme smo uspostavili obostrano jednoznačno pridruživanje između svih hiperpovrši posmatranog prostora X i na njemu definisanih funkcionala, sa čime smo onda dobili i geometrijsku interpretaciju linearnih funkcionala

4.2 Hahn-Banachov teorem

U svakom Banachovom prostoru preslikavanje identički jednako nuli, predstavlja jedan ograničen linearan funkcional. Postavlja se pitanje, da li postoje i drugi, netrivijalni funkcionali na proizvoljnom Banachovom prostoru? Ako postoje, mogu li im se unaprijed pripisati, i u kojoj mjeri, izvjesne osobine? Specijalno, postoji li ograničen linearan funkcional jednak nuli na nekom pravom potprostoru Banachovog prostora, a da pri tome ne isčezava na čitavom prostoru? Na sva ova pitanja egzistencije, odgovor nam daje Hahn-Banachov teorem o produženju linearnog ograničenog funkcionala. Bez ovog teorema, današnja funkcionalna analiza bi bila sasvim drugačija. Prve rezultate vezane za ovaj teorem dali su Riesz i Helly na samom početku dvadesetog vijeka, a Hahn i Banach će ga 1920. godine postaviti i dokazati u današnjem obliku (za realan slučaj), neovisno jedan od drugog.

Po svojoj eleganciji i jačini, Hahn-Banachov teorem je omiljen u matemati-čkim krugovima. Neki od ”nadimaka” ovog teorema su ”Analitička forma aksioma izbora” i ”Krunski dragulj funkcionalne analize”. Neophodan je alat u funkcionalnoj analizi, ali i u drugim oblastima matematike, kao što su teorija upravljanja, konveksno programiranje, teorija igara, neophodan je u dokazu egzistencije Greenove funkcije, u formulaciji termodinamike i sl.

Teorem 4.8 (Hahn-Banachov teorem, realan slučaj). *Neka je X realan Banachov prostor i neka je L lineal u X. Neka je na L definisan ograničen linearan funkcional f. Tada postoji ograničen linearan funkcional f^*, definisan na cijelom X, takav da vrijedi*

- $(\forall x \in L)\ f^*(x) = f(x)$ *i*
- $||f^*|| = ||f||$.

Dokaz : Neka je na L definisan ograničen linearan funkcional f. Slučaj $L = X$ je trivijalan, zato pretpostavimo da je L pravi potprostor od X. Tada postoji $x_0 \in X$, takav da $x_0 \notin L$. Označimo sa L_0 lineal generisan elementom x_0, tj.

$$L_0 = \{x \in X \,|\, x = \lambda x_0\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}\}\ .$$

Neka je sada $L_1 = L \oplus L_0$, koji je zbog konačne dimenzije lineala L_0, takođe potprostor od X. Pokažimo kao prvo da se naš funkcional može produžiti na L_1, bez promjene norme.

Zbog direktne sume, svaki se element $x \in L_1$ može na jedinstven način zapisati u obliku

$$x = l + \lambda x_0\ ,\ l \in L\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}\ .$$

(Za svako x, λ i l su jedinstveno određeni.)

Ne gubeći na opštosti, pretpostavimo da je $||f|| = 1$. Tada za proizvoljne $x, y \in L$ imamo

$$\begin{aligned} f(x-y) &\leq |f(x-y)| \\ &\leq ||f||\ ||x-y|| = ||x-y|| = ||x-x_0+x_0-y|| \\ &\leq ||x-x_0|| + ||x_0-y||\ . \end{aligned}$$

Zbog linearnosti funkcionala, tj. $f(x-y) = f(x) - f(y)$, iz gornjeg zaključujemo da vrijedi

$$f(x) - ||x-x_0|| \leq f(y) + ||x_0-y||\ .$$

Odavde, uzimajući prvo supremum lijeve strane, a onda infimum desne, dobijamo da vrijedi

$$\sup\{f(x) - ||x-x_0|| \mid x \in L\} \leq \inf\{f(y) + ||x_0-y|| \mid y \in L\}\ .$$

Zbog gustosti skupa $\mathbb{R}$, postoji $k \in \mathbb{R}$, takav da je

$$\sup\{f(x) - ||x-x_0|| \mid x \in L\} \leq k \leq \inf\{f(y) + ||x_0-y|| \mid y \in L\}\ .$$

Definišimo sada funkcional $f_1 : L_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, na sljedeći način: za $x = l + \lambda x_0 \in L_1$, neka je po definiciji

$$f_1(x) = f(l) + \lambda \cdot k \ .$$

Za $x' = l' + \lambda' x_0$ i $x'' = l'' + \lambda'' x_0$ iz L_1 i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, vrijedi

$$\begin{aligned} f_1(\alpha x' + \beta x'') &= f_1((\alpha l' + \beta l'') + (\alpha\lambda' + \beta\lambda'')x_0) \\ &= f(\alpha l' + \beta l'') + (\alpha\lambda' + \beta\lambda'')k \\ &= \alpha f(l') + \beta f(l'') + \alpha\lambda' x_0 + \beta\lambda'' x_0 \\ &= \alpha f_1(x') + \beta f_1(x'') \ , \end{aligned}$$

dakle, f_1 je linearan funkcional. Osim toga, kako je $L \subset L_1$, to za $x \in L$ imamo da je $x = x + 0 \cdot x_0$, a time je

$$f_1(x) = f(x) + 0 \cdot k = f(x) \ ,$$

pa zaključujemo da se funkcionali f i f_1 poklapaju na L, tj. f_1 je produženje funkcionala f.

Ostaje nam još pokazati da je pri tom produženju očuvana norma. Neka je $x \in L_1$ proizvoljan. Tada je za jedinstvene $l \in L$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, $x = l + \lambda x_0$, i pri tome je $f_1(x) = f(l) + \lambda k$. Neka je sada $\lambda > 0$. Zbog načina izbora broja k, vrijedi

$$f_1(x) = f(l) + \lambda k \le f(l) + \lambda(f(y) + ||y - x_0||) = f(l) + f(\lambda y) + ||\lambda y - \lambda x_0|| \ ,$$

za proizvoljno $y \in L$. Odaberimo y tako da vrijedi $\lambda y = -l$. Tada imamo

$$f_1(x) \le ||-l - \lambda x_0|| = ||l + \lambda x_0|| = ||x|| \ . \tag{4.1}$$

S druge strane, ponovo zbog izbora broja k vrijedi

$$f_1(x) = f(l) + \lambda k \ge f(l) + \lambda(f(y) - ||y - x_0||) = f(l) + f(\lambda y) - ||\lambda y - \lambda x_0|| \ ,$$

za sve $y \in L$. Odaberimo opet da je $\lambda y = -l$, dobijamo

$$f_1(x) \ge -||-l - \lambda x_0|| = -||l + \lambda x_0|| = -||x|| \ . \tag{4.2}$$

Iz (4.1) i (4.2) zaključujemo da vrijedi

$$|f_1(x)| \le ||x|| \ , \text{ za sve } x \in L_1 \ .$$

Sve gornje je pokazano za slučaj ako je $\lambda > 0$. Ako je $\lambda < 0$, tada bi posmatrali $-x = l' + \lambda' x_0$, gdje je $\lambda' = -\lambda$, a $l' = -l$, te bi prema dokazanom imali

$$|f_1(x)| = |f_1(-x)| \le ||-x|| = ||x|| \ .$$

Ako je na kraju $\lambda = 0$, tada je $x \in L$, pa zbog poklapanja funkcionala vrijedi

$$|f_1(x)| = |f(x)| \le ||f|| ||x|| = ||x|| \ .$$

Iz svega rečenog zaključujemo da za svako $x \in L_1$ vrijedi $|f_1(x)| \le ||x||$, tj.

$$||f|| \le 1 \ . \tag{4.3}$$

S druge strane opet, zbog definicije norme funkcionala i osobina supremuma imamo

$$||f_1|| = \sup_{x \in L_1 \setminus \{0\}} \frac{|f_1(x)|}{||x||} \ge \sup_{x \in L \setminus \{0\}} \frac{|f_1(x)|}{||x||} = \sup_{x \in L \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{||x||} = ||f|| = 1 \ ,$$

tj. vrijedi

$$||f_1|| \geq 1 \ . \tag{4.4}$$

Iz (4.3) i (4.4) zaključujemo da vrijedi

$$||f_1|| = 1 \ ,$$

te smo dobili produženje funkcionala bez promjene norme.

Posmatrajmo sada familiju $\mathcal{F}$, svih produženja funkcionala f bez promjene norme. Na osnovu gore pokazanog, $\mathcal{F} \neq \varnothing$. U $\mathcal{F}$ uvedimo sljedeću relaciju, za $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$

$$f_1 \preceq f_2 \ \Leftrightarrow \ f_2 \text{ je produženje funkcionala } f_1 .$$

Trivijalno se pokazuje da je sa uvedenom relacijom, $\mathcal{F}$ parcijalno uređen skup. Pokažimo sada da su u $\mathcal{F}$ ispunjeni uslovi za primjenu Zornove leme.

Neka je $\mathcal{F}_0$ proizvoljan lanac u $\mathcal{F}$ (svi elementi u $\mathcal{F}_0$ su međusobno uporedivi uvedenom relacijom). Označimo sa

$$L' = \bigcup_{i\in I} L_i \ ,$$

gdje su L_i ($i \in I$) lineali na kojima su definisani funkcionali $f_i \in \mathcal{F}_0$ i koji predstavljaju proširenja lineala L. Kako je $\mathcal{F}_0$ lanac, to je za proizvoljne $f_i, f_j \in \mathcal{F}_0$ ili $f_i \preceq f_j$ ili $f_j \preceq f_i$, a to onda znači da za odgovarajuće lineale vrijedi ili $L_i \subseteq L_j$ ili $L_j \subseteq L_i$. Koristeći ovo, lahko dokazujemo da je L' lineal u X i da je $L \subseteq L'$, a takođe za svako $i \in I$ je $L_i \subseteq L'$.

Definišimo sada funkcional $f_0 : L' \longrightarrow \mathbb{R}$ na sljedeći način: za proizvoljno $x \in L'$, postoji $i \in I$, takav da je $x \in L_i$, i stavimo

$$f_0(x) = f_i(x) \ .$$

Neka je $x \in L'$ proizvoljan i neka je $i \in I$ onaj za koga je $x \in L_i$. Ako je L_j neki drugi lineal koji sadrži x, tada za odgovarajuće funkcionale vrijedi

$$f_i \preceq f_j \ \text{ ili } \ f_j \preceq f_i \ .$$

Neka je recimo $f_i \preceq f_j$. Ovo onda znači da je funkcional f_j proširenje funkcionala f_i, a onda se njihove vrijednosti poklapaju na L_i, tj.

$$f_0(x) = f_i(x) = f_j(x) \ ,$$

te vrijednost funkcionala f_0 ne ovisi o tome koji od funkcionala biramo nego samo o x, pa je f_0 dobro definisan funkcional.

Ako su $x, y \in L'$ proizvoljni, tada postoje L_i i L_j takvi da je $x \in L_i$ i $y \in L_j$, ali pri tome zbog uređenosti lanca, još vrijedi npr. $L_i \subseteq L_j$. Dakle, $x, y \in L_j$, a kako je on lineal, to mamo

$$f_0(x+y) = f_j(x+y) = f_j(x) + f_j(y) = f_0(x) + f_0(y) \ .$$

Na sličan način se pokazuje da za proizvoljno $\lambda \in \mathbb{R}$, vrijedi

$$f_0(\lambda x) = \lambda f(x) \ .$$

Dakle, f_0 je linearan funkcional.

Kako je za proizvoljan $f \in \mathcal{F}$, $||f|| = 1$, tada je za proizvoljno $x \in L'$

$$|f_0(x)| = |f_i(x)| \leq ||x|| \ ,$$

odnosno $||f_0|| \leq 1$. S druge strane imamo

$$||f_0|| = \sup_{x\in L'\setminus\{0\}} \frac{|f_0(x)|}{||x||} \geq \sup_{x\in L_i\setminus\{0\}} \frac{|f_0(x)|}{||x||} = \sup_{x\in L_i\setminus\{0\}} \frac{|f_i(x)|}{||x||} = ||f_i|| \ ,$$

za proizvoljno $i \in I$, a to znači $||f_0|| \geq 1$. Dakle, vrijedi

$$||f_0|| = 1 \ .$$

Iz svega navedenog zaključujemo da je f_0 proširenje funkcionala f, bez promjene norme, ali takođe i proširenje svakog od funkcionala $f_i \in \mathcal{F}_0$. Dakle,

$$(\forall f_i \in \mathcal{F}_0) \ f_i \preceq f_0 \ ,$$

a što ne znači ništa drugo do da lanac $\mathcal{F}_0$ ima bar jedno gornje ograničenje. Zbog proizvoljnosti lanca, a na osnovu Zornove leme, zaključujemo da u $\mathcal{F}$ postoji maksimalan element, označimo ga sa f^*. Kao prvo, imamo da je f^* proširenje funkcionala f, bez promjene norme, a kao drugo ostaje nam vidjeti da je ovaj funkcional definisan na čitavom X.
Kad to ne bi bilo, tj. $D_{f^*} \subset X$, postojao bi $z \in X$, takav da $z \notin D_{f^*}$. Tada bi funkcional f^*, na osnovu prvog dijela dokaza, mogli proširiti bez promjene norme na lineal

$$L_1^* = D_{f^*} \oplus L_1 \ ,$$

gdje je $L_1 = \{x \in X |\ x = \lambda z \ , \ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Međutim, ovo bi značilo da f^* nije maksimalan element u $\mathcal{F}$, pa prema tome ova mogućnost otpada, tj. mora vrijediti

$$D_{f^*} = X \ ,$$

čime je teorem dokazan. □

Hahn-Banachov teorem je jedna "ogromna" teorema, a to potvrđuju i mnoge posljedice, tj. tvrdnje koje se dokazuju koristeći ovaj teorem. Mi ćemo ovdje navesti samo neke od njih.

Teorem 4.9. *Neka je x_0 proizvoljan nenula element prostora X. Tada na X postoji linearan funkcional f^*, takav da vrijedi*

- $||f^*|| = 1$.
- $f^*(x_0) = ||x_0||$.

Dokaz : Neka je $0 \neq x_0 \in X$ proizvoljan. Posmatrajmo lineal

$$L = \{x |\ x = \lambda x_0 \ , \ \lambda \in \Phi\} \ .$$

Definišimo $f : L \longrightarrow \Phi$, na sljedeći način, za $x = \lambda x_0 \in L$

$$f(x) = \lambda ||x_0|| \ .$$

Za $x', x'' \in L$ i $a, b \in \Phi$, imamo

$$\begin{aligned} f(ax' + bx'') &= f(a\lambda' x_0 + b\lambda'' x_0) \\ &= f((a\lambda' + b\lambda'')x_0) = (a\lambda' + b\lambda'')||x_0|| = af(x') + bf(x'') \ , \end{aligned}$$

te je f linearan funkcional. Dalje imamo

$$||f|| = \sup_{x\in L\setminus\{0\}} \frac{|f(x)|}{||x||} = \sup_{\lambda\in\Phi} \frac{|\lambda||x_0|||}{||\lambda x_0||} = 1 \ .$$

Iz same definicije funkcionala vidimo da je zbog $x_0 = 1 \cdot x_0$

$$f(x_0) = ||x_0|| \ .$$

Pozivajući se sada na Hahn-Banachov teorem, dati funkcional f možemo produžiti na čitav prostor do funkcionala f^*, koji ima istu normu kao i f (tj. vrijedi prva osobina) i pri tome se poklapa sa funkcionalom f na L (tj. vrijedi druga tražena osobina). $\Box$

Teorem 4.10. *Neka je X Banachov prostor i neka je L pravi potprostor od X. Neka je $x_0 \in X \setminus L$. Tada postoji ograničen linearan funkcional f^* na X, takav da vrijedi*

- $||f^*|| = 1$.
- $f^*(x_0) = d = d(x_0, L)$.
- $(\forall x \in L)\ f^*(x) = 0$.

Dokaz : Neka je $x_0 \in X \setminus L$. Posmatrajmo skup

$$L_1 = \{x \in X \,|\, x = \lambda x_0 \ , \ \lambda \in \Phi\} \ .$$

L_1 je jednodimenzionalan potprostor od X, te je potprostor i

$$L' = L \oplus L_1 \ ,$$

i pri tome se onda svaki $x \in L'$, na jednoznačan način može zapisati u obliku

$$x = l + \lambda x_0 \ , \ l \in L \ , \ \lambda \in \Phi \ .$$

Definišimo na L' funkcional f_0 sa

$$f_0(x) = f_0(l + \lambda x_0) = \lambda d \ ,$$

gdje je d udaljenost elementa x_0 od potprostora L, tj. $d = d(x_0, L)$. Očigledno za $x \in L$ vrijedi $f_0(x) = 0$, a takođe i $f_0(x_0) = d$. Izračunajmo normu ovog funkcionala.

$$\begin{aligned}
||f_0|| &= \sup_{x \in L'} \frac{|f_0(x)|}{||x||} = \sup_{l \in L,\ \lambda \in \Phi} \frac{|f_0(l + \lambda x_0)|}{||l + \lambda x_0||} \\
&= \sup_{l \in L,\ \lambda \in \Phi} \frac{|\lambda d|}{||l + \lambda x_0||} = \sup_{l \in L,\ \lambda \in \Phi} \frac{d}{||x_0 + \frac{l}{\lambda}||} \\
&= d \sup_{l' \in L} \frac{1}{||x_0 + l'||} = \frac{d}{\inf_{l' \in L} ||x_0 + l'||} \\
&= \frac{d}{d} = 1 \ .
\end{aligned}$$

Ostaje nam samo primjeniti Hahn-Banachov teorem i utvrditi postojanje ovakvog funkcionala na čitavom prostoru. $\Box$

Sljedeća posljedica često se naziva teorem o postojanju dovoljnog broja neprekidnih funkcionala.

Teorem 4.11. *Neka je X Banachov prostor i neka su $x, y \in X$. Ako za svaki $f \in X^*$ vrijedi $f(x) = f(y)$, tada je $x = y$.*

Dokaz : Ako je $x \neq y$, onda je $x - y \neq 0$, pa na osnovu prve posljedice, postoji $f \in X^*$, takav da je $f(x - y) = ||x - y||$. Ovo znači da je $f(x) \neq f(y)$, pa kontrapozicijom imamo iskazanu tvrdnju. $\Box$

Ovaj teorem smo mogli iskazati i u ekvivalentnom obliku: Ako je $f(x) = 0$ za sve $f \in X^*$, onda je $x = 0$.

4.3 Reprezentacije ograničenih linearnih funkcionala

4.3.1 Konačnodimenzionalni prostori

Teorem 4.12. *Neka je X konačnodimenzionalan vektorski prostor dimenzije n, nad poljem Φ. Neka je $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ baza prostora X i neka su $a_1, a_2, \dots, a_n$ proizvoljni elementi iz Φ. Tada postoji jedinstven linearan funkcional $f : X \longrightarrow \Phi$ takav da vrijedi*

$$f(e_i) = a_i \ , \ (i = 1, 2, \dots, n) \ .$$

Dokaz : Neka je X konačnodimenzionalan vektorski prostor dimenzije n, nad poljem Φ i neka je $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ njegova baza. Svaki vektor $x \in X$ na jedinstven način se može prikazati kao linearna kombinacija vektora baze

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \ .$$

Neka su a_i $(i = 1, 2, \dots, n)$, dati elementi iz Φ. Za proizvoljan vektor $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in X$, definišimo funkcional $f : X \longrightarrow \Phi$ sa

$$f(x) = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \dots + \xi_n a_n \ .$$

Vektore baze prostora X možemo prikazati kao uređene n-torke, sa svim nulama i na k-tom mjestu 1,

$$e_k = (0, 0, 0, \dots, \underbrace{1}_{k}, \dots, 0, 0) \ , \ k = 1, 2, ..., n \ ,$$

pa je očigledno $f(e_i) = a_i$ za $i = 1, 2, \dots, n$.
Dokažimo da je funkcional f linearan. Neka su $\lambda, \mu \in \Phi$ proizvoljni i neka su $x, y \in X$, sa reprezentacijama $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ i $y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i$. Tada je

$$f(x) = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \dots + \xi_n a_n \ \text{ i } \ f(y) = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \dots + \eta_n a_n \ .$$

Kako je X linearan vektorski prostor, to je $\lambda x + \mu y \in X$, pa je njegova reprezentacija

$$\lambda x + \mu y = (\lambda \xi_1 + \mu \eta_1) e_1 + (\lambda \xi_2 + \mu \eta_2) e_2 + \dots + (\lambda \xi_n + \mu \eta_n) e_n \ .$$

Na osnovu definicije funkcionala f je

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= (\lambda \xi_1 + \mu \eta_1) a_1 + (\lambda \xi_2 + \mu \eta_2) a_2 + \dots + (\lambda \xi_n + \mu \eta_n) a_n \\ &= \lambda(\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \dots + \xi_n a_n) + \mu(\eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \dots + \eta_n a_n) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y) \ . \end{aligned}$$

Dakle, definisani funkcional f je linearan.
Ostaje da pokažemo jedinstvenost funkcionala f. Pretpostavimo da su f i g dva linearna funkcionala iz X^*, takva da je

$$f(e_i) = a_i \ \text{ i } \ g(e_i) = a_i \ \ , \ \ i = 1, 2, ..., n \ .$$

Neka je $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ proizvoljan vektor iz X. Zbog linearnosti funkcionala f i g imamo

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n) = \xi_1 f(e_1) + \xi_2 f(e_2) + \dots + \xi_n f(e_n) \\ &= \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \dots + \xi_n a_n = \xi_1 g(e_1) + \xi_2 g(e_2) + \dots + \xi_n g(e_n) \\ &= g(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n) = g(x) \ , \end{aligned}$$

a ovo znači da su f i g jednaki funkcionali. $\square$

Navedeni teorem nam ustvari govori da je reprezentacija linearnog funkcionala $f : X \longrightarrow \Phi$ na konačnodimenzionalnom prostoru X data sa

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i \ , \tag{4.5}$$

gdje je $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in X$ i $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Phi$

Reprezentacija linearnog funkcionala f na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru se može prikazati i u matričnom obliku. Neka je $x \in X$ proizvoljan vektor konačnodimenzionalnog prostora X. Prikažimo ga u obliku matrice formata ”$n \times 1$”,

$$x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} .$$

Sa ”a” označimo matricu vrstu ”$1 \times n$”,

$$a = [a_1 \ a_2 \ldots a_n] \ ,$$

gdje su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dati skalari iz Φ. Proizvod ovih matrica definiše linearan funkcional na X,

$$f(x) = [a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_n] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_n\xi_n \ , \tag{4.6}$$

Primjer 4.5. Preslikavanje $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, zadato sa $f(x) = 2\xi_1 - \xi_2 + 4\xi_3$, je linearan funkcional.

Neka su $x = \sum_{i=1}^{3} \xi_i e_i$ i $y = \sum_{i=1}^{3} \eta_i e_i$ dva proizvoljna vektora iz $\mathbb{R}^3$. Tada je, prema definiciji preslikavanja f,

$$f(x) = 2\xi_1 - \xi_2 + 4\xi_3 \ ,$$
$$f(y) = 2\eta_1 - \eta_2 + 4\eta_3 \ .$$

Sa $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ označimo vektore baze prostora $\mathbb{R}^3$. Odavde, na osnovu Teorema 4.12, vidimo da je $f(e_1) = 2$, $f(e_2) = -1$, $f(e_3) = 4$.
Neka su $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Tada je

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu y &= \lambda\xi_1 e_1 + \lambda\xi_2 e_2 + \lambda\xi_3 e_3 + \mu\eta_1 e_1 + \mu\eta_2 e_2 + \mu\eta_3 e_3 \\ &= (\lambda\xi_1 + \mu\eta_1)e_1 + (\lambda\xi_2 + \mu\eta_2)e_2 + (\lambda\xi_3 + \mu\eta_3)e_3 \ , \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= f((\lambda\xi_1 + \mu\eta_1)e_1 + (\lambda\xi_2 + \mu\eta_2)e_2 + (\lambda\xi_3 + \mu\eta_3)e_3) \\ &= (\lambda\xi_1 + \mu\eta_1)f(e_1) + (\lambda\xi_2 + \mu\eta_2)f(e_2) + (\lambda\xi_3 + \mu\eta_3)f(e_3) \\ &= 2(\lambda\xi_1 + \mu\eta_1) - (\lambda\xi_2 + \mu\eta_2) + 4(\lambda\xi_3 + \mu\eta_3) \\ &= \lambda(2\xi_1 - \xi_2 + 4\xi_3) + \mu(2\eta_1 - \eta_2 + 4\eta_3) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y) \ . \end{aligned}$$

Kako ovo vrijedi za proizvoljne vektore $x, y \in \mathbb{R}^3$ i proizvoljne skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, zaključujemo da je dato preslikavanje f linearan funkcional na $\mathbb{R}^3$. $\diamondsuit$

4.3.2 Beskonačnodimenzionalni prostori

Teorem 4.13. *Ograničen linearan funkcional f na prostoru ℓ_p, $(1<p<+\infty)$ ima reprezentaciju*

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i\ ,$$

gdje je $x=(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\ell_p$, $y=(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\ell_q$, $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$, pri čemu je $\|f\|=\|y\|_{\ell_q}$. Funkcionalom f na ℓ_p, tačka $y\in\ell_q$ je jednoznačno određena.

Dokaz : Neka je $1<p<+\infty$. Za proizvoljan $x=(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\ell_p$, vrijedi $\sum_{i\in\mathbb{N}}|\xi_i|^p<+\infty$ i norma u ℓ_p je definisana sa $\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Za $x=(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}\in l_p$ i $y=(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}\in l_q$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ i $1<p<\infty)$, izraz $\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i$ uvijek ima smisla jer na osnovu Hölderove nejednakosti vrijedi

$$\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}=||x||_{l_p}||y||_{l_q}<+\infty\ .$$

Posmatrano kao funkcija od $x\in l_p$, on definiše funkcional f na l_p, čija se linearnost jednostavno pokazuje, a ograničenost slijedi iz

$$|f(x)|\le||y||_{l_q}||x||_{l_p}\ .$$

Pokažimo i obrat, tj. da svaki ograničen linearan funkcional na l_p ima navedenu formu sa datim osobinama. Sa e_n označimo niz čiji su svi članovi, izuzev n-tog jednaki nuli, a n-ti član je jednak 1, tj.

$$e_n=(0,0,0,\dots,\underbrace{1}_{n-to\text{ mjesto}},0,\dots)\ \ (n\in\mathbb{N})\ .$$

Očigledno je $e_n\in\ell_p$ i pri tome vrijedi $\|e_n\|=1$ $(n\in\mathbb{N})$. Sada za $x=(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\ell_p$ i proizvoljno $n\in\mathbb{N}$ imamo da je

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_ie_i=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n,0,0\dots)\ ,$$

pa je

$$x-\sum_{i=1}^{n}\xi_ie_i=(0,0,0,\dots,0,\xi_{n+1},\xi_{n+2},\dots)\ .$$

Odavde je

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\xi_ie_i\right\|=\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\ ,$$

i puštajući da $n\to+\infty$, imamo $\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p\to0$, tj. $\|x-\sum_{i=1}^{n}\xi_ie_i\|\to0$. Dakle, red $\sum_{i=1}^{\infty}\xi_ie_i$ je konvergentan u ℓ_p i vrijedi $x=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_ie_i$.

Neka je f ograničen linearan funkcional na ℓ_p. Funkcional f je neprekidan, pa iz konvergencije

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_ie_i\longrightarrow x,\ (n\to\infty)\ ,$$

slijedi

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\right) \longrightarrow f(x),\ (n\to\infty)\ .$$

Koristeći linearnost funkcionala f tada je

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\xi_i f(e_i)\ ,$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i f(e_i) \longrightarrow f(x)\ (n\to\infty)\ .$$

Dakle, red $\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i f(e_i)$ konvergira i suma mu je jednaka $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i f(e_i)\ . \tag{4.7}$$

Zbog proizvoljnosti elementa $x\in\ell_p$, zaključujemo da (4.7) vrijedi za sve $x\in\ell_p$. Označimo sa $\eta_i = f(e_i)$ $(i\in\mathbb{N})$, imat ćemo da je

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i\ , \tag{4.8}$$

što je ustvari reprezentacija proizvoljnog funkcionala $f\in\ell_p^*$. Na ovaj način smo proizvoljnom funkcionalu $f\in\ell_p^*$ pridružili niz $y=(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}$, gdje je $\eta_i = f(e_i)$, za $i\in\mathbb{N}$. Iz ograničenosti funkcionala f imamo

$$|f(x)| \le \|f\|\|x\|_{\ell_p}\ . \tag{4.9}$$

Pokažimo sada da je $y\in\ell_q$, gdje je $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.
Posmatrajmo proizvoljno ali fiksirano $k\in\mathbb{N}$ i stavimo da je

$$x_k = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}\ ,\ \ \xi_i = \begin{cases} |\eta_i|^{q-1}\operatorname{sgn}(\eta_i), & i=1,2,\dots,k\\ 0, & i>k\end{cases}\ , \tag{4.10}$$

Pri ovakovom izboru vektora imamo

$$f(x_k) = \sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i = \sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^{q-1}\operatorname{sgn}(\eta_i)\cdot|\eta_i|\operatorname{sgn}(\eta_i) = \sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^q\ .$$

Iz (4.9), (4.10) i konjugovanosti brojeva p i q imamo da je

$$\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^q \le \|f\|\left(\sum_{i=1}^{n}\left||\eta_i|^{q-1}\operatorname{sgn}(\eta_i)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|\left(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^{pq-p}\right)^{\frac{1}{p}}\ ,$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^q \le \|f\|\left(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^q\right)^{1-\frac{1}{q}}\ . \tag{4.11}$$

Množenjem izraza (4.11) sa $\left(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}-1}$ dobijamo da je

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \|f\| < +\infty \,.$$

Na ovaj način smo pokazali da je niz parcijalnih suma $\left(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^q\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitivnog reda $\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q$ ograničen odozgo brojem $\|f\|^q$, pa je taj red konvergentan i vrijedi

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q \le \|f\|^q < +\infty \,.$$

Ovim smo pokazali da je niz $y=(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_q$ i da je

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \|f\| \,,$$

tj.

$$\|y\| \le \|f\| \,. \tag{4.12}$$

Iz reprezentacije funkcionala $f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i$, imamo da je

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i\right| \le \sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|\,|\eta_i| \,.$$

Na osnovu Hölderove nejednakosti imamo da je za svaki $x\in\ell_p$

$$|f(x)| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \,,$$

pri čemu je $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Znači

$$|f(x)| \le \|x\|\|y\|,\ (\forall x\in\ell_p) \,.$$

Iz ovoga dalje imamo

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \le \|y\|,\ (\forall x\in\ell_p,\ \|x\|\ne 0) \,,$$

pa je

$$\|f\| = \sup_{x\in\ell_p,\|x\|\ne 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|} \le \|y\| \,,$$

tj.

$$\|f\| \le \|y\| \,. \tag{4.13}$$

Iz (4.12) i (4.13) zaključujemo da je $\|f\|=\|y\|$.

Pokažimo još da je funkcionalom $f \in \ell_p^*$ element $y \in \ell_q$ jednoznačno određen. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da postoji još jedna tačka $y' = (\eta_i')_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_q$ različita od y određena funkcionalom f. To znači da je

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i' \ (\forall x \in \ell_p) ,$$

pa za $x = e_n$ imamo $f(e_n) = \eta_n = \eta_n'$, za svako $n \in \mathbb{N}$ tojest, $y = y'$, što je suprotno pretpostavci da je $y \neq y'$. Dakle, funkcionalom $f \in \ell_p^*$ element $y \in \ell_q$ je jednoznačno određen. $\square$

Teorem 4.14. *Ograničen linearan funkcional f na prostoru ℓ_1 ima reprezentaciju*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i ,$$

gdje je $x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_1$, $y = (\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ i pri tome je $\|f\| = \|y\|$.
Funkcionalom $f \in \ell_1^*$ jednoznačno je određen element $y \in \ell_\infty$.

Dokaz : Neka je $x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ proizvoljan. Tada je $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| < +\infty$ i $\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|$.

Za $x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_1$ i $y = (\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_\infty$, izraz $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i$ uvijek ima smisla jer vrijedi

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i \eta_i| \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} |\eta_i| \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| = ||y||_{l_\infty} ||x||_{l_1} < +\infty .$$

Kao funkcija od $x \in l_1$, ovo je očigledno jedan linearan funkcional na l_1, a zbog posljednje nejednakosti, tj.

$$|f(x)| \leq ||y||_{l_\infty} ||x||_{l_1} ,$$

on je i ograničen.

Pokažimo i obrat. Posmatrajmo vektore $(e_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset l_1$ (vektori standardne baze). Za $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}, \ldots) \in \ell_1$ i fiksno $n \in \mathbb{N}$, imamo da je

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots) ,$$

pa je

$$x - \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i = (0, 0, \ldots, 0, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots) ,$$

odnosno

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \right\| = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i| .$$

Pustimo li da $n \to \infty$, to će $\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i| \to 0$, tj.

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \right\| \longrightarrow 0 .$$

Znači, red $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$ je konvergentan u ℓ_1 i vrijedi

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i .$$

Neka je f linearan ograničen funkcional na ℓ_1, tj. $f \in \ell_1^*$. Na osnovu neprekidnosti funkcionala f imamo da konvergencija

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \longrightarrow x,\ (n \to \infty)\ ,$$

povlači konvergenciju

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right) \longrightarrow f(x),\ (n \to \infty)\ .$$

Koristeći linearnost funkcionala f, dalje je za fiksno $n \in \mathbb{N}$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i f(e_i)\ .$$

Pustimo li da $n \to \infty$ imat ćemo da je

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i f(e_i)\ .$$

Uvedimo oznaku $\eta_i = f(e_i)$ za $i \in \mathbb{N}$. Tada proizvoljan funkcional $f \in \ell_1^*$ ima oblik

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i, \tag{4.14}$$

što je ustvari reprezentacija funkcionala f na l_1.

Posmatrajmo sada tačku $y = (\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}$, gdje je $\eta_i = f(e_i)$,za svaki $i \in \mathbb{N}$. Pokažimo da $y \in \ell_\infty$, tj. da je y element prostora svih ograničenih nizova ℓ_∞.

U tom cilju, posmatrajmo niz tačaka $x_n = (\xi_i^n)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_1, (n \in \mathbb{N})$, gdje je

$$\xi_i^n = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\eta_n), & i = n \\ 0, & i \neq n \end{cases}\ .$$

Za niz tačaka $x_n, (n \in \mathbb{N})$ imamo da je $\|x_n\| = 1$ i $f(x_n) = \operatorname{sgn}(\eta_n) \cdot \eta_n = |\eta_n|$

Koristeći sada ograničenost funkcionala f, imamo da je za svaki $n \in \mathbb{N}$

$$|f(x_n)| \leq \|f\| \cdot \|x_n\|\ ,$$

$$|\eta_n| \leq \|f\| < +\infty,\ (\forall n \in \mathbb{N})\ .$$

Time je i

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\eta_n| \leq \|f\| < +\infty\ .$$

Odavde najprije slijedi da je $y = (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$, te

$$\|y\|_{\ell_\infty} \leq \|f\|\ . \tag{4.15}$$

Iz ograničenosti funkcionala f, za svaki $x \in \ell_1$ imamo:

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|\,|\eta_i| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |\eta_i| \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| = \|y\|_{\ell_\infty} \|x\|_{\ell_1}\ ,$$

pa slijedi da je

$$\|f\| \leq \|y\|_{\ell_\infty}\ . \tag{4.16}$$

Sada iz (4.15) i (4.16) zaključujemo da je

$$\|f\| = \|y\|_{\ell_\infty} .$$

Pokažimo još jedinstvenost tačke $y \in \ell_\infty$. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da postoje dvije različite tačke $y_1 = (\eta_i^{(1)})_{i\in\mathbb{N}}$ i $y_2 = (\eta_i^{(2)})_{i\in\mathbb{N}}$ iz ℓ_∞ takve da je za proizvoljno $x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ funkcional $f \in \ell_1^*$ ima reprezentaciju

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i^{(2)} .$$

Tada bismo za $x = e_n$ imali

$$f(e_n) = \eta_n^{(1)} = \eta_n^{(2)},\ (\forall n \in \mathbb{N}) ,$$

tj. y_1 je jednako y_2 po svim koordinatama, što je suprotno pretpostavci da je $y_1 \neq y_2$. Dakle, funkcionalu $f \in \ell_1^*$ jednoznačno je pridružen element $y \in \ell_\infty$. $\square$

Teorem 4.15. *Ograničen linearan funkcional f na prostoru c_0 ima reprezentaciju*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \xi_i ,$$

gdje je $y = (\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ i $\|f\| = \|y\|$.
Funkcionalom $f \in c_0^*$ tačka $y \in \ell_1$ jednoznačno je određena.

Dokaz : Neka je $x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_0$ i $y = (\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_1$. Tada izraz $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i$ ima smisla, jer je

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i \eta_i| \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i| \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i| = \|x\|_{c_0} \cdot \|y\|_{\ell} < +\infty .$$

Posmatran kao funkcija od $x \in c_0$, izraz $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i$ definiše jedan funkcional f na c_0, tj.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i .$$

Pokažimo njegovu linearnost. Neka su $x_1, x_2 \in c_0$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (ili $\mathbb{C}$) proizvoljni. Posmatrajmo

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\alpha \xi_i^{(1)} + \beta \xi_i^{(2)} \right) \eta_i .$$

Kako su $\alpha, \beta, \xi_i, \eta_i \in \mathbb{R}$ (ili $\mathbb{C}$), za svaki $i \in \mathbb{N}$ to vrijedi zakon distributivnosti, pa je

$$\begin{aligned}
f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\alpha \xi_i^{(1)} \eta_i + \beta \xi_i^{(2)} \eta_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha \xi_i^{(1)} \eta_i + \sum_{i=1}^{\infty} \beta \xi_i^{(2)} \eta_i \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^{(1)} \eta_i + \beta \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^{(2)} \eta_i \\
&= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) .
\end{aligned}$$

Znači, funkcional f je linearan za proizvoljne $x_1, x_2 \in c_0$, pa je, zbog njihove proizvoljnosti linearan na cijelom prostoru c_0.

Pokažimo sada ograničenost funkcionala f na c_0. Posmatrajmo

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i \eta_i| \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i| \sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i| ,$$

$$|f(x)| \leq \|x\|_{c_0} \|y\|_{\ell} < +\infty .$$

Kako je $|f(x)| \leq \|f\| \|x\|$ za svaki $x \in c_0$ i na osnovu pokazanog $|f(x)| < +\infty$, imamo da je

$$\|f\| \leq \|y\|_{\ell} . \tag{4.17}$$

Dakle, pokazali smo da za svaki $x \in c_0$ i $y \in \ell$ izraz $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i$ predstavlja linearan ograničen funkcional f na c_0.

Obrnuto, pretpostavimo da je f proizvoljan ograničen linearan funkcional na c_0. Tada je sa

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i ,$$

dat jedinstven prikaz elementa $x \in c_0$, gdje su e_n $(n \in \mathbb{N})$ standardni vektori baze. Za fiksno $n \in \mathbb{N}$ označimo $x_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ i posmatrajmo izraz

$$x - \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i = \sum_{i=n+1}^{\infty} \xi_i e_i .$$

Tada je

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \right\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \xi_i e_i \right\| = \sup_{i>n} |\xi_i| .$$

Pustimo li da $n \to \infty$ to će $\sup_{i>n} |\xi_i| \longrightarrow 0$ tj. $x_n \longrightarrow x$. Zbog neprekidnosti funkcionala f imamo da $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ kada $n \to \infty$, tj.

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i\right) ,$$

a zbog linearnosti

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i f(e_i) .$$

Stavimo li da je $\eta_i = f(e_i)$, za svaki $i \in \mathbb{N}$, dobijamo da je

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i ,$$

što je ustvari reprezentacija funkcionala f na c_0. Na ovaj način smo proizvoljnom funkcionalu $f \in c_0^*$ pridružili element

$$y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_i, \ldots) , \ \eta_i = f(e_i) , \ (i \in \mathbb{N}) .$$

Pokažimo sada da je $y \in \ell$. Posmatrajmo

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| |\eta_i| \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i| \sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i| .$$

Kako je $x \in c_0$, to je $\|x\|_{c_0} = \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i|$, pa imamo da je

$$|f(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i| \, \|x\|_{c_0} \, .$$

Posmatrajmo niz tačaka $x_n = (\xi_i^n)_{i\in\mathbb{N}} \in c_0$ takav da je

$$\xi_i^n = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\eta_i), & i \leq n \\ 0 & i > n \end{cases} , \; (n \in \mathbb{N}) \, .$$

Odavde je očigledno $\|x_n\| = \sup_{0<i\leq n} |\xi_i| = 1$, pa je

$$f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn}(\eta_i) \cdot \eta_i = \sum_{i=1}^{n} |\eta_i| \, , \; (\forall n \in \mathbb{N}) \, .$$

Kako je f ograničen, to je $|f(x_n)| = \sum_{i=1}^{n} |\eta_i| < +\infty$ za svako $n \in \mathbb{N}$, pa je i $\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i| < +\infty$, što znači da je $y = (\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_1$, tj. $\|y\|_{\ell_1} = \sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|$. Sada imamo da je za svaki $x \in c_0$, $|f(x)| \leq \|y\|_{\ell}\|x\|_{c_0}$, tj.

$$|f(x_n)| = \sum_{i=1}^{n} |\eta_i| \leq \|f\| \cdot \|x_n\| = \|f\| \cdot 1 \, ,$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^{n} |\eta_i| \leq \|f\| \, .$$

Puštajući $n \to \infty$ imamo da je $\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i| \leq \|f\|$, što je ekvivalentno sa

$$\|y\|_{\ell_1} \leq \|f\| \, . \tag{4.18}$$

Iz (4.17) i (4.18) zaključujemo da je $\|f\| = \|y\|$.

Ostaje još da pokažemo jedinstvenost elementa $y \in \ell_1$. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da postje dva različita elementa $y_1 = (\eta_i^{(1)})$ i $y_2 = (\eta_i^{(2)})$ iz ℓ_1 za koje proizvoljan funkcional f na c_0 ima reprezentaciju

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i^{(2)} \, .$$

Ako uzmemo da je $x = e_i$ imat ćemo da je za svako $i \in \mathbb{N}$ $f(e_i) = \eta_i^{(1)} = \eta_i^{(2)}$, pa su y_1 i y_2 jednaki po svim koordinatama, što je suprotno pretpostavci. Znači, funkcionalom $f \in c_0^*$ element $y \in \ell_1$ je jednoznačno određen. □

Teorem 4.16. *Ograničen linearan funkcional f na $C[a,b]$ ima reprezentaciju*

$$f(x) = \int_a^b x(t)dg(t) \, ,$$

gdje je $x(t) \in C[a,b]$, $g(t)$ funkcija ograničene varijacije na $[a,b]$ koja se anulira u tački $t = a$ i pri tome je

$$\|f\| = V_a^b(g) \, .$$

Primjedba 4.3.1. *Funkcional f na $C[a,b]$ ne određuje jednoznačno funkciju ograničene varijacije g.*

Dokaz : Bez umanjenja opštosti, posmatrajmo prostor $C[0,1]$. Neka je $g(t)$ funkcija ograničene varijacije na $[0,1]$. Tada postoji Riemann-Stieltjesov integral $\int_0^1 xdg$, za svaku neprekidnu funkciju x, pa ima smisla posmatrati funkcional f definisan sa

$$f(x) = \int_0^1 x(t)dg(t) \ .$$

Njegova linearnost je očigledna, a ograničenost se ima na osnovu sljedećeg.

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left|\int_0^1 x(t)dg(t)\right| \leq \int_0^1 |x(t)|\,dg(t) \leq \max_{0\leq t\leq 1}|x(t)|\int_0^1 dg(t) \\ &= V_0^1(g)\cdot\|x\| < +\infty \ . \end{aligned}$$

Znači, funkcional f je i ograničen. Odavde slijedi i da je

$$\|f\| \leq V_0^1(g) \ . \tag{4.19}$$

Obrnuto, pretpostavimo da je f proizvoljan linearan, ograničen funkcional na $C[0,1]$. Pokažimo da postoji funkcija $g \in V[0,1]$ sa $g(0) = 0$, tako da je $f(x) = \int_0^1 x(t)dg(t)$.
Kako je svaka neprekidna funkcija i bitno ograničena, tj.

$$x \in C[0,1] \Longrightarrow x \in M[0,1] \ ,$$

i kako su norme iste $\|x\|_{C[0,1]} = \|x\|_{M[0,1]}$, to možemo prostor $C[0,1]$ posmatrati kao potprostor prostora $M[0,1]$. Na osnovu Hahn-Banachove teoreme, na M postoji ograničen linearan funkcional f^* takav da je:

1. $f^*(x) = f(x)$ za $x \in C[0,1]$,
2. $\|f^*\|_M = \|f\|_C$.

Neka je $0 < t \leq 1$. Stavimo da je

$$y_t = y_t(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leq u < t \\ 0, & t < u \leq 1 \end{cases} \ .$$

Kolekcija funkcija $\{y_t \mid t \in [0,1]\}$ leži u $M[0,1]$. Pomoću ovako uvedene kolekcije i funkcionala f^* definišimo funkciju

$$g(t) = \begin{cases} f^*(y_t), & 0 < t \leq 1 \\ 0, & t = 0 \end{cases} \ .$$

Iz same definicije funkcije g vidimo da je $g(0) = 0$. Pokažimo da je g funkcija ograničene varijacije na $[0,1]$. Posmatrajmo podjelu segmenta $[0,1]$

$$\pi : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1,$$

i stavimo

$$\varepsilon_k = \operatorname{sgn}\left[g(t_k) - g(t_{k-1})\right], \ k = 1,2,\ldots,n \ .$$

Tada je

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|g(t_k)-g(t_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{n}[(g(t_k)-g(t_{k-1})]\cdot\varepsilon_k\\ &= [g(t_1)-g(t_0)]\,\varepsilon_1+\sum_{k=2}^{n}[(g(t_k)-g(t_{k-1})]\cdot\varepsilon_k\\ &= f^*(y_{t_1})\cdot\varepsilon_1+\sum_{k=2}^{n}\left[f^*(y_{t_k})-f^*(y_{t_{k-1}})\right]\cdot\varepsilon_k\\ &= f^*\left(y_{t_1}\varepsilon_1+\sum_{k=2}^{n}(y_{t_k}-y_{t_{k-1}})\varepsilon_k\right)\\ &\le \|f^*\|\cdot\|y_{t_1}\varepsilon_1+\sum_{k=2}^{n}(y_{t_k}-y_{t_{k-1}})\varepsilon_k\|\;.\end{aligned}$$

Kako su $y_{t_k}\in M[0,1]$, za svako $k=1,2,\dots,n$, to je $y_{t_1}\varepsilon_1+\sum\limits_{k=2}^{n}\left|y_{t_k}-y_{t_{k-1}}\right|\varepsilon_k$ vektor iz $M[0,1]$, pa je njegova norma:

$$\|y_{t_1}\varepsilon_1+\sum_{k=2}^{n}(y_{t_k}-y_{t_{k-1}})\varepsilon_k\| = \sup_{0\le u\le 1}\mathtt{ess}\left|\varepsilon_1 y_{t_1}(u)+\sum_{k=2}^{n}\left[y_{t_k}(u)-y_{t_{k-1}}(u)\right]\varepsilon_k\right|\;.$$

Da bismo izračunali ovu normu, posmatrajmo u na podsegmentima $[t_0,t_1],[t_1,t_2],\dots,[t_{n-1},t_n]$. Kako je

$$y_1(u)=\begin{cases}1, & \mathtt{za}\ u\in[0,t_1]\\ 0, & \mathtt{za}\ u\notin[0,t_1]\end{cases}\;,$$

i

$$y_{t_k}(u)-y_{t_{k-1}}(u)=\begin{cases}1, & \mathtt{za}\ u\in[t_{k-1},t_k]\\ 0, & \mathtt{za}\ u\notin[t_{k-1},t_k]\end{cases}\;,k=2,3,\dots,n\;,$$

to za svako $u\in[0,1]$ imamo da je

$$\left|\varepsilon_1 y_{t_1}(u)+\sum_{k=2}^{n}\left[y_{t_k}(u)-y_{t_{k-1}}(u)\right]\varepsilon_k\right|\le 1\;.$$

Znači

$$\|y_{t_1}\varepsilon_1+\sum_{k=2}^{n}\left[y_{t_k}(u)-y_{t_{k-1}}(u)\right]\varepsilon_k\|\le 1,\ (\forall n\in\mathbb{N})\;.$$

Pustimo li $n\to\infty$, imat ćemo:

$$V_a^b(g)=\sum_{k=1}^{\infty}|g(t_k)-g(t_{k-1})|\;,$$

i

$$\|y_{t_1}\varepsilon_1+\sum_{k=2}^{\infty}\left[y_{t_k}(u)-y_{t_{k-1}}(u)\right]\varepsilon_k\|\le 1\;.$$

To znači da je:

$$V_a^b(g)\le\|f^*\|_M \overbrace{=}^{\text{Han-Banach}} \|f\|_C\;. \tag{4.20}$$

Dakle, g je funkcija ograničene varijacije na $[0,1]$ i iz (4.19) i (4.20) slijedi da je

$$\|f\| = V_a^b(g)\ .$$

Ostaje još da pokažemo da je reprezentacija funkcionala f data sa

$$f(x) = \int_0^1 x(t)dg(t)\ (\forall x \in C[0,1])\ .$$

Neka je $x \in C[0,1]$ proizvoljan. Stavimo da je

$$z_n(u) = x(t_1)y_{t_1}(u) + \sum_{k=2}^{n} x(t_k)\left[y_{t_k}(u) - y_{tk-1}(u)\right]\ .$$

Tada je

$$z_n(u) - x(u) = \begin{cases} x(t_1) - x(u), & u \in [t_0, t_1] \\ \\ x(t_k) - x(u), & u \notin (t_{k-1}, t_k] \end{cases} , k = 2, 3, \ldots, n\ .$$

Kako je x neprekidna na $[0,1]$ i $[0,1]$ kompaktan skup, to je x uniformno neprekidna funkcija na $[0,1]$, pa

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(m(\pi) < \delta \Rightarrow |z_n(u) - x(u)| < \varepsilon)\ ,$$

gdje je $m(\pi)$ dužina maksimalnog podsegmenta podjele π

$$m(\pi) = \max_{1 \le k \le n} |t_k - t_{k-1}|\ .$$

Drugim riječima, ako za niz podjela, $m(\pi) \to 0$ kada $n \to \infty$, tada $z_n \to x$ u smislu metrike u M. Zbog neprekidnosti funkcionala f^* na M imamo da $f^*(z_n) \longrightarrow f^*(x),\ (n \to \infty)$ tj.

$$\lim_{n \to \infty} f^*(z_n) = f^*(x)\ ,$$

a kako je $x \in C[0,1]$ to je, na osnovu Hahn-Banachovog stava

$$f^*(x) = f(x),\ \text{tj. } f(x) = \lim_{n \to \infty} f^*(z_n)\ .$$

Sada na osnovu definicije funkcije g i linearnosti funkcionala f^* imamo:

$$\begin{aligned} f^*(z_n) &= f^*\left(x(t_1)y_{t_1} + \sum_{k=2}^{n} x(t_k)\left[y_{t_k} - y_{t_{k-1}}\right]\right) \\ &= x(t_1)f^*(y_{t_1}) + \sum_{k=2}^{n} x(t_k)\left[f^*(y_{t_k}) - f^*(y_{t_{k-1}})\right] \\ &= x(t_1)g(t_1) + \sum_{k=2}^{n} x(t_k)\left[g(t_k) - g(t_{k-1})\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} x(t_k)\left[g(t_k) - g(t_{k-1})\right]\ , \end{aligned}$$

pa je

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} x(t_k)\left[g(t_k) - g(t_{k-1})\right]\ .$$

Zbog neprekidnosti funkcije x i ograničene varijacije funkcije g na $[a,b]$, egzistencija Riemann-Stieltjesovog integrala je obezbijeđena, tj.

$$f(x) = \int_a^b x(t)dg(t) \ .$$

□

Kao što je spomenuto u primjedbi prije dokaza, funkcionalom f na $C[a,b]$ nije jednoznačno određena funkcija ograničene varijacije g, takva da je

$$f(x) = \int_a^b x(t)dg(t) \ ,$$

a objašnjenje za to leži u činjenici što Riemann-Stieltjesov integral ima istu vrijednost za funkcije koje se razlikuju na skupu mjere 0. Dakle, ako je $g_1(t) = g_2(t)$ za svako $t \in (a,b) \setminus E$, a $g_1(t) \neq g_2(t)$ na E, pri čemu je $m(E) = 0$, tada je

$$\int_a^b x(t)dg_1(t) = \int_a^b x(t)dg_2(t) \ .$$

Teorem 4.17. *Ograničen linearan funkcional f na $L_p(a,b)$ $(1 < p < +\infty)$ ima reprezentaciju*

$$f(x) = \int_a^b y(t)x(t)dt \ ,$$

gdje je $y \in L_q(a,b)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ i pri tome je

$$\|f\| = \|y\| \ .$$

Funkcionalom f na L_p, funkcija y u L_q jednoznačno je određena.

Teorem 4.18. *Ograničen linearan funkcional f na prostoru $L(a,b)$ ima reprezentaciju*

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)dt \ ,$$

gdje je $y \in L_\infty(a,b)$ i $\|f\| = \|y\|_{L_\infty}$.
Funkcionalom f na L funkcija $y \in L_\infty(a,b)$ jednoznačno je određena.

Dokazi posljednje dvije teoreme mogu se naći u [1].

5 Hilbertovi prostori

U dosadašnjim izučavanjima prostora i njihovih osobina mi smo se bavili (u ”rastućem nizu”) topološkim, metričkim, normiranim i Banachovim prostorima. Posljednji u nizu kojim ćemo se baviti su Hilbertovi prostori, koji su u stvari Banachovi prostori na kojima je definisan skalarni proizvod iz koga izvire norma. Kao što ćemo vidjeti, pojam skalarnog produkta će nam omogućiti bogatiju strukturu prostora, tojest omogućit će nam uvesti pojam ortogonalnosti, a time nam omogućiti i geometriju u Hilbertovim prostorima na intuitivnom nivou kao linearan vektorski prostor (konačno ili beskonačnodimenzionalan) sa proizvoljnim brojem ortogonalnih koordinatnih osa.

5.1 Skalarni produkt. Hilbertovi prostori.

Definicija 5.1. *Neka je H linearan vektorski prostor nad poljem skalara Φ i neka je svakom paru $(x,y) \in H \times H$ pridružen broj $(x,y) \in \Phi$, tako da vrijedi:*

1. $(\forall x \in H)\ (x,x) \geq 0$, *(nenegativnost)*
2. $(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, *(pozitivna definitnost)*
3. $(\forall x,y \in H)\ (x,y) = \overline{(y,x)}$, *(hermitska simetričnost)*
4. $(\forall x,y,z \in H)(\forall \alpha,\beta \in \Phi)\ (\alpha x+\beta y,z) = \alpha(x,z)+\beta(y,z)$, *(linearnost po prvom argumentu).*

Tada kažemo da je na H definisan skalarni proizvod.

Lema 5.1. *Neka je H vektorski prostor na kome je definisan skalarni proizvod. Tada vrijedi,*

$$(\forall x,y \in H)\ \ |(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y)\ .$$

Dokaz : Neka su $x,y \in H$ i $\lambda \in \Phi$ proizvoljni. Na osnovu nenegativnosti skalarnog proizvoda vrijedi, $(x+\lambda y, x+\lambda y) \geq 0$. Uzimajući u obzir treću osobinu skalarnog proizvoda i Lemu 5.2, dobijamo

$$(x,x+\lambda y)+\lambda(y,x+\lambda y) = (x,x)+\overline{\lambda}(x,y)+\lambda(y,x)+\underbrace{\lambda\overline{\lambda}}_{|\lambda|^2}(y,y) \geq 0\ .$$

Stavljajući da je $\lambda = -\frac{(x,y)}{(y,y)}$, $(y \neq 0)$, imamo

$$\begin{aligned}
& (x,x)+\overline{\left(-\frac{(x,y)}{(y,y)}\right)}\cdot(x,y)+\left(-\frac{(x,y)}{(y,y)}\right)\cdot(y,x)+\frac{|(x,y)|^2}{[(y,y)]^2}\cdot(y,y)\\
= & \ (x,x)-\frac{\overline{(x,y)}(x,y)}{(y,y)}-\frac{(x,y)\overline{(x,y)}}{(y,y)}+\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}\\
= & \ (x,x)-\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}-\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}+\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} \geq 0\ ,
\end{aligned}$$

odakle je

$$(x,x) \geq \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} .$$

Množeći zadnju nejednakost sa (y,y), dobijamo

$$|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y). \tag{5.1}$$

Jasno je da za $y=0$ nejednakost (5.1) vrijedi trivijalno, pa (5.1) vrijedi za svaki $x,y \in H$. □

Ova nejednakost poznata je pod nazivom Schwartzova nejednakost ili nejednakost Cauchy-Schwartz-Buniakowskog.

Neka je sada H linearan vektorski prostor na kome je definisan skalarni produkt. Za $x \in H$ označimo sa

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} . \tag{5.2}$$

Jasno je da na osnovu definicije skalarnog produkta vrijede prve tri osobine norme. Provjerimo četvrtu osobinu. Za proizvoljne $x,y \in H$ tada vrijedi

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 = (x+y,x+y) &= (x,x+y)+(y,x+y) \\ &= (x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y) \\ &= \|x\|^2+(x,y)+(y,x)+\|y\|^2 . \end{aligned}$$

Koristeći nejednakost (5.1) i relaciju (5.2), iz gornjeg imamo

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\cdot\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2 \quad ,$$

odnosno vrijedi $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$.

Dakle, sa (5.2) je uvedena norma na H za koju kažemo da "izvire" ili da je indukovana skalarnim produktom, a time je H dakle normiran prostor.

Definicija 5.2. *Linaran vektorski prostor H na kome je definisan skalarni proizvod iz kojeg izvire norma data sa (5.2), nazivamo unitarnim vektorskim prostorom.*

Navedimo neke važnije osobine skalarnog produkta koje proizilaze iz same definicije.

Lema 5.2. *Neka je H unitaran vektorski prostor. Tada vrijedi,*

$$(\forall x,y,z \in H)(\forall \alpha,\beta \in \Phi)(x,\alpha y+\beta z) = \overline{\alpha}(x,y)+\overline{\beta}(x,z) .$$

Dokaz : Neka su $x,y,z \in H$ i $\alpha,\beta \in \Phi$ proizvoljni. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} (x,\alpha y+\beta z) &= \overline{(\alpha y+\beta z,x)} = \overline{\alpha(y,x)+\beta(z,x)} = \overline{\alpha(y,x)}+\overline{\beta(z,x)} \\ &= \overline{\alpha}\,\overline{(y,x)}+\overline{\beta}\,\overline{(z,x)} = \overline{\alpha}(x,y)+\overline{\beta}(x,z) . \end{aligned}$$

□

Lema 5.3. *Neka je H unitaran vektorski prostor. Tada vrijedi,*

$$(\forall x \in H)\ (x,0) = (0,x) = 0 .$$

Dokaz : Neka je $x \in H$ proizvoljan. Tada imamo

$$\left.\begin{array}{l} (0,x) = (0+0,x) = (0,x)+(0,x) \Rightarrow 0 = (0,x) \\ (x,0) = (x,0+0) = (x,0)+(x,0) \Rightarrow 0 = (x,0) \end{array}\right\} \Rightarrow (x,0) = (0,x) = 0.$$

□

Lema 5.4. *U unitarnom vektorskom prostoru vrijedi*

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right]. \tag{5.3}$$

Dokaz : Slično malopređašnjem postupku, lahko se pokazuje da vrijede sljedeće jednakosti:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 \tag{5.4}$$

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - (x,y) - (y,x) + \|y\|^2 \tag{5.5}$$

$$i\|x+iy\|^2 = i\|x\|^2 + (x,y) - (y,x) - i\|y\|^2 \tag{5.6}$$

$$i\|x-iy\|^2 = i\|x\|^2 - (x,y) + (y,x) - i\|y\|^2 \tag{5.7}$$

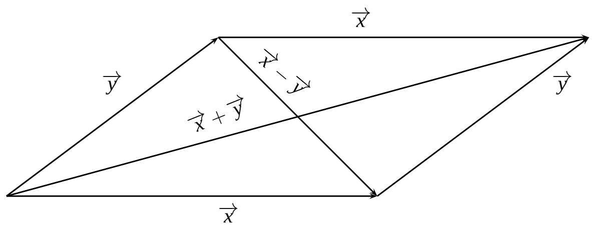
Sabirajući (5.4), (5.5), (5.6) i (5.7) dobijamo

$$\begin{aligned}
&\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 = \\
&= \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 - \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) - \|y\|^2 + \\
&+ i\|x\|^2 + (x,y) - (y,x) - i\|y\|^2 - i\|x\|^2 + (x,y) - (y,x) + i\|y\|^2 = \\
&= 4\cdot(x,y)\ ,
\end{aligned}$$

a odavde direktno slijedi jednakost (5.3). □

Lema 5.5 (**Relacija paralelograma**). *Neka je H unitaran vektorski prostor. Za proizvoljne $x,y \in H$ vrijedi relacija*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\ . \tag{5.8}$$



Dokaz :
Sabirajući jednakosti (5.4) i (5.5) dobijamo

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\ ,$$

tj. relaciju paralelograma (5.8). □

Gornja tvrdnja predstavlja jednostavno geometrijsko pravilo da je zbir kvadrata dijagonala paralelograma jednak dvostrukoj sumi kvadrata njegovih stranica. Međutim, ovdje imamo i mnogo važniju činjenicu. Naime, ako u normiranom prostoru za svaka dva vektora vrijedi (5.8), tada je taj prostor unitaran, tj. u njemu se može uvesti skalarni produkt iz koga izvire data norma. Ako ovo posmatramo u kontrapoziciji imamo tvrdnju da ukoliko nije zadovoljena jednakost (5.8), tada prostor nije unitaran.

Lema 5.6. *Skalarni proizvod je neprekidna funkcija svojih argumenata.*

Dokaz : Neka su dati nizovi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$, takvi da $x_n \to x$ i $y_n \to y$, $(n\to\infty)$, tj.

$$\|x_n - x\| \to 0 \;\;,\;\; \|y_n - y\| \to 0 \;;\; (n\to\infty)\;.$$

Tada imamo

$$\begin{aligned} |(x_n,y_n)-(x,y)| &= |(x_n,y_n)-(x,y_n)+(x,y_n)-(x,y)| \\ &= |(x_n-x,y_n)+(x,y_n-y)| \\ &\le |(x_n-x,y_n)|+|(x,y_n-y)| \\ &\le \|x_n-x\|\cdot\|y_n\|+\|x\|\cdot\|y_n-y\| \to 0\;,\;(n\to\infty). \end{aligned}$$

Dakle,

$$(x_n,y_n)\to(x,y) \qquad (n\to\infty)\;,$$

tj. skalarni produkt je neprekidan po obje koordinate. □

Neka je H unitaran vektorski prostor. Na osnovu Teorema 2.16, H se može upotpuniti do kompletnog normiranog prostora $\overline{H}$ i to tako da je H svuda gust u $\overline{H}$, tj. $\overline{H}$ je Banachov prostor. Pokažimo da je tada i prostor $\overline{H}$ unitaran.

Neka su $\overline{x},\overline{y}\in\overline{H}$ proizvoljni. Tada postoje nizovi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset H$ koji konvergiraju ka $\overline{x}$ i $\overline{y}$ redom. Jasno je da su ovi nizovi i u $\overline{H}$, a zbog konvergencije oni su i Cauchyjevi nizovi, pa vrijedi

$$\|x_n-x_m\|\to 0 \qquad , \qquad \|y_n-y_m\|\to 0 \;\;;\;\; (n\to\infty).$$

Dalje imamo

$$\begin{aligned} |(x_n,y_n)-(x_m,y_m)| &= |(x_n,y_n)-(x_n,y_m)+(x_n,y_m)-(x_m,y_m)| \\ &= |(x_n,y_n-y_m)+(x_n-x_m,y_m)| \\ &\le |(x_n,y_n-y_m)|+|(x_n-x_m,y_m)| \\ &\le \|x_n\|\cdot\|y_n-y_m\|+\|x_n-x_m\|\cdot\|y_m\|\to 0 \;\; (n\to\infty)\;. \end{aligned}$$

Dakle, $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$, a zbog kompletnosti $\mathbb{R}$, on je i konvergentan. To znači da postoji konačna granična vrijednost $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)$. Zbog neprekidnosti skalarnog produkta, vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (\lim_{n\to\infty}x_n, \lim_{n\to\infty}y_n) = (\overline{x},\overline{y})\;,$$

odnosno, sve osobine koje važe za (x_n,y_n), se u graničnom procesu prenose na $(\overline{x},\overline{y})$, pa je $(\overline{x},\overline{y})$ skalarni produkt na $\overline{H}$.

Osim toga, za proizvoljan $\overline{x}$ iz $\overline{H}$, postoji niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u H koji konvergira ka $\overline{x}$. Tada imamo $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{(x_n,x_n)}$, odnosno,

$$\|\lim_{n\to\infty}x_n\| = \sqrt{(\lim_{n\to\infty}x_n, \lim_{n\to\infty}x_n)}.$$

Znači vrijedi $\|\overline{x}\| = \sqrt{(\overline{x},\overline{x})}$. Dakle, $\overline{H}$ je kompletan unitaran vektorski prostor iz čijeg skalarnog proizvoda izvire norma.

Definicija 5.3. *Kompletan linearan vektorski prostor snabdjeven skalarnim proizvodom iz kojeg izvire norma, naziva se Hilbertov*[1] *prostor.*

[1]David Hilbert 1862-1943, njemački matematičar

Primjer 5.1. Posmatrajmo realan n-dimenzionalni vektorski prostor $\mathbb{R}^n$. Neka je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ baza u $\mathbb{R}^n$. Svaki vektor $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ se na jedinstven način može prikazati preko elemenata baze,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \ .$$

Za proizvoljne $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n), y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n) \in \mathbb{R}^n$ definišimo

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i \ . \tag{5.9}$$

Provjerimo da li je ovim definisan skalarni produkt. Moramo provjeriti da li važe sve četiri osobine Definicije 5.1.

1. Neka je $x \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan. Tada na osnovu jednakosti (5.9) vrijedi

$$(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \xi_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \geq 0 \ .$$

2. Ako je $(x,x) = 0$, to znači da je

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ \xi_i = 0 \ , \ i = 1, 2, \ldots, n \ ,$$

   pa je $x = 0$.

3. Neka su $x, y \in \mathbb{R}^n$ proizvoljni. Tada je na osnovu (5.9)

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \xi_i = (y,x) \ .$$

   S obzirom da se radi o realnom prostoru, to se znak konjugacije gubi, tj. vrijedi $(y,x) = \overline{(y,x)}$. Dakle, $(x,y) = (y,x) = \overline{(y,x)}$.

4. Neka su sada $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ i $a, b \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Tada je

$$ax + by = a\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i + b\sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i = \sum_{i=1}^{n} a(\xi_i e_i) + \sum_{i=1}^{n} b(\eta_i e_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \big[(a\xi_i)e_i + (b\eta_i)e_i\big] = \sum_{i=1}^{n} (a\xi_i + b\eta_i)e_i \ .$$

   Iz ovoga zaključujemo

$$(ax + by, z) = \sum_{i=1}^{n} (a\xi_i + b\eta_i)\mu_i = \sum_{i=1}^{n} (a\xi_i\mu_i + b\eta_i\mu_i) = \sum_{i=1}^{n} a\xi_i\mu_i + \sum_{i=1}^{n} b\eta_i\mu_i =$$

$$= a\sum_{i=1}^{n} \xi_i\mu_i + b\sum_{i=1}^{n} \eta_i\mu_i = a(x,z) + b(y,z) \ .$$

Dakle, sa (5.9) je zadat skalarni proizvod na $\mathbb{R}^n$. Provjerimo da li iz ovako definisanog skalarnog proizvoda izvire norma. U tom cilju stavimo da je

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \ \text{ tj. } \ \|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \ . \tag{5.10}$$

Zbog načina na koji smo definisali funkciju $\|\cdot\|$, jasno je da vrijede prve tri osobine definicije norme. Provjerimo četvrtu, neka su $x,y\in\mathbb{R}^n$ proizvoljni. Tada je

$$x+y=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i+\sum_{i=1}^{n}\eta_i e_i=\sum_{i=1}^{n}(\xi_i e_i+\eta_i e_i)=\sum_{i=1}^{n}(\xi_i+\eta_i)e_i,$$

pa je

$$\|x+y\|=\Big(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i+\eta_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Na osnovu nejednakosti Minkowskog imamo da je

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i+\eta_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}}\le\Big(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}+\Big(\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Dakle,

$$\|x+y\|=\Big(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i+\eta_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}}\le\Big(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}+\Big(\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}=\|x\|+\|y\|,$$

odnosno $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$, te vrijedi i četvrta osobina norme. Znači sa (5.10) je definisana norma koja izvire iz skalarnog produkta. Ovim smo pokazali da je $\mathbb{R}^n$ unitaran vektorski prostor.

Kako su proizvoljne dvije norme na konačnodimenzionalnom prostoru ekvivalentne, $\mathbb{R}^n$ je kompletan prostor i u odnosu na normu (5.10). Dakle, $\mathbb{R}^n$ je kompletan vektorski prostor snabdjeven skalarnim proizvodom iz kojeg izvire norma, pa je s obzirom na Definiciju 5.3, $\mathbb{R}^n$ Hilbertov prostor. $\diamondsuit$

Primjer 5.2. Ako umjesto prostora $\mathbb{R}^n$ posmatramo prostor $\mathbb{C}^n$ i neka je $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ njegova baza. Neka su

$$x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i \ \ i \ \ y=\sum_{i=1}^{n}\eta_i e_i,$$

reprezentacije vektora $x,y\in\mathbb{C}^n$ preko elemenata baze. Tada možemo definisati

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\overline{\eta_i}. \tag{5.11}$$

Analognim postupkom kao u prethodnom primjeru, uzimajući da je

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2 \ \text{tj.} \ \|x\|=\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

dolazimo do zaključka da je $\mathbb{C}^n$ Hilbertov prostor. $\diamondsuit$

Primjer 5.3. Posmatrajmo prostor $l_2(\mathbb{C})$ i za $x,y\in l_2(\mathbb{C})$ uvedimo

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\overline{y_i}. \tag{5.12}$$

Tada vrijede sljedeće osobine.

1. Neka je $x\in l_2(\mathbb{C})$ proizvoljan. Tada je

$$(x,x)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\cdot\overline{x_i}=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2\ge 0.$$

2.

$$(x,x)=0 \ \Leftrightarrow \ \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2=0 \ \Leftrightarrow \ x_i=0 \ (\forall i\in\mathbb{N}) \ \Leftrightarrow \ x=0.$$

3. Neka su $x,y \in l_2(\mathbb{C})$ proizvoljni. Tada je

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i} = \overline{\left(\sum_{i=1}^{\infty} \overline{x_i \cdot \overline{y_i}} \right)} = \overline{\left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i \cdot \overline{x_i} \right)} = \overline{(y,x)}.$$

4. Neka su $x,y,z \in l_2(\mathbb{C})$ i $\alpha, \beta \in \Phi$ proizvoljni. Tada je

$$(\alpha x + \beta y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha x_i + \beta y_i)\overline{z_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha x_i \overline{z_i} + \sum_{i=1}^{\infty} \beta y_i \overline{z_i} =$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{z_i} + \beta \sum_{i=1}^{\infty} y_i \overline{z_i} = \alpha(x,z) + \beta(y,z).$$

Na osnovu Definicije 5.1, zaključujemo da je sa (5.12) definisan skalarni produkt na $l_2(\mathbb{C})$. U skladu sa (5.2) sada za proizvoljno $x \in l_2(\mathbb{C})$ uvodimo normu,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 , \tag{5.13}$$

a od ranije nam je poznato da je sa time definisana "standardna" norma na $l_2(\mathbb{C})$. S obzirom da je $l_2(\mathbb{C})$ kompletan, to ovaj prostor zadovoljava sve uslove Definicije 5.3, pa je $l_2(\mathbb{C})$ Hilbertov prostor.

Primjedba: Niti jedan od prostora $l_p(\mathbb{C})$, za $p \neq 2$, nije Hilbertov prostor! ♢

Primjer 5.4. Posmatrajmo prostor $L_2(G)$. Za $x,y \in L_2(G)$ definišimo

$$(x,y) = \int_G x(t)\overline{y(t)}dt . \tag{5.14}$$

Za ovako definisano preslikavanje, vrijedi:

1. Neka je $x(t) \in L_2(G)$ proizvoljna funkcija. Tada je

$$(x,x) = \int_G x(t)\overline{x(t)}dt = \int_G |x(t)|^2 dt \geq 0 .$$

2. Pored toga, vrijedi i

$$(x,x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \int_G |x(t)|^2 dt = 0 \;\Leftrightarrow\; |x(t)|^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x(t) = 0 .$$

3. Neka su $x(t), y(t) \in L_2$ proizvoljne funkcije. Tada je

$$(x,y) = \int_G x(t)\overline{y(t)}dt = \overline{\int_G \overline{x(t)\overline{y(t)}}dt} = \overline{\int_G y(t)\overline{x(t)}dt} = \overline{(y,x)}.$$

4. Neka su $x(t), y(t), z(t) \in L_2(G)$ i $\alpha, \beta \in \Phi$ proizvoljni. Tada je

$$(\alpha x + \beta y, z) = \int_G (\alpha x + \beta y)(t)\overline{z(t)}dt = \int_G \alpha x(t)\overline{z(t)}dt + \int_G \beta y(t)\overline{z(t)}dt =$$

$$= \alpha \int_G x(t)\overline{z(t)}dt + \beta \int_G \beta y(t)\overline{z(t)}dt = \alpha(x,z) + \beta(y,z) .$$

Dakle, sa (5.14) smo definisali skalarni proizvod na prostoru L_2 i lahko se pokaže da je sa

$$\|x\|^2 = \int_G |x(t)|^2 dt \ , \tag{5.15}$$

definisana norma na $L_2(G)$. S obzirom da je $L_2(G)$ kompletan prostor, to je na osnovu Definicije 5.3, $L_2(G)$ Hilbertov prostor.

Primjedba: Niti jedan od prostora $L_p(G)$, za $p \neq 2$, nije Hilbertov prostor! ♢

Primjer 5.5. Prostor $C[a,b]$ sa standardnom metrikom, nije Hilbertov prostor.
Ako bi bio, onda bi norma tog prostora

$$||x|| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| \ ,$$

morala izvirati iz skalarnog produkta definisanog na tom prostoru, a takođe bi morala vrijediti i relacija paralelograma. Međutim, posmatrajmo funkcije

$$f(t) = 1 \ , \ g(t) = \frac{t-a}{b-a} \ , \ t \in [a,b] \ .$$

Lahko se provjerava da vrijedi

$$||f|| = ||g|| = 1 \ , \ ||f-g|| = 1 \text{ i } ||f+g|| = 2 \ .$$

Ali sada imamo

$$||f+g||^2 + ||f-g||^2 = 5 \neq 4 = 2||f||^2 + 2||g||^2 \ ,$$

tojest ne vrijedi relacija paralelograma. Dakle, posmatrani prostor nije Hilbertov prostor.

Ako bi smo probali analogijom sa $L_2[a,b]$ prostorom da na $C[a,b]$ uvedemo skalarni produkt sa

$$(f,g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt \ ,$$

a sa njim i normu koja izvire iz ovog skalarnog produkta

$$||f|| = \sqrt{(f,f)} = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \ ,$$

onda se pokazuje da ovakav prostor nije kompletan. Zaista neka je $C[0,1]$, posmatramo li niz

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ (n+3)(t-\frac{1}{2}) & ; \quad \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n+3} \\ 1 & ; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{n+3} < t \leq 1 \end{cases}$$

za vježbu ostavljamo da se pokaže da dati niz jeste Cauchyjev, ali da nije konvergentan u $C[0,1]$.

Naravno da bi sada mogli izvršiti kompletiranje ovog prostora, ali tada bi se dobio prostor $L_2[a,b]$, za koga smo već pokazali da je Hilbertov. ♢

Primjer 5.6. Na prostoru $C^k[a,b]$ skalarni produkt se može uvesti sa

$$(f,g) = \sum_{i=1}^{k} \int_a^b \overline{f^{(i)}(x)} g^{(i)}(x) dx \ .$$

Oznaka $f^{(i)}$ predstavlja i-ti izvod funkcije f ($1 \leq i \leq k$).

Norma koja izvire iz zadatog skalarnog produkta je

$$||f|| = \left(\sum_{i=1}^{k} \int_a^b |f^{(i)}(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \ ,$$

u odnosu na koju dati prostor nije kompletan. Kompletiranjem ovakvog prostora dobija se prostor *Soboleva* koga uobičajeno označavamo sa $H^k(a,b)$ ili sa gornjom normom $W^{k,2}(a,b)$. ♢

5.2 Ortogonalnost i ortogonalni komplement

Definicija 5.4. *Neka je H Hilbertov prostor. Za vektore $x,y \in H$ kažemo da su ortogonalni ako i samo ako je $(x,y) = 0$. Tada pišemo $x \perp y$.*
Ako je fiksan element $x \in H$ ortogonalan na svaki vektor skupa $S \subset H$, kažemo da je x ortogonalan na S i pišemo $x \perp S$.
Ako je svaki vektor skupa $S_1 \subset H$ ortogonalan na svaki vektor skupa $S_2 \subset H$, kažemo da su skupovi ortogonalni i pišemo $S_1 \perp S_2$.
Za proizvoljan $S \subset H$, uvodimo oznaku

$$S^\perp = \{x \in H |\ (\forall u \in S)\ x \perp u\}\ .$$

Skup $S^\perp$ nazivamo ortogonalni komplement skupa S.

Sljedećim tvrđenjima dajemo neke jednostavne karakteristike ortogonalnosti.

Lema 5.7. *Neka je H Hilbertov prostor i $x, y_n \in H$ $(n \in \mathbb{N})$.*

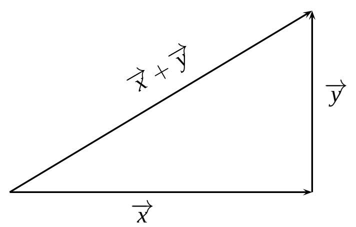
1. *Neka je $x \perp y_1$ i $x \perp y_2$. Tada za proizvoljne $a, b \in \Phi$ vrijedi $x \perp ay_1 + by_2$.*
2. *Neka je $x \perp y_n$ $(n \in \mathbb{N})$ i neka $y_n \to y_0$ $(n \to \infty)$. Tada vrijedi $x \perp y_0$.*
3. *Ako je $x \perp S$, tada je $x \perp \overline{L(S)}$.*

Lema 5.8. *Neka je H unitaran prostor i $S, S_1, S_2 \subseteq H$. Tada vrijedi:*

1. $\left(S^\perp\right)^\perp = \overline{S}$.
2. *Ako je S potprostor od H, onda je $S \cap S^\perp = \{0\}$.*
3. $(S_1 + S_2)^\perp = S_1^\perp \cap S_2^\perp$.
4. $(S_1 \cap S_2)^\perp = S_1^\perp + S_2^\perp$.
5. *Ako je $S_1 \subseteq S_2$, onda je $S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$.*

Teorem 5.9 (*Pitagorina teorema*). *Neka je H Hilbertov prostor. Ako su $x,y \in H$ ortogonalni, tada vrijedi*

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$



Dokaz :
Neka su $x,y \in H$ ortogonalni. Iz jednakosti (5.4), a na osnovu ortogonalnosti vektora imamo

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= ||x||^2 + (x,y) + (y,x) + ||y||^2 = ||x||^2 + 0 + 0 + ||y||^2 \\ &= ||x||^2 + ||y||^2\ . \end{aligned}$$

□

Kao jednostavna i skoro očigledna, ali korisna posljedica Pitagorine teoreme, vrijedi,

Posljedica 5.10. *Za svaka dva ortogonalna vektora $x,y \in H$ je $||x|| \leq ||x+y||$.*

Lema 5.11. *Ortogonalni komplement proizvoljnog podskupa Hilbertovog prostora H je potprostor od H.*

Dokaz : Zaista, neka je $A \subseteq H$ i neka su $x, y \in A^{\perp}$ i $\lambda, \mu \in \Phi$ proizvoljni. Tada je za proizvoljan $z \in A$

$$(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z) = 0 ,$$

tj. $\lambda x + \mu y \in A^{\perp}$, odnosno $A^{\perp}$ je linearan vektorski prostor.

Neka je sada $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A^{\perp}$ proizvoljan konvergentan niz. Neka je y tačka konvergencije tog niza. Tada za proizvoljno $x \in A$, na osnovu neprekidnosti skalarnog produkta imamo

$$(x, y) = (x, \lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty}(x, y_n) = 0 .$$

Dakle $y \in A^{\perp}$, pa je $A^{\perp}$ zatvoren skup, a to onda znači da je on potprostor od H. $\square$

Definicija 5.5. *Neka je S podskup od H, pri čemu je H Hilbertov prostor. Za S kažemo da je konveksan skup ako vrijedi*

$$(\forall u, v \in S)(\forall \lambda \in [0,1]) \;\; \lambda u + (1-\lambda)v \in S .$$

Pored Pitagorine teoreme i Pravila paralelograma, sljedeće dvije teoreme daju nam osnovne geometrijske karakteristike Hilbertovih prostora.

Teorem 5.12. *Neka je $S \subseteq H$ konveksan i zatvoren skup. Tada*

$$(\forall x_0 \in H)(\exists! y_0 \in S) \;\; d(x_0, S) = \|x_0 - y_0\| .$$

Dokaz : Neka je $S \subseteq H$ konveksan i zatvoren skup i $x_0 \in H$ proizvoljan. Označimo

$$d(x_0, S) = \inf_{y\in S} d(x, y) = \inf_{y\in S} \|x_0 - y\| = d .$$

Na osnovu definicije infimuma, u S postoji niz $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, takav da $\|x_0 - y_n\| \to d \;\; (n \to \infty)$. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$, posmatrajmo elemente $y_n - x_0$, $y_m - x_0 \in H$ i kako je H Hilbertov prostor, to za ove elemente vrijedi relacija paralelograma, tj.

$$\|y_n + y_m - 2x_0\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x_0\|^2 + 2\|y_m - x_0\|^2 ,$$

što je ekvivalentno sa

$$4\|x_0 - \underbrace{\frac{y_n + y_m}{2}}_{y'}\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x_0\|^2 + 2\|y_m - x_0\|^2 .$$

S obzirom da je po uslovu zadatka S konveksan skup, to je $y' \in S$, pa vrijedi

$$4\|x_0 - y'\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 \geq 4(\inf_{y\in S} \|x_0 - y\|)^2 + \|y_n - y_m\|^2 ,$$

odnosno,

$$4\|x_0 - y'\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 \geq 4d^2 + \|y_n - y_m\|^2 .$$

Iz posljednje dvije nejednakosti dobijamo

$$2\|y_n - x_0\|^2 + 2\|y_m - x_0\|^2 - 4d^2 \geq \|y_n - y_m\|^2 .$$

Puštajući da $m,n \to \infty$, zaključujemo da $\|y_n - y_m\| \to 0$, a to znači da je $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev niz u $S \subseteq H$, i kako je H Hilbertov prostor, tj. kompletan, to je ovaj niz konvergentan. Dakle, postoji $y_0 \in H$, takav da $y_n \to y_0 \ \ (n \to \infty)$. Osim toga, zbog zatvorenosti skupa S je $y_0 \in S$. Sada je

$$d = d(x_0,S) = \inf_{y\in S} \|x_0 - y\| = \lim_{n\to\infty} \|x_0 - y_n\| = \|x_0 - \lim_{n\to\infty} y_n\| = \|x_0 - y_0\|.$$

Ostaje da pokažemo da je ovakav element jedinstven. Pretpostavimo da postoje $y_0, y_0' \in S$, takvi da je

$$d(x_0,S) = \|x_0 - y_0\| \ \text{ i } \ d(x_0,S) = \|x_0 - y_0'\| \ .$$

Kako je S konveksan skup, to za svako $\lambda \in [0,1]$ vrijedi $\lambda y_0 + (1-\lambda)y_0' \in S$ i pri tome je

$$\|x_0 - (\lambda y_0 + (1-\lambda)y_0')\| \geq d = d(x_0,S) \ .$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} d &\leq \|\lambda x_0 + (1-\lambda)x_0 - \lambda y_0 - (1-\lambda)y_0'\| = \|\lambda(x_0 - y_0) + (1-\lambda)(x_0 - y_0')\| \\ &\leq \|\lambda(x_0 - y_0)\| + \|(1-\lambda)(x_0 - y_0')\| = \lambda\|x_0 - y_0\| + (1-\lambda)\|x_0 - y_0'\| \\ &= \lambda d + (1-\lambda)d = d \ . \end{aligned}$$

Dakle, mora vrijediti $\|x_0 - (\lambda y_0 + (1-\lambda)y_0')\| = d$, odnosno za proizvoljno $\lambda \in [0,1]$ je

$$\|x_0 - (\lambda y_0 + (1-\lambda)y_0')\|^2 = d^2 \ .$$

Odavde na osnovu osobina skalarnog produkta imamo

$$\begin{aligned} d^2 &= (x_0 - \lambda y_0 - (1-\lambda)y_0', x_0 - \lambda y_0 - (1-\lambda)y_0') \\ &= ((x_0 - y_0') - \lambda(y_0 - y_0'), (x_0 - y_0') - \lambda(y_0 - y_0')) \\ &= (x_0 - y_0', (x_0 - y_0') - \lambda(y_0 - y_0')) - \lambda(y_0 - y_0', (x_0 - y_0') - \lambda(y_0 - y_0')) \\ &= (x_0 - y_0', x_0 - y_0') - \lambda(x_0 - y_0', y_0 - y_0') - \lambda(y_0 - y_0', x_0 - y_0') - \lambda^2(y_0 - y_0', y_0 - y_0') \\ &= \|x_0 - y_0'\|^2 - \lambda\big((x_0 - y_0', y_0 - y_0') + (x_0 - y_0', x_0 - y_0')\big) + \lambda^2\|y_0 - y_0'\|^2 \\ &= d^2 - \lambda\big((x_0 - y_0', y_0 - y_0') + (x_0 - y_0', x_0 - y_0')\big) + \lambda^2\|y_0 - y_0'\|^2 \ . \end{aligned}$$

Iz posljednjeg zaključujemo da za svako $\lambda \in [0,1]$, vrijedi

$$\lambda^2\|y_0 - y_0'\|^2 - \lambda\big((x_0 - y_0', y_0 - y_0') + (x_0 - y_0', x_0 - y_0')\big) = 0 \ .$$

Kako je ovo kvadratni polinom po λ i mora biti jednak 0 za svako $\lambda \in [0,1]$, to će se dogoditi samo ako su koeficijenti tog polinoma jednaki 0. To između ostalog znači da mora biti

$$\|y_0 - y_0'\|^2 = 0 \ ,$$

iz čega onda dobijamo da je $y_0 = y_0'$. □

Teorem 5.13 (Ortogonalna dekompozicija). *Neka je H Hilbertov prostor i H_1 potprostor prostora H. Tada za svaki $x \in H$ postoji tačno jedan $y \in H_1$, takav da je $(x-y) \perp H_1$.*

Dokaz : Kako je H_1 potprostor Hilbertovog prostora H, to je H_1 zatvoren i konveksan skup, pa na osnovu Teoreme 5.12 vrijedi

$$(\forall x \in H)(\exists! y \in H_1) \ d(x,H_1) = \|x - y\| \ .$$

Neka su sada $u \in H_1$ i $\lambda \in \Phi$ proizvoljni. Tada je:

$$\|x-y-\lambda u\| \geq \|x-y\| \;\Leftrightarrow\; \|x-y-\lambda u\|^2 \geq \|x-y\|^2 \; .$$

Zbog jednakosti (5.2) imamo da vrijedi

$$(x-y-\lambda u,\; x-y-\lambda u) \geq \|x-y\|^2.$$

Primjenjujući sada osobine skalarnog produkta na prethodnu nejednakost, dobijamo:

$$\begin{aligned}
& (x-y,x-y-\lambda u) - \lambda(u,x-y-\lambda u) \geq \|x-y\|^2 \\
\Leftrightarrow \quad & (x-y,x-y) - \overline{\lambda}(x-y,u) - \lambda(u,x-y) + \lambda^2(u,u) \geq \|x-y\|^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \|x-y\|^2 - \overline{\lambda}(x-y,u) - \lambda(u,x-y) + \lambda^2\|u\|^2 \geq \|x-y\|^2
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2\|u\|^2 \geq \overline{\lambda}(x-y,\; u) + \lambda(u,\; x-y) \;\; (\forall \lambda \in \Phi,\; \forall u \in H_1) \tag{5.16}$$

Posmatrajmo sada dva slučaja:
(1) $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0$. Tada iz (5.16) dobijamo $\lambda^2\|u\|^2 \geq \lambda(x-y,u) + \lambda(u,x-y)$. Dijeljenjem sa $\lambda > 0$, dobijamo $(x-y,u)+(u,x-y) \leq \lambda\|u\|^2$. Pustimo li da $\lambda \to 0$, imamo da vrijedi

$$(x-y,u)+(u,x-y) \leq 0. \tag{5.17}$$

(2) $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda < 0$. Tada iz (5.16) dobijamo $\lambda^2\|u\|^2 \geq \lambda(x-y,u) + \lambda(u,x-y)$. Dijeljenjem sa $\lambda < 0$, dobijamo $(x-y,u)+(u,x-y) \geq \lambda\|u\|^2$. Pustimo li da $\lambda \to 0$, imamo da vrijedi

$$(x-y,u)+(u,x-y) \geq 0. \tag{5.18}$$

Iz nejednakosti (5.17) i (5.18) dobijamo da za svako $u \in H_1$ mora biti

$$(x-y,\; u)+(u,\; x-y) = 0 \; . \tag{5.19}$$

Izvršimo li formalnu zamjenu u sa iu u (5.19) imamo

$$(x-y,iu)+(iu,x-y) = \overline{i}(x-y,u)+i(u,x-y) = -i(x-y,u)+i(u,x-y) = 0 \; .$$

Dijeljenjem posljednje jednakosti sa i, dobijamo da za svako $u \in H_1$ mora takođe biti

$$(u,x-y)-(x-y,u) = 0 \; . \tag{5.20}$$

Jednakosti (5.19) i (5.20) nam daju

$$(u,x-y) = (x-y,u) = 0 \; , \; \forall u \in H_1,$$

odnosno, $(x-y) \perp H_1$.

Pokažimo jedinstvenost ovakvog elementa. Neka su $y_1, y_2 \in H_1$ takvi da je

$$(x-y_1) \perp H_1 \quad \wedge \quad (x-y_2) \perp H_1 \; .$$

To znači

$$(\forall u \in H_1)\; (x-y_1,u) = 0 \;\wedge\; (x-y_2,u) = 0 \; ,$$

ili

$$(\forall u \in H_1)\; (x-y_1,u)-(x-y_2,u) = 0 \; .$$

Dakle, vrijedi

$$(\forall u \in H_1)\; (y_2-y_1,u) = 0 \; .$$

Stavljajući sada da je $u = y_2 - y_1$, dobijamo

$$(y_2-y_1,y_2-y_1) = \|y_2-y_1\|^2 = 0 \; ,$$

iz čega je onda $y_2 = y_1$. $\square$

Ovaj teorem nam ustvari govori da ako je H_1 potprostor Hilbertovog prostora H, tada svaki $x \in H$ možemo na jedinstven način napisati u obliku $x = y+z$, pri čemu je $y \in H_1$ i $z = x-y \perp H_1$. Naime, važi:

Posljedica 5.14. *Neka je H_1 potprostor Hilbertovog prostora H tada*

$$(\forall x \in H)(\exists! y \in H_1 \ \wedge \ \exists! z \perp H_1) \qquad x = y + z.$$

Ovo takođe možemo iskazati u sljedećoj terminologiji.

Posljedica 5.15. *Ako je H_1 potprostor Hilbertovog prostora H, onda je H ortogonalna suma potprostora H_1 i $H_1^{\perp}$, u oznaci $H = H_1 \oplus H_1^{\perp}$.*

5.3 Ortonormirani sistemi

Definicija 5.6. *Skup vektora $E = \{e_\alpha \mid \alpha \in A\}$ u Hilbertovom prostoru H nazivamo ortogonalnim skupom ako vrijedi*

$$(\forall \alpha, \beta \in A) \ (\alpha \neq \beta \ \Rightarrow \ (e_\alpha, e_\beta) = 0) \ .$$

Skup E nazivamo normiranim skupom ako vrijedi

$$(\forall \alpha \in A) \ \|e_\alpha\| = 1 \ .$$

Ako je E ortogonalan i normiran skup, onda kažemo da je E ortonormiran skup (ili ortonormiran sistem).

Primjer 5.7. Skup vektora $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ je ortonormiran u Hilbertovom prostoru $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ako vrijedi:

- $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ za $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, gdje je δ_{ij} Kroneckerova[2] delta,
- za proizvoljno $x \in \mathbb{R}^n$, postoje jedinstveni $x_k \in \mathbb{R}$, takvi da je

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \ .$$

Naprimjer, standardnu ortonormiranu bazu na $\mathbb{R}^3$ čine vektori

$$e_1 = (1,0,0) = \overrightarrow{i} \ , \ e_2 = (0,1,0) = \overrightarrow{j} \ , \ \text{i} \ \ , e_n = (0,0,1) = \overrightarrow{k} \ .$$

♢

Primjer 5.8. Na prostoru $L_2[0, 2\pi]$ (2π periodičnih funkcija), ortonormirani sistem je zadat sa $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, gdje je

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \ .$$

Ovaj sistem se naziva *Fourierova baza*. ♢

Primjer 5.9. Za funkciju koja je predstavljena kao konačna suma periodičnih funkcija kažemo da je *kvaziperiodična*. Ako su ratios perioda funkcija koje učestvuju u sumi racionalni, tada je i funkcija periodična. Ako je bar jedan ratio iracionalan, tada funkcija nije periodična. Naprimjer funkcija

$$f(x) = e^{ix} + e^{i\pi x} \ ,$$

jeste kvaziperiodična, ali nije periodična. Označimo sa X skup svih kvaziperiodičnih funkcija, tojest funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, oblika

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\omega_k t} \ ,$$

[2] Leopold Kronecker 1823-1891, njemački matematičar

gdje su $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{C}$ i $\omega_k \in \mathbb{R}$ proizvoljne konstante. U primjenama je najčešće t vremenska varijabla, dok je sama funkcija f suma vremensko-harmonijskih funkcija sa amplitudama $|a_k|$, faznim pomjerajima $arg\, a_k$ i frekvencijama ω_k. ????????

Sada na X možemo definisati skalarni produkt na sljedeći način. Za $f,g \in X$

$$(f,g) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \overline{f(t)} g(t) dt \ .$$

Kako su $f(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\omega_k t}$ i $g(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k e^{i\omega_k t}$, gdje je $\omega_i \neq \omega_j$ za $i \neq j$, tada je

$$(f,g) = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k} b_k \ .$$

Zbog periodičnosti funkcija, skalarni produkt možemo pisati i sa

$$(f,g) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \overline{f(t)} g(t) dt \ ,$$

gdje je t_0 proizvoljno fiksno vrijeme, nezavisno o T. Iz skalarnog produkta izvire norma ovog prostora, ali u odnosu na koju X nije kompletan prostor. Kompletiranjem dobijamo prostor koga nazivamo L_2-skoro periodičnih funkcija. Ovaj prostor se sastoji od klasa ekvivalencija funkcija oblika

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\omega_k t} \ ,$$

za koje je $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$.

Skup $\{e^{i\omega t} \mid \omega \in \mathbb{R}\}$ predstavlja ortonormiran sistem u ovom Hilbertovom prostoru i to kao što vidimo, neprebrojiv sistem. $\diamondsuit$

Definicija 5.7. *Za ortonormiran sistem kažemo da je maksimalan ako nije sadržan niti u jednom širem (u skupovnom smislu) ortonormiranom sistemu.*

Teorem 5.16. *Skup $\{e_\alpha \mid \alpha \in A\}$ je maksimalan ortonormiran sistem u Hilbertovom prostoru H ako i samo ako ne postoji nenula vektor u H, ortogonalan na sve vektore datog sistema.*

Dokaz : Neka je $\{e_\alpha \mid \alpha \in A\}$ maksimalan ortonormiran sistem i pretpostavimo da postoji $0 \neq x_0 \in H$, takav da je za sve $\alpha \in A$, $(x_0, e_\alpha) = 0$. Označimo sa $y_0 = \frac{x_0}{\|x_0\|}$. Tada je $\|y_0\| = 1$ i pri tome je sistem koji se sastoji od $\{e_\alpha \mid \alpha \in A\}$ i vektora y_0 ortonormiran i strogo širi od $\{e_\alpha \mid \alpha \in A\}$, što je u suprotnosti sa maksimalnošću posmatranog sistema.

Neka je $\{e_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ortonormiran sistem u H za koga je zadovoljeno da ako za neko $x \in H$ vrijedi

$$(\forall \alpha \in A)\ (x, e_\alpha) = 0 \ ,$$

tada je $x = 0$. Ako pretpostavimo da to nije maksimalan ortonormiran sistem, onda bi postojao $y \neq 0$ takav da je $\{e_\alpha \mid \alpha \in A\} \cup \{y\}$ takođe ortonormiran sistem. Tada bi zbog ortogonalnosti ovog sistema moralo biti $y = 0$, što je u suprotnosti sa izborom vektora y. Dakle, $\{e_\alpha \mid \alpha \in A\}$ je maksimalan ortonormiran sistem. $\square$

Teorem 5.17. *Svaki netrivijalan Hilbertov prostor sadrži maksimalan orto-normiran skup.*

Dokaz : Neka je H netrivijalan Hilbertov prostor, tada postoji $x \in H$ takav da je $x \neq 0$. Tada je skup $\{x_0\}$, gdje je $x_0 = \frac{x}{\|x\|}$, normiran jer je $\|x_0\| = 1$. Označimo sa $\mathscr{S}$ familiju svih ortonormiranih sistema koji sadrže skup $\{x_0\}$ i uvedimo relaciju "$\preccurlyeq$" sa

$$S_1, S_2 \in \mathscr{S} \ , \ S_1 \preccurlyeq S_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} S_1 \subseteq S_2 \ .$$

Lahko se provjerava da je relacija uvedena na ovaj način, relacija poretka. Ako je $\mathscr{S}_\triangle$ lanac u $\mathscr{S}$, tj. totalno uređen skup u $\mathscr{S}$, pokažimo da je tada

$$\overline{S} = \bigcup_{S \in \mathscr{S}_\triangle} S \,,$$

ortonormiran skup. Zaista,

$$x \in \overline{S} \;\Rightarrow\; (\exists S' \in \mathscr{S}_\triangle)\; x \in S' \text{ i } S' \text{ ortonormiran } \;\Rightarrow\; \|x\| = 1 \,,$$

što znači da je $\overline{S}$ normiran skup.

S druge strane, ako su $x,y \in \overline{S}$, onda

$$(\exists S_1, S_2 \in \mathscr{S}_\triangle)\; x \in S_1,\; y \in S_2,$$

te kako je $\mathscr{S}_\triangle$ lanac, to je $S_1 \preccurlyeq S_2$ ili $S_2 \preccurlyeq S_1$. Neka je $S_1 \preccurlyeq S_2$. Tada zbog načina na koji smo definisali relaciju "$\preccurlyeq$", imamo da je $S_1 \subseteq S_2$, a to znači $x,y \in S_2$. Kako je S_2 ortonormiran skup, to onda znači da je $(x,y) = 0$, tj. x i y su ortogonalni. Zbog njihove proizvoljnosti je $\overline{S}$ ortogonalan skup. Dakle, $\overline{S}$ je ortonormiran skup.

Za proizvoljan $S \in \mathscr{S}_\triangle$ vrijedi da je $S \subseteq \overline{S}$, što znači da je $\mathscr{S}_\triangle$ ograničen odozgo, pa na osnovu Zornove leme, postoji maksimalan element u $\mathscr{S}$ i neka je to $S_0 \in \mathscr{S}$. Sada je S_0 maksimalan ortonormiran skup u Hilbertovom prostoru H. $\square$

Gornjim teoremom smo utvrdili važnu činjenicu da u svakom netrivijalnom Hilbertovom prostoru imamo maksimalan ortonormiran sistem, ali nismo dobili nikakvu informaciju o kardinalnosti tog sistema. Uz dodatne uslove na posmatrani Hilbertov prostor gornji teorem dobija precizniju formu. Dokažimo prvo jedno pomoćno tvrđenje.

Lema 5.18. *Neka je $S \subseteq H$. Da bi skup $L(S)$ bio gust u H potrebno je i dovoljno da vrijedi $S^\perp = 0$.*

Dokaz : Neka je $S \subseteq H$ i neka je $L(S)$ gust u H. Za proizvoljno $x_0 \in H$, postoji $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L(S)$, takav da $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Neka je $x_0 \perp S$, tj. za svako $s \in S$, $(x_0, s) = 0$. Kako je $L(S)$ skup konačnih linearnih kombinacija vektora iz S, to onda i za svako $x \in L(S)$ vrijedi $(x_0, x) = 0$, a tim prije vrijedi i $(x_0, x_n) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Iz neprekidnosti skalarnog produkta sada imamo

$$0 = (x_0, x_n) \to (x_0, x_0) = ||x_0||^2 \;,\; n \to \infty \,,$$

a to onda znači da mora biti $||x_0|| = 0$, odnosno $x_0 = 0$.

Neka sada vrijedi, ako je $x \perp S$ onda je $x = 0$. Pretpostavimo da $L(S)$ nije gust u H, tj. $\overline{L(S)} \neq H$. Tada postoji $u \in H \setminus \overline{L(S)}$, i na osnovu Teoreme 5.14, postoje jedinstveni $y_0 \in \overline{L(S)}$ i $z_0 \perp \overline{L(S)}$, takvi da je $u = y_0 + z_0$. Pri tome mora biti $z_0 \neq 0$ jer $u \notin \overline{L(S)}$. Međutim, kako je $z_0 \perp \overline{L(S)}$, to je tim prije $z_0 \perp S$, pa bi zbog učinjene pretpostavke moralo biti $z_0 = 0$. Dakle imamo kontradikciju, pa $L(S)$ mora biti gust u H. $\square$

Teorem 5.19. ***(Gramm-Schmidtov postupak ortogonalizacije)***
Svaki separabilan Hilbertov prostor sadrži najviše prebrojiv ortonormiran sistem.

Dokaz : Neka je H Hilbertov prostor i neka je $\{y_1', y_2', \dots, y_n', \dots\}$ svuda gust prebrojiv skup u H. Ako u ovom skupu krenemo od prvog elementa i izbacujemo sve one koji su linearna kombinacija nekih prethodnih mu elemenata, formiramo skup $\{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$ linearno nezavisnih elelemata, koji je također najviše prebrojiv skup u H. Definišimo sada

$$D_n = \begin{vmatrix} (y_1,y_1) & (y_2,y_1) & \cdots & (y_n,y_1) \\ (y_1,y_2) & (y_2,y_2) & \cdots & (y_n,y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (y_1,y_n) & (y_2,y_n) & \cdots & (y_n,y_n) \end{vmatrix} \;,\; (n \in \mathbb{N}). \tag{5.21}$$

Formirajmo sistem

$$\begin{aligned}
&(y_1,y_1)c_1+(y_2,y_1)c_2+\ldots+(y_n,y_1)c_n=0\\
&(y_1,y_2)c_1+(y_2,y_2)c_2+\ldots+(y_n,y_2)c_n=0\\
&\quad\vdots\\
&(y_1,y_n)c_1+(y_2,y_n)c_2+\ldots+(y_n,y_n)c_n=0
\end{aligned} \tag{5.22}$$

čija je determinanta upravo D_n. Ako je $D_n=0$ sistem ima netrivijalno rješenje $(\overline{c_1},\overline{c_2},\ldots,\overline{c_n})\neq 0$ i stavimo da je

$$\overline{y}=\overline{c_1}y_1+\overline{c_2}y_2+\ldots+\overline{c_n}y_n.$$

Kako su $y_1,y_2,\ldots,y_n$ linearno nezavisni i $(\overline{c_1},\overline{c_2},\ldots,\overline{c_n})\neq 0$, to je $\overline{y}\neq 0$. Množeći gornju jednakost sa y_i ($i\in\{1,2,...,n\}$), dobijamo

$$(\overline{y},y_i)=\overline{c_1}(y_1,y_i)+\overline{c_2}(y_2,y_i)+\ldots+\overline{c_n}(y_n,y_i)=0\ ,\ (i=1,2,\ldots,n)\ ,$$

odakle zaključujemo da vrijedi $(\overline{y},\overline{y})=0$, što je ekvivalentno sa $\overline{y}=0$, a ovo je u suprotnosti sa konstrukcijom elementa $\overline{y}$. Prema tome, $D_n\neq 0$, za proizvoljno $n\in\mathbb{N}$. Označimo sada

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{D_nD_{n-1}}}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n\\ (y_1,y_1) & (y_2,y_1) & \cdots & (y_n,y_1)\\ (y_1,y_2) & (y_2,y_2) & \cdots & (y_n,y_2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (y_1,y_{n-1}) & (y_2,y_{n-1}) & \cdots & (y_n,y_{n-1})\end{vmatrix}\ ,\ n\in\mathbb{N}\ ,\ D_0=1. \tag{5.23}$$

Očigledno je svaki x_n linarna kombinacija elemenata $y_1,y_2,\ldots,y_n$. Takođe iz

$$\sqrt{D_nD_{n-1}}\cdot x_n=\sum_{i=1}^{n-1}\beta_iy_i+(-1)^{n-1}y_nD_{n-1}\qquad(\beta_i\in\Phi)\ , \tag{5.24}$$

zbog $D_{n-1}\neq 0$ vrijedi

$$y_n=\frac{(-1)^{n-1}}{D_{n-1}}\big(\sqrt{D_nD_{n-1}}\cdot x_n-\sum_{i=1}^{n-1}\beta_iy_i\big)\ ,$$

tj. i y_n su linearne kombinacije vektora x_k , ($k=1,2,...,n$).

Množeći sada x_n, dato sa (5.23), skalarno sa y_i $(1\leq i\leq n-1)$, dobijamo

$$(x_n,y_i)=\frac{1}{\sqrt{D_nD_{n-1}}}\begin{vmatrix} (y_1,y_i) & (y_2,y_i) & \cdots & (y_n,y_i)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (y_1,y_i) & (y_2,y_i) & \cdots & (y_n,y_i)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (y_1,y_{n-1}) & (y_2,y_{n-1}) & \cdots & (y_n,y_{n-1})\end{vmatrix}=0\qquad .$$

Kako se svaki od vektora x_i $(1\leq i\leq n-1)$ može izraziti kao linearna kombinacija vektora y_i $(1\leq i\leq n-1)$, slijedi da je

$$(x_n,x_i)=0,\ (1\leq i\leq n-1)\ .$$

To znači da za $i\neq j$, vrijedi $(x_i,x_j)=0$, dakle, $\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}$ je ortogonalan sistem.

Množeći sada x_n, dato sa (5.23), sa y_n dobijamo

$$(x_n,y_n)=\frac{1}{\sqrt{D_nD_{n-1}}}\begin{vmatrix} (y_1,y_n) & (y_2,y_n) & \cdots & (y_n,y_n)\\ (y_1,y_1) & (y_2,y_1) & \cdots & (y_n,y_1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (y_1,y_{n-1}) & (y_2,y_{n-1}) & \cdots & (y_n,y_{n-1})\end{vmatrix}=\frac{(-1)^{n-1}D_n}{\sqrt{D_nD_{n-1}}}\ , \tag{5.25}$$

a množenjem (5.24) skalarno sa x_n dobijamo

$$\sqrt{D_nD_{n-1}}(x_n,x_n) = \sum_{i=1}^{n-1}\beta_i(y_i,x_n) + (-1)^{n-1}(y_n,x_n)D_{n-1} = (-1)^{n-1}D_{n-1}(y_n,x_n). \tag{5.26}$$

Sada iz jednakosti (5.25) i (5.26) slijedi

$$\begin{aligned}(x_n,x_n) &= \frac{(-1)^{n-1}D_{n-1}}{\sqrt{D_nD_{n-1}}}\cdot(y_n,x_n)\\ &= \frac{(-1)^{n-1}D_{n-1}}{\sqrt{D_nD_{n-1}}}\cdot\frac{(-1)^{n-1}D_n}{\sqrt{D_nD_{n-1}}}\\ &= \frac{(-1)^{2n-2}D_nD_{n-1}}{D_nD_{n-1}} = 1\,.\end{aligned}$$

Odavde je $\|x_n\| = 1$, za proizvoljno $n\in\mathbb{N}$, te je $\{x_1,x_2,\dots,x_n,\dots\}$ normiran sistem, što zajedno sa ranije pokazanim znači da je $\{x_1,x_2,\dots,x_n,\dots\}$ ortonormiran sistem.

Neka je sada $x\in H$, takav da je za sve $i\in\mathbb{N}$, $(x,x_i)=0$. Ovo opet znači da je $(x,y_i)=0$ za sve $i\in\mathbb{N}$, ali tada je i $(x,y'_i)=0$ za sve $i\in\mathbb{N}$. Kako je skup $\{y'_i|\ i\in\mathbb{N}\}$ gust u H, na osnovu Leme 5.18, zaključujemo da je $x=0$. Dakle,

$$(\forall x\in H)(\forall\, i\in\mathbb{N})\ \big((x,x_i)=0\ \Rightarrow\ x=0\big)\ ,$$

što na osnovu Teoreme 5.16 znači da je $\{x_1,x_2,\dots,x_n,\dots\}$ maksimalan ortonormiran sistem u H. □

Teorem 5.20. *Neka je $S\subseteq H$ ortogonalan sistem vektora i neka je $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\subset S$. Tada red $\sum_{i=1}^{\infty}x_i$ konvergira ako i samo ako konvergira red $\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^2$.*

Dokaz : Označimo sa s_k i s'_k redom parcijalne sume posmatranih redova,

$$s_k = \sum_{i=1}^{k}x_i \quad \text{i} \quad s'_k = \sum_{i=1}^{k}\|x_i\|^2\ .$$

Sada za $m,n\in\mathbb{N}$, $m>n$ imamo

$$\|s_m-s_n\|^2 = \Big\|\sum_{i=1}^{m}x_i - \sum_{i=1}^{n}x_i\Big\|^2 = \Big\|\sum_{i=n+1}^{m}x_i\Big\|^2 = \Big(\sum_{i=n+1}^{m}x_i,\ \sum_{i=n+1}^{m}x_i\Big). \tag{5.27}$$

Kako je S ortogonalan sistem vektora, to za svaki $i\neq j$ vrijedi $(x_i,x_j)=0$, pa iz (5.27) imamo

$$\|s_m-s_n\|^2 = \sum_{i=n+1}^{m}\Big(x_i,\ \sum_{i=n+1}^{m}x_i\Big) = \sum_{i=n+1}^{m}\sum_{j=n+1}^{m}(x_i,x_j) = \sum_{i=n+1}^{m}(x_i,x_i) =$$

$$= \sum_{i=n+1}^{m}\|x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\|x_i\|^2 - \sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2 = s'_m - s'_k\ .$$

Iz ovoga vidimo da niz $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira ako i samo ako niz $(s'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira, čime je tvrdnja dokazana. □

Definicija 5.8. *Neka je $\{e_\alpha|\ \alpha\in A\}$ ortonormiran sistem vektora u Hilbertovom prostoru H. Brojeve oblika*

$$x_\alpha = (x,e_\alpha) \qquad (\alpha\in A)$$

nazivamo Fourierovi koeficijenti vektora x u odnosu na sistem $\{e_\alpha|\ \alpha\in A\}$.

Teorem 5.21. ***(Besselova nejednakost)***
Neka je $\{e_{\alpha_i} |\ i \in \mathbb{N}\}$ prebrojiv podsistem ortonormiranog sistema $\{e_\alpha |\ \alpha \in A\}$. Tada vrijedi nejednakost

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_{\alpha_i}|^2 \leq \|x\|^2.$$

Dokaz : Neka je $\{e_{\alpha_i} |\ i \in \mathbb{N}\}$ prebrojiv podsistem ortonormiranog sistema $\{e_\alpha | \alpha \in A\}$. To je i on sam ortonormiran sistem, pa su tada $x_{\alpha_i} = (x, e_{\alpha_i})$ Fourierovi koeficijenti vektora x u odnosu na sistem $\{e_{\alpha_i} |\ i \in \mathbb{N}\}$. Za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i} \right\|^2 \geq 0 \ .$$

Na osnovu toga onda imamo

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left(x - \sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i}, x - \sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i} \right) \\
&= (x,x) - \sum_{i=1}^{n} \overline{x_{\alpha_i}} (x, e_{\alpha_i}) - \sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i} (e_{\alpha_i}, x) + \sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i} \sum_{j=1}^{n} \overline{x_{\alpha_i}} (e_{\alpha_i}, e_{\alpha_j}) \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \overline{x_{\alpha_i}} \cdot x_{\alpha_i} - \sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i} \cdot \overline{x_{\alpha_i}} + \sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i} \cdot \overline{x_{\alpha_i}} \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |x_{\alpha_i}|^2 \ ,
\end{aligned}$$

iz čega onda imamo

$$\sum_{i=1}^{n} |x_{\alpha_i}|^2 \leq \|x\|^2 \ .$$

Pustimo li u posljednjoj nejednakosti da $n \to \infty$, dobijamo traženu nejednakost

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_{\alpha_i}|^2 \leq \|x\|^2 \ .$$

□

Teorem 5.22. *Za svaki vektor iz H najviše prebrojivo mnogo Fourierovih koeficijenata tog vektora može biti različito od 0.*

Dokaz : Neka je $\{e_\alpha |\ \alpha \in A\}$ proizvoljan ortonormiran sistem u H. Tada za proizvoljan $x \in H$ vrijedi Besselova nejednakost

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_{\alpha_i}|^2 \leq \|x\|^2$$

pa zbog konvergencije reda na lijevoj strani zaključujemo da samo konačno mnogo Fourierovih koeficijenata vektora x može imati modul veći od $\frac{1}{n}$, za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$. Neka je F_0 skup svih Fourierovih koeficijenata vektora x koji su različiti od 0, a F_n skup svih Fourierovih koeficijenata vektora x kod kojih je modul veći od $\frac{1}{n}$. Tada je očigledno

$$F_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Kako su svi F_n konačni, to je F_0 najviše prebrojiv kao prebrojiva unija konačnih skupova. □

Iako znamo da je najviše prebrojivo mnogo Fourierovih koeficijenata vektora x u odnosu na ortonormirani sistem $\{e_\alpha |\ \alpha \in A\}$ različito od 0, ipak ćemo pisati

$$\sum_{\alpha \in A} x_\alpha e_\alpha ,$$

podrazumijevajući prebrojivost.

Teorem 5.23. *Neka je $\{e_\alpha |\ \alpha \in A\}$ proizvoljan ortonormiran sistem vektora u Hilbertovom prostoru H. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(a) Sistem $\{e_\alpha |\ \alpha \in A\}$ je maksimalan ortonormiran sistem u H.

(b) $(\forall x \in H)\ x = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha e_\alpha\ ,\ \ x_\alpha = (x, e_\alpha)$.

(c) $(\forall x \in H)\ \|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |x_\alpha|^2$.

(d) $(\forall x, y \in H)\ (x,y) = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha \overline{y_\alpha}\ ,\ \ x_\alpha = (x, e_\alpha),\ y_\alpha = (y, e_\alpha)$.

Dokaz : ”$(a) \Rightarrow (b)$”
Neka je $x \in H$ proizvoljan i neka su $x_{\alpha_i} (i \in \mathbb{N})$ njegovi Fourierovi koeficijenti u odnosu na sistem $\{e_\alpha |\ \alpha \in A\}$, koji su različiti od 0. Tada je na osnovu Besselove nejednakosti $\sum_{i=1}^{\infty} |x_{\alpha_i}|^2 \leq \|x\|^2$, i kako je

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_{\alpha_i}|^2 \cdot 1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_{\alpha_i}|^2 \cdot \|e_{\alpha_i}\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|x_{\alpha_i} \cdot e_{\alpha_i}\|^2 ,$$

imamo da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_{\alpha_i} \cdot e_{\alpha_i}\|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty .$$

Dakle, red $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_{\alpha_i} \cdot e_{\alpha_i}\|^2$ konvergira, pa prema Teoremu 5.20, konvergira i red $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i}$. Označimo sa $\widetilde{x}$ sumu tog reda. Tada vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i} \to \widetilde{x} \quad (n \to \infty) ,$$

a množeći ovo skalarno sa proizvoljnim $y \in H$, imamo

$$\sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i} (e_{\alpha_i}, y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i}, y \Big) \to (\widetilde{x}, y) \quad (n \to \infty) ,$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_{\alpha_i} (e_{\alpha_i}, y) = (\widetilde{x}, y) .$$

Stavimo li da je $y = e_{\alpha_j}$ dobijamo

$$(\widetilde{x}, e_{\alpha_j}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_{\alpha_i} (e_{\alpha_i}, e_{\alpha_j}) = x_{\alpha_j} \|e_{\alpha_j}\| = x_{\alpha_j}\ ,\ j \in \mathbb{N} .$$

Osim toga za $\alpha \neq \alpha_j$ $(j \in \mathbb{N})$ vrijedi $(\widetilde{x}, e_\alpha) = 0$. Kako i za $x \in H$ vrijedi $(x, e_\alpha) = 0$ za $\alpha \neq \alpha_j$ $(j \in \mathbb{N})$, to za sve $\alpha \in A$ imamo $(x - \widetilde{x}, e_\alpha) = 0$. S obzirom da je $\{e_\alpha |\ \alpha \in A\}$ maksimalan ortonormiran sistem, to imamo da je $x - \widetilde{x} = 0$ tj. $x = \widetilde{x}$. Dakle vrijedi,

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i} = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha e_\alpha.$$

"$(b) \Rightarrow (a)$"
Neka je $x' \in H$ takav da je za proizvoljan $\alpha \in A$, $x'_\alpha = (x', e_\alpha) = 0$. Na osnovu (b) imamo

$$x' = \sum_{\alpha \in A} x'_\alpha e_\alpha \quad \Rightarrow \quad x' = 0.$$

Ovo znači, na osnovu Teoreme 5.16, da je $\{e_\alpha |\ \alpha \in A\}$ maksimalan ortonormiran sistem u H.
"$(b) \Rightarrow (c)$"
Neka za proizvoljno $x \in H$ vrijedi

$$x = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha e_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i} .$$

Tada zbog neprekidnosti skalarnog produkta imamo

$$||x||^2 = (x, x) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i}, \sum_{i=1}^{\infty} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_{\alpha_i}|^2 .$$

"$(c) \Rightarrow (b)$"
Neka za proizvoljan $x \in H$ vrijedi

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |x_\alpha|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_{\alpha_i}|^2 \quad \text{tj.} \quad \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |x_{\alpha_i}|^2 \to 0 \quad (n \to \infty) .$$

Na osnovu ranije pokazanog imamo da vrijedi

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i} \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |x_{\alpha_i}|^2 \to 0 \quad (n \to \infty) ,$$

a to znači

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i} = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha e_\alpha .$$

"$(d) \Rightarrow (c)$"
Neka za proizvoljne $x, y \in H$ vrijedi

$$(x, y) = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha \overline{y_\alpha} .$$

Stavimo li da je $y = x$, imamo

$$(x, x) = \|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha \overline{x_\alpha} = \sum_{\alpha \in A} |x_\alpha|^2 .$$

"$(b) \Rightarrow (d)$"
Neka vrijedi (b). Tada za proizvoljne $x, y \in H$ je $x = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha e_\alpha$ i $y = \sum_{\alpha \in A} y_\alpha e_\alpha$, odnosno

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i} \quad \text{i} \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} y_{\alpha_i} e_{\alpha_i} .$$

Zbog neprekidnosti skalarnog produkta sada imamo

$$\begin{aligned}(x,y) &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i}e_{\alpha_i}, \sum_{i=1}^{n} y_{\alpha_i}e_{\alpha_i}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{\alpha_i}\overline{y_{\alpha_j}}(e_{\alpha_i}, e_{\alpha_j}) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i}\overline{y_{\alpha_j}} = \sum_{i=1}^{\infty} x_{\alpha_i}\overline{y_{\alpha_i}} .\end{aligned}$$

□

Teorem 5.24. *Svaka dva maksimalna ortonormirana sistema u Hilbertovom prosrtoru H imaju iste kardinalne brojeve.*

Dokaz : Neka su $\{e_\alpha |\ \alpha \in A\}$ i $\{f_\beta |\ \beta \in B\}$ dva maksimalna ortonormirana sistema. Ako je H konačnodimenzionalan, onda je ovo tvrđenje poznato iz linearne algebre. Pretpostavimo zato da je H beskonačne dimenzije. Fiksirajmo $\alpha \in A$ i pridružimo mu skup $B_\alpha = \{\beta \in B | (e_\alpha, f_\beta) \neq 0\}$. S obzirom da Fourierovih koeficijenata vektora e_α, u odnosu na sistem $\{f_\beta |\ \beta \in B\}$, koji su različiti od 0 ima najviše prebrojivo mnogo, to je B_α najviše prebrojiv skup, za svako $\alpha \in A$. Pri tome vrijedi

$$B = \bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha .$$

Zaista, ako bi postojao $\beta_0 \in B$ takav da $\beta_0 \notin B_\alpha$ niti za jedno $\alpha \in A$, onda bi imali da je $(e_\alpha, f_{\beta_0}) = 0$ za svaki $\alpha \in A$. Odavde sada, zbog maksimalnosti sistema $\{e_\alpha |\ \alpha \in A\}$, imamo da je $f_{\beta_0} = 0$ što povlači da je $\|f_{\beta_0}\| = 0$. Ovo je nemoguće jer je $\{f_\beta |\ \beta \in B\}$ normiran sistem. Dakle,

$$B = \bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha \ \Rightarrow\ card(B) \le \sum_{\alpha\in A} card(B_\alpha) \le \aleph_0 \sum_{\alpha\in A} 1 = \aleph_0 \cdot card(A) = card(A) .$$

Analognim postupkom se pokazuje da vrijedi $card(A) \le card(B)$, te na osnovu Cantor-Bernsteinove teoreme zaključujemo da vrijedi $card(A) = card(B)$. □

Definicija 5.9. *Kardinalni broj bilo kojeg maksimalnog ortonormiranog sistema $\{e_\alpha |\ \alpha \in A\}$ u Hilbertovom prostoru H nazivamo topološkom dimenzijom prostora H, a skup $\{e_\alpha |\ \alpha \in A\}$, nazivamo ortonormirana (topološka) baza ili Hilbertova baza prostora H.*

Primjer 5.10. Kao što smo ranije vidjeli prostor $L_2[0,2\pi]$ je prostor po dijelovima neprekidnih periodičnih funkcija $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, za koje važi

$$||f|| = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty .$$

Ovakva norma izvire iz definisanog skalarnog produkta na datom prostoru,

$$(f,g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt \ ,\ \ f,g \in L_2[0,2\pi] ,$$

u odnosu na koju je dati prostor kompletan, a time i Hilbertov prostor. Kako nam je poznata separabilnost ovog prostora, to on ima najviše prebrojiv maksimalni ortonormirani sistem, a jedan takav zadat je sa

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\} .$$

Tada za svako $f \in L_2[0,2\pi]$ vrijedi,

$$f(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt ,$$

gdje su a_0, a_n i b_n ($n \in \mathbb{N}$) upravo Fourierovi koeficijenti posmatrane funkcije u odnosu na dati ortonormirani sistem. Ovakvo predstavljanje funkcije se naziva *Fourierov tirgonometrijski red*. ◊

5.4 Linearni funkcionali na Hilbertovim prostorima

Ostaje još da vidimo da li linearni fukcionali na Hilbertovim prostorima imaju neku određenu formu. Naime, neka je H Hilbertov prostor i neka je $y \in H$ proizvoljan fiksan vektor. Tada je očigledno sa

$$f(x) = (x,y) \ , \tag{5.28}$$

definisan linearan funkcional na H, na osnovu aksioma skalarnog produkta. Osim toga, na osnovu nejednakosti Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog imamo

$$|f(x)| = |(x,y)| \leq ||x|| \, ||y|| \ ,$$

iz čega zaključujemo da je f ograničen funkcional, šta više $||f|| \leq ||y||$.

Dakle, za fiksno $y \in H$, jednakost (5.28) opisuje jednu klasu ograničenih linearnih funkcionala na H. Kao što ćemo vidjeti iz daljeg, ograničeni linearni funkcionali na Hilbertovom prostoru i ne mogu biti drugačije forme.

Teorem 5.25 (Rieszova teorema reprezentacije). *Za proizvoljan ograničen linearan funkcional f na Hilbertovom prostoru H, postoji jednoznačno određen element $y \in H$, takav da je za proizvoljno $x \in H$, jednakošću (5.28) definisan funkcional f i pri tome vrijedi $||f|| = ||y||$.*

Dokaz : Neka je H Hilbertov prostor i $f \in H^*$. Označimo

$$H_0 = ker(f) = \{x \in H | \ f(x) = 0\} \ .$$

Na osnovu linearnosti i neprekidnosti funkcionala f, H_0 je potprostor od H. Ako je $H_0 = H$, jasno da možemo izabrati da je $y = 0$. Zato pretpostavimo da je $H_0 \neq H$, i neka je $y \notin H_0$ proizvoljan. Na osnovu Teorema 5.14, postoje jedinstveni $y' \in H_0$ i $y'' \perp H_0$, takvi da je

$$y = y' + y'' \ .$$

Kako $y \notin H_0$, mora biti $y'' \neq 0$, a osim toga onda vrijedi i $f(y'') \neq 0$. Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je $f(y'') = 1$. Neka je sada $x \in H$ proizvoljan i neka je $f(x) = \alpha$. Označimo sa $x' = x - \alpha y''$. Tada imamo

$$f(x') = f(x - \alpha y'') = f(x) - \alpha f(y'') = \alpha - \alpha = 0 \ ,$$

te dakle $x' \in H_0$. Dalje onda imamo

$$(x,y'') = (x' + \alpha y'', y'') = (x',y'') + \alpha(y'',y'') = \alpha(y'',y'') \ .$$

Izražavajući α iz posljednjeg, zaključujemo da vrijedi

$$f(x) = \alpha = \frac{(x,y'')}{y'',y''} = \left(x, \frac{y''}{(y'',y'')}\right) \ .$$

Stavljajući da je $y^* = \frac{y''}{(y'',y'')}$, za proizvoljno $x \in H$, posmatrani funkcional ima vrijednost

$$f(x) = (x,y^*) \ ,$$

čime je egzistencija postojećeg $y^* \in H$ utvrđena.

Ako pretpostavimo da postoji i $y_1 \in H$, takav da za proizvoljno $x \in H$ vrijedi $(x,y^*) = (x,y_1)$, to bi značilo da je $(x,y^* - y_1) = 0$, to jest $y^* - y_1 \perp H$, a što je moguće samo ako je $y^* = y_1$.

Već smo pokazali da na osnovu nejednakosti Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog vrijedi $||f|| \leq ||y^*||$. Iz definicije norme funkcionala imamo

$$||f|| \geq f\left(\frac{y^*}{||y^*||}\right) = \frac{(y^*,y^*)}{||y||} = ||y^*|| \ ,$$

pa vrijedi $||f|| = ||y^*||$. □

Ovom teoremom još jednom možemo opravdati ranije uvedenu reprezentaciju ograničenih linearnih funkcionala na prostoru $L_2(\Omega)$,

$$f(x) = (x,y) = \int_\Omega x(t)\overline{y(t)}dt \ , \ x,y \in L_2(\Omega) \ ,$$

i na postoru l_2,

$$f(x) = (x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\overline{y_n} \ , \ x,y \in l_2 \ .$$

Bibliografija

[1] S. Aljančić: *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu*, Beograd 1979.

[2] P. Alexandroff, H. Hopf: *Topologie*, Berlin, 1935.

[3] V. Bryant: *Metric Spaces: Iteration and Application* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.

[4] Đ. Kurepa : *Teorija skupova*, Školska knjiga, Zagreb, 1951.

[5] A.N. Kolmogorov , S.V. Fomin : *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Volume 1 *Metric and normed spaces*, Rochester N. Y. , 1957.

[6] L.B. Kantorovič , G.P. Akilov : *Funkcionaljnij analjiz*, Moskva, 1977.

[7] W. Rudin: *Principles of Mathematical Analysis* 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1976.

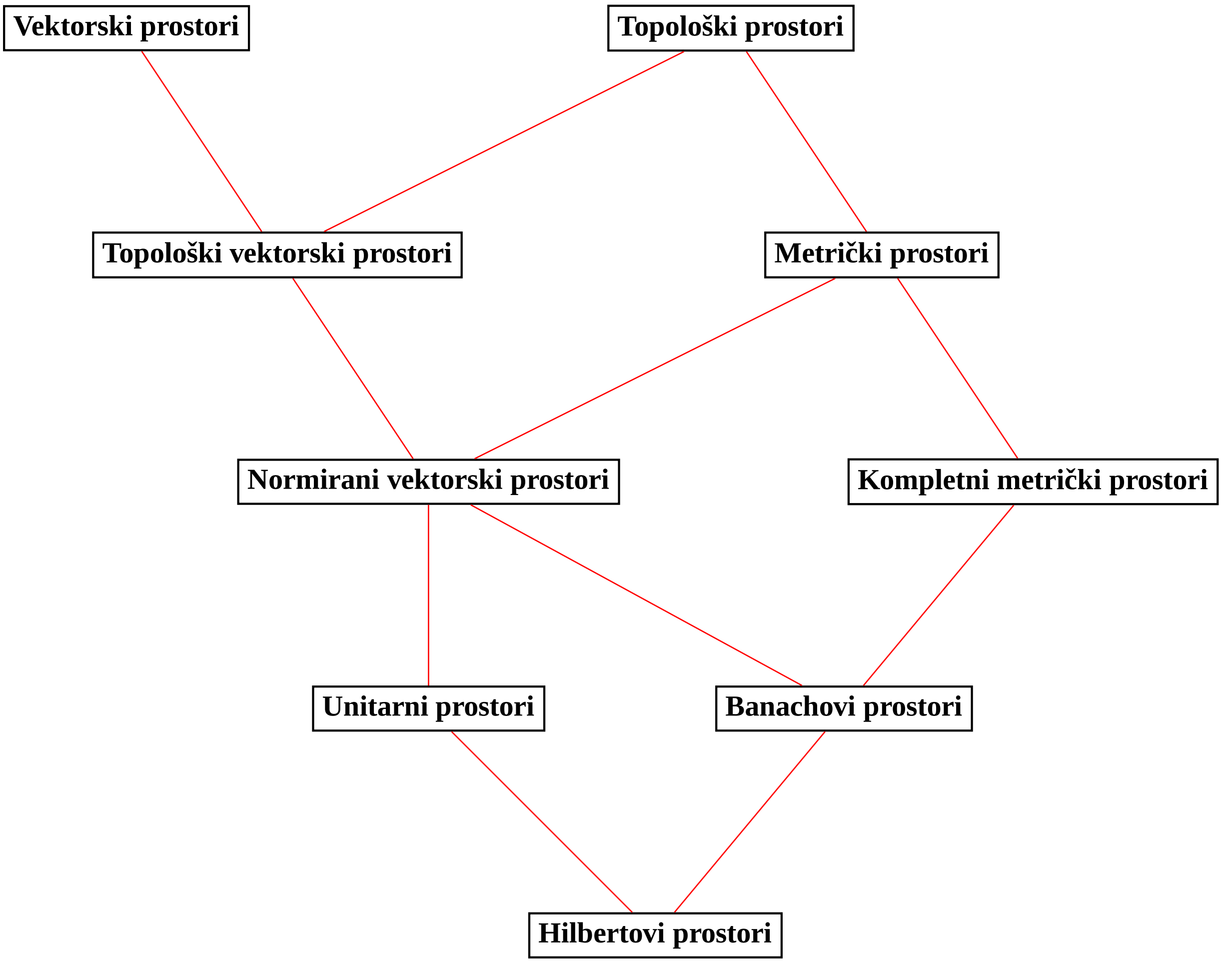
[8] B. Stanković : *Osnovi funkcionalne analize*, Naučna knjiga, Beograd, 1975.

[9] G. Hardy , J.E. Littlewood , G Polya : *Inequalities*, Cembridge Mathematical Library, 1934. (first published)

[10] Z. Čerin : *Metrički prostori*, predavanja za istoimeni kurs, PMF Zagreb

A

Prostori u funkcionalnoj analizi



B

Grčki alfabet

α	A	alfa
β	B	beta
γ	Γ	gama
δ	Δ	delta
ε	E	epsilon
ζ	Z	zeta
η	H	eta
θ, ϑ	Θ	teta
ι	I	jota
κ	K	kapa
λ	Λ	lambda
μ	M	mi
ν	N	ni
ξ	Ξ	ksi
o	O	omikron
π	Π	pi
ρ	P	ro
σ	Σ	sigma
τ	T	tau
υ	Υ	ipsilon
ϕ, φ	Φ	fi
χ	X	hi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	omega