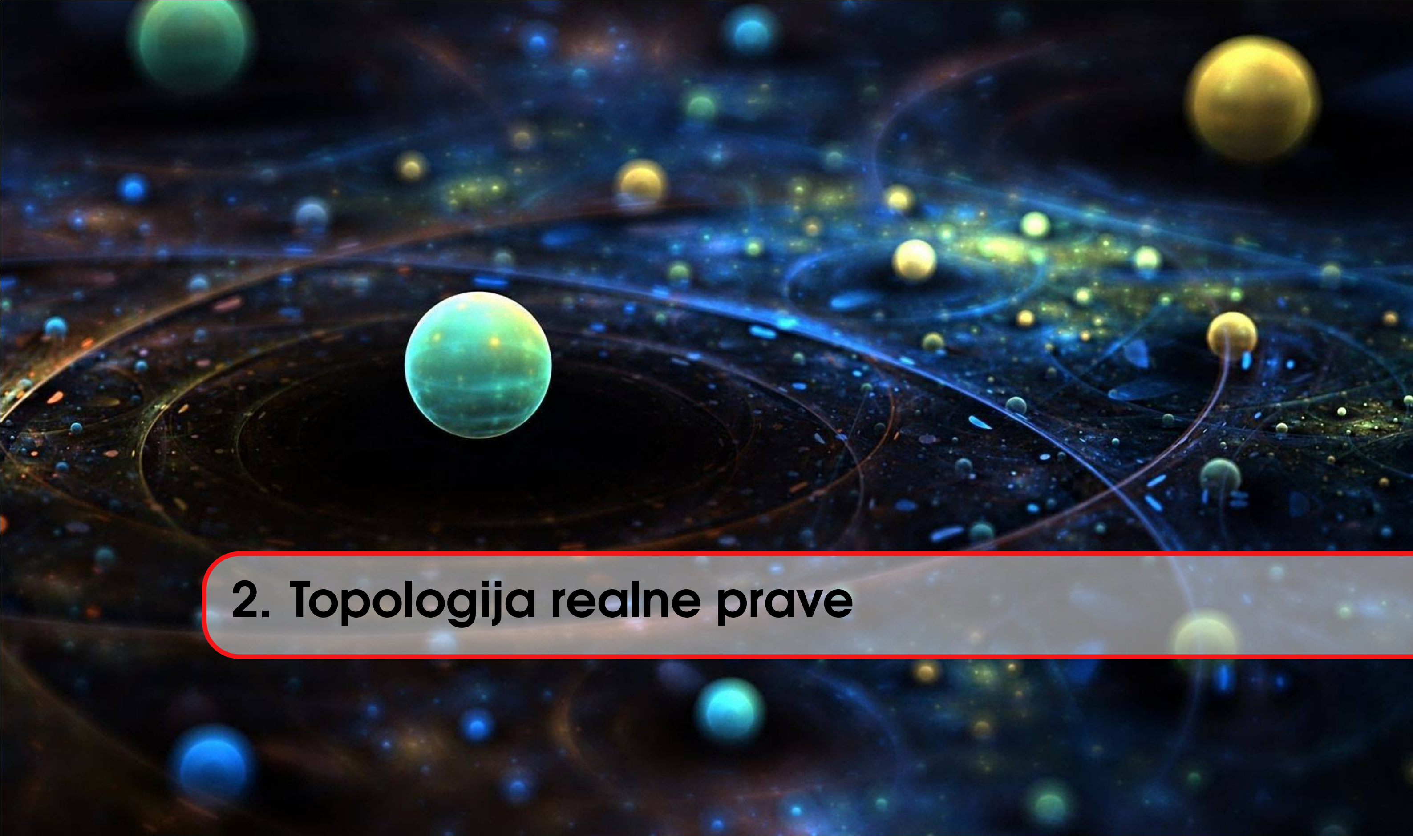


2. Topologija realne prave

Topologija je matematička disciplina koja izučava osobine prostora sa stanovišta otvorenih skupova. Sveukupnost otvorenih podskupova nekog skupa naziva se topologija. Kao što se pokazuje, mnoge osobine skupa su okarakterisane terminom otvorenog ili zatvorenog skupa i mnoge osobine skupa su diktirane količinom njegovih otvorenih podskupova, ali i načinom njihovog definisanja. Nama je ovdje cilj izučavati skup realnih brojeva onakav kakav se on koristi u matematičkoj analizi te ćemo se držati definisanja topologije na $\mathbb{R}$, one koja nam obezbjeđuje sve dobre osobine tog skupa za matematičku analizu.

2.1 Otvoreni skupovi

Otvoreni skupovi predstavljaju najvažniju klasu podskupova skupa realnih brojeva. Kao što smo rekli, familija svih otvorenih podskupova skupa $\mathbb{R}$ čini topologiju na $\mathbb{R}$, a svaka osobina koja je definisana terminologijom otvorenih skupova, naziva se topološka osobina.

Definicija 2.1.1 Za skup $G \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je otvoren skup u $\mathbb{R}$ ako i samo ako za svako $x \in G$ postoji $\varepsilon > 0$ tako da je $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset G$.

Cijeli skup $\mathbb{R}$ je otvoren skup, a takav je i $\emptyset$, zbog formalizma jer nema elemenata.

■ **Primjer 2.1** Otvoreni interval $I = (0,1)$ je otvoren skup u $\mathbb{R}$.
Zasita, neka je $x \in (0,1)$ proizvoljan, to jest $0 < x < 1$. Izaberimo $\varepsilon = \min\left\{\frac{x}{2}, \frac{1-x}{2}\right\} > 0$. Tada je

$$x-\varepsilon \geq x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} > 0 \ \text{ i } \ x+\varepsilon \leq x + \frac{1-x}{2} = \frac{1+x}{2} < 1\ ,$$

što zajedno znači da je $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset I$. Na osnovu Definicije 2.1.1 je I otvoren skup.

Na sličan način se pokazuje da su skupovi (a,b), $(a,+\infty)$ i $(-\infty,a)$ $(a,b \in \mathbb{R},\ a<b)$ otvoreni skupovi u $\mathbb{R}$. ■

■ **Primjer 2.2** Jednočlani skupovi nisu otvoreni skupovi.
Zaista, za proizvoljno $a \in \mathbb{R}$ posmatrajmo skup $A = \{a\}$. Za bilo koje $\varepsilon > 0$ jasno je da neće vrijediti $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq A$, te prema Definiciji 2.1.1, $\{a\}$ nije otvoren skup.

Jednostavno se pokazuje, rezonujući kao u slučaju jednočlanog skupa, da konačni podskupovi skupa realnih brojeva (skupovi oblika $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$) nisu otvoreni skupovi. ■

■ **Primjer 2.3** Skup $\mathbb{N}$ nije otvoren podskup od $\mathbb{R}$.

Zaista, za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ i bilo koje $\varepsilon > 0$, interval $(n-\varepsilon, n+\varepsilon)$ sadrži eventualno neke prirodne brojeve, ali sadrži u sebi i racionalne i iracinalne brojeve te kao takav nije podskup od $\mathbb{N}$. Dakle, skup prirodnih brojeva nije otovoren skup u $\mathbb{R}$.

Takođe ni skup $\mathbb{Q}$ nije otvoren u $\mathbb{R}$ jer za bilo koje $q \in \mathbb{Q}$ i $\varepsilon > 0$, interval $(q-\varepsilon, q+\varepsilon)$ u sebi sadrži i iracionalne brojeve te ne može biti podskup od $\mathbb{Q}$. ■

■ **Primjer 2.4** Poluotvoreni interval $J = (0, 1]$ nije otvoren skup.
Naime, za tačku $1 \in J$, za bilo koje $\varepsilon > 0$ neće biti zadovoljeno $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \subset J$, te prema Definiciji 2.1.1 J nije otvoren skup. ■

Teorem 2.1.1 Proizvoljna unija otvorenih skupova je otvoren skup.

Dokaz : Neka je $\{A_i \subseteq \mathbb{R} \mid i \in I\}$ proizvoljna familija otvorenih skupova. Ako $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, to znači da postoji $i_0 \in I$ takav da $x \in A_{i_0}$. Zbog otvorenosti skupa A_{i_0} znamo da postoji $\varepsilon > 0$ takav da $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A_{i_0}$, a kako je još i $A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$, imamo da je $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$. Kako je x bio proizvoljan, zaključujemo otvorenost skupa $\bigcup_{i\in I} A_i$. □

Teorem 2.1.2 Konačan presjek otvorenih skupova je otvoren skup.

Dokaz : Neka je $\{A_i \subseteq \mathbb{R} \mid i \in \{1, 2, ..., n\}\}$ konačna familija otvorenih skupova. Ako $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ onda $x \in A_i$ za svako $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Iz otvorenosti skupa A_i, za proizvoljno i, zaključujemo da postoji ε_i takav da $(x-\varepsilon_i, x+\varepsilon_i) \subseteq A_i$. Stavimo da je $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i \mid i \in \{1, 2, ..., n\}\}$. Tada vrijedi

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (x-\varepsilon_i, x+\varepsilon_i) \subseteq A_i ,$$

za svako $i \in \{1, 2, ..., n\}$ odnosno,

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i ,$$

što zanači da je $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ otvoren skup. □

Primjećujemo da u Teoremu 2.1.1 govorimo o proizvoljnoj uniji, to jest o uniji proizvoljno mnogo otvorenih skupova, dok u Teoremu 2.1.2 govorimo o samo konačnom (a ne proizvoljnom) presjeku otvorenih skupova. Da ne možemo govoriti o proizvoljnom presjeku ilustruje sljedeći primjer.

■ **Primjer 2.5** Posmatrajmo skupove $I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ gdje je $n \in \mathbb{N}$. Za svako n skupovi I_n su otvoreni (Primjer 2.1). Ako je $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, to znači da $x \in I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, za svako $n \in \mathbb{N}$. Ovo opet znači da je $|x| < \frac{1}{n}$ za svako $n \in \mathbb{N}$, a to može vrijediti samo ako je $x = 0$, to jest $x \in \{0\}$.
S druge strane, ako $x \in \{0\}$ onda je $x = 0$. Kako $0 \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ za svako $n \in \mathbb{N}$, onda je $0 = x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.
Iz svega ovoga zaključujemo da vrijedi skupovna jednakost,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\} .$$

Kako smo pokazali u Primjeru 2.2, jednočlani skupovi nisu otvoreni. Dakle, proizvoljan presjek otvorenih skupova ne mora biti otvoren skup. ■

Na sonovu do sad rečenog o otvorenim skupovima možemo iskazati generalni stav.

Teorem 2.1.3 Skup je otvoren u $\mathbb{R}$ ako i samo ako je interval ili je unija intervala.

Dokaz : Ako je skup interval (Primjer 2.1) ili ako je unija intervala (Teorem 2.1.1) jasno je da je on tada otvoren skup.

Neka je sada $S \neq \varnothing$ otvoren podskup od $\mathbb{R}$. Ako je S interval stav je dokazan, zato pretpostavimo da S nije interval. To prema definiciji otvorenog skupa na $\mathbb{R}$ znači da za svaki $x \in S$, postoji I_x ($I_x = (a,b)$), takav da je $x \in I_x \subseteq S$. Odavde je onda

$$\bigcup_{x\in S} I_x \subseteq S\ .$$

S druge strane, ako je $x \in S$, onda $x \in I_x \subseteq \bigcup_{x\in S} I_x$, pa zaključujemo da mora vrijediti

$$S = \bigcup_{x\in S} I_x\ ,$$

to jest skup S je unija otvorenih intervala. □

2.2 Zatvoreni skupovi

Primjetimo da smo u prethodnoj sekciji, kad god smo utvrdili da za neki skup ne vrijedi Definicija 2.1.1, govorili da skup nije otvoren. Služeći se analogijom vrata, kao objekta na zidu, ako vrata nisu otovorena onda su zatvorena, zašto nismo govorili da su takvi skupovi zatvoreni? Razlog za to leži u načinu definisanja ovakvih pojmova. Kod vrata, pojmovi otvorenih i zatvorenih vrata su logički suprotni, to jest ako nije jedno onda je drugo ili još bolje rečeno, ili je jedno ili drugo. Za pojmove otvorenog i zatvorenog skupa stvari će biti bitno drugačije, a razlog leži u definisanju pojma zatvorenog skupa.

Definicija 2.2.1 Skup na realnoj pravoj je zatvoren ako i samo ako je njegov komplement otvoren skup.

■ **Primjer 2.6** Skupovi $\varnothing$ i $\mathbb{R}$ su zatvoreni.

Zaista, kako je $\varnothing^c = \mathbb{R}$, a $\mathbb{R}$ je otvoren skup, onda je $\varnothing$ zatvoren skup. Isto tako, $\mathbb{R}^c = \varnothing$ i $\varnothing$ je otvoren skup, onda je $\mathbb{R}$ zatvoren skup. ■

Primjetimo iz ranije rečenog i gornjeg primjera da su skupovi $\varnothing$ i $\mathbb{R}$ i otvoreni i zatvoreni skupovi. Ovo nam govori da ako neki skup nije otvoren to ne znači da je on onda zatvoren skup, to jest pojmovi otvorenog i zatvorenog skupa nisu logički suprotni pojmovi. Šta više, to su na određen način ”ekvivalentni” pojmovi jer jedan od njih određuje drugi.

Komentar: Pojmovi parnog i neparnog prirodnog broja su logički suprotni jer ”prirodan broj je neparan ako i samo ako nije paran”. I ovdje jedan od pojmova (biti paran) defiše drugi pojam (biti neparan), ali logičkom negacijom prvog pojma. Pojmovi ograničenog i neograničenog skupa su logički suprotni pojmovi jer skup je neograničen ako nije ograničen (negiranje pojma ”ograničen”).
Pojam zatvorenog skupa smo definisali preko pojma otvorenog skupa, ali za komplement datog skupa, a ne negacijom otvorenosti datog skupa. Dakle, ovi pojmovi nisu logički suprotni.

■ **Primjer 2.7** Skup $I = [0,1]$ je zatvoren skup.

Zaista, $I^c = [0,1]^c = (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$ je kao unija dva otvorena skupa, otvoren skup te je prema Definiciji 2.2.1 skup $[0,1]$ zatvoren. Na identičan način se pokazuje da su svi segmenti $[a,b]$

$(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$ zatvoreni skupovi.
Za $a \in \mathbb{R}$ skupovi $[a, +\infty)$ i $(-\infty, a]$ su zatvoreni jer $[a, +\infty)^c = (-\infty, a)$ i $(-\infty, a]^c = (a, +\infty)$. ■

Kao što smo mogli primjetiti sa Primjerom 2.6 skupovi nisu "vrata", pa ako vrata nisu zatvorena onda su otvorena i suprotno, ako vrata nisu otvorena onda su zatvorena. Naime, pokazali smo da postoje skupovi koji su i otvoreni i zatvoreni istovremeno. Međutim, na realnoj pravoj postoje skupovi koji nisu ni otvoreni ni zatvoreni, što pokazujemo sljedećim primjerom.

■ **Primjer 2.8** Skup $A = (0, 1]$ nije otvoren skup. Zaista, za proizvoljno $\varepsilon > 0$ vrijedi $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \not\subseteq A$ te A nije otvoren. Međutim, kako je $A^c = (0,1]^c = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$, to niti za jedno $\varepsilon > 0$ neće biti $(-\varepsilon, +\varepsilon) \subseteq A^c$ te skup A^c nije otvoren ili drugačije rečeno, skup A nije zatvoren skup.
Dakle, skup $(0, 1]$ nije ni otvoren ni zatvoren čime opravdavamo i naziv ovakvog skupa kao poluotvoren interval. ■

■ **Primjer 2.9** Skup $\mathbb{Q}$ kao podskup skupa $\mathbb{R}$, kao što smo pokazali, nije otvoren skup. Njegov komplement, skup iracionalnih brojeva, takođe nije otvoren skup jer u svakom intervalu ima i racionalnih i iracionalnih brojeva, pa dakle skup $\mathbb{Q}$ nije ni zatvoren skup. ■

Teorem 2.2.1 Proizvoljan presjek zatvorenih skupova je zatvoren skup.

Dokaz : Neka je $\{F_i \subseteq \mathbb{R} \mid i \in I\}$ proizvoljna familija zatvorenih skupova. Tada ja za proizvoljno $i \in I$ skup F_i^c otvoren skup. Prema De Morganovim zakonima za skupove tada imamo

$$\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} F_i^c \ .$$

Skup na desnoj strani je otvoren kao proizvoljna unija otvorenih skupova (Teorem 2.1.1), pa je prema Definiciji 2.2.1 skup $\bigcap_{i\in I} F_i$ zatvoren skup. □

Teorem 2.2.2 Konačna unija zatvorenih skupova je zatvoren skup.

Dokaz : Neka je $\{F_i \subseteq \mathbb{R} \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ konačna familija zatvorenih skupova. Tada je za proizvoljno $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ F_i^c otvoren skup, pa prema De Morganovim zakonima za skupove vrijedi

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} F_i^c \ .$$

Skup na desnoj strani je otvoren, kao konačan presjek otvorenih skupova (Teorem 2.1.2). Dakle skup $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ je zatvoren skup. □

Kao što smo primjetili kod otvorenih skupova, i ovdje u prvom teoremu govorimo o proizvoljnoj familiji, a u drugom samo o konačnoj familiji. Naime, kao što to pokazuje naredni primjer, proizvoljna unija zatvorenih skupova ne mora biti zatvoren skup.

■ **Primjer 2.10** Za $n \in \mathbb{N}$ označimo sa

$$I_n = \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] \ .$$

Jasno je da su skupovi I_n kao segmenti, zatvoreni skupovi, za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$. Međutim,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = (0, 1) \ ,$$

(pokazati ovu skupovnu jednakost) a interval $(0, 1)$ je otvoren skup. Dakle, proizvoljna unija zatvorenih skupova može biti i otvoren skup. ■

2.3 Okoline i tačke nagomilavanja

Koncept otvorenih i zatvorenih skupova možemo posmatrati i sa drugih aspekata. Jedan od njih je preko okolina tačaka.

Definicija 2.3.1 Za skup $U \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je okolina tačke $x \in \mathbb{R}$ ako i samo ako postoji $\varepsilon > 0$ tako da je $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U$.
Otvoreni interval $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ nazivamo simetrična ε-okolina ili jednostavno ε-okolina tačke x.

Kao što vidimo iz definicije, okolina tačke ne mora obavezno biti otvoren skup, ali mora sadržati u sebi otvoren skup (ε-okolinu) koji sadrži datu tačku.

■ **Primjer 2.11** Skup $U = [0,2]$ je prema našoj definiciji, okolina tačke $x = 1$ jer za naprimjer $\varepsilon = 0.5$ je $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) = (0.5, 1.5) \subset [0,2]$, ali sam skup $[0,2]$ nije otvoren. Međutim, ovakav skup nije okolina tačke $x = 2$ jer niti za jedno $\varepsilon > 0$ neće biti $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon) \subset [0,2]$.

Generalno, za proizvoljno $a < x < b$ skupovi (a,b) i $[a,b]$ su okoline tačke x jer za dovoljno malo $\varepsilon > 0$ će skup $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ biti sadržan u datim skupovima.
S druge strane, skup $[a,b]$ nije okolina krajnjih tačaka a i b jer niti jedna simetrična ε-okolina neće biti sadržana u skupu $[a,b]$. ■

Definicija okoline tačke nam omogućava sada dati jednu karakterizaciju otvorenih skupova.

Teorem 2.3.1 Skup na realnoj pravoj je otvoren ako i samo ako je on okolina svake svoje tačke.

Dokaz : Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ otvoren skup i neka je $x \in A$ proizvoljan. Prema Definiciji 2.1.1 postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A$ te je A okolina tačke x.

Neka je A okolina svake svoje tačke. To znači da za proizvoljno $x \in A$ postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A$, a što opet na osnovu Definicije 2.1.1 znači da je A otvoren skup. □

Definicija 2.3.2 Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ i $x \in \mathbb{R}$. Kažemo da je x unutrašnja tačka skupa A ako i samo ako $x \in A$ i postoji $\varepsilon > 0$ takav da $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$.
Skup svih unutrašnjih tačaka skupa nazivamo unutrašnjost ili interior skupa i označavamo ga sa $int(A)$ ili A^o.

Definicija 2.3.3 Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ i $x \in \mathbb{R}$. Kažemo da je x izolovana tačka skupa A ako i samo ako $x \in A$ i postoji $\varepsilon > 0$ takav da u skupu $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ nema drugih tačaka skupa A osim tačke x.

Definicija 2.3.4 Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ i $x \in \mathbb{R}$. Kažemo da je x rubna tačka skupa A ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ skup $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ sadrži tačke iz A i tačke iz A^c.
Skup svih rubnih tačaka skupa nazivamo rub skupa i označavamo ga sa ∂A.

Definicija 2.3.5 Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ i $x \in \mathbb{R}$. Kažemo da je x tačka nagomilavanja skupa A ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ skup $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ sadrži bar jednu tačku skupa A različitu od x.
Skup svih tačaka nagomilavanja skupa nazivamo izvodni skup i označavamo ga sa A'.

Primjetimo u gornjim definicijama da unutrašnja tačka i izolovana tačka skupa pripadaju tom skupu, dok rubna tačka i tačka nagomilavanja ne moraju obavezno biti u skupu. U definiciji rubne tačke dozvoljavamo mogućnost da je upravo x ona tačka skupa A koja pripada skupu $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, ali u definiciji tačke nagomilavanja zahtijevamo da je pripadajuća zajednička tačka skupa $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ i skupa A različita od x. Dalje primjećujemo da je izolovana tačka uvijek i rubna tačka skupa, ali da nikada nije tačka nagomilavanja. Demonstrirajmo ove primjedbe kroz primjere.

■ **Primjer 2.12** Posmatrajmo skupove $A = (0,1)$ (interval) i $B = [0,1]$ (segment).

Skup svih unutrašnjih tačaka skupova A i B je skup $(0,1)$.
Skup rubnih tačaka skupova A i B je dvočlani skup $\{a,b\}$.
Skup svih tačaka nagomilavanja skupova A i B je skup $[0,1]$.
Ni jedan od ovih skupova nema izolovanih tačaka.
Dakle, skupovi A i B imaju iste unutršnjosti, iste rubove i iste izvodne skupove. Međutim, skup B sadrži svoje rubne tačke i sve svoje tačke nagomilavanja, dok to za skup A nije tačno. ■

■ **Primjer 2.13** Neka je $a<c<b$. Posmatrajmo skup $A=(a,c)\cup(c,b)$.

Unutrašnjost skupa je čitav skup, $int(A)=A$, rub skupa je $\partial A=\{a,b,c\}$, izvodni skup je $A'=[a,b]$ i nema izolovanih tačaka. ■

■ **Primjer 2.14** Posmatrajmo skup $A=\left\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$.

Svaka tačka skupa A je izolovana tačka. Zaista, za proizvoljno $\frac{1}{n}\in A$ izaberimo $\varepsilon=\frac{1}{2n(n+1)}$. Tada imamo

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{2n(n+1)}=\frac{2n+1}{2n(n+1)}>\frac{2n}{2n(n+1)}=\frac{1}{n+1} \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{2n(n+1)}<\frac{1}{n}+\frac{1}{2n(n-1)}=\frac{2n-1}{2n(n-1)}<\frac{2n}{2n(n-1)}=\frac{1}{n-1} \tag{2.2}$$

Tada interval $\left(\frac{1}{n}-\varepsilon,\frac{1}{n}+\varepsilon\right)$ ne sadrži niti jedan element skupa A oblika $\frac{1}{m}$ za $m>n$ (zbog 2.1) niti za $m<n$ (zbog 2.2), to jest niti jedan element skupa A, osim elementa $\frac{1}{n}$.

Kako su sve tačke skupa A izolovane jasno je da su one i rubne tačke. Za proizvoljno $\varepsilon>0$, prema Arhimedovom aksiomu postoji $n\in\mathbb{N}$ tako da je $\frac{1}{n}<\varepsilon$, te u skupu $(-\varepsilon,\varepsilon)$ postoji bar jedna tačka skupa A, ali u dijelu tog skupa $(-\varepsilon,0)$ su tačke koje nisu iz A te je prema Definiciji 2.3.4 i 0 rubna tačka skupa. Dakle, rub skupa je skup $A\cup\{0\}$.

Kako $0\notin A$, zbog već datog objašnjenja da je 0 rubna tačka skupa, zaključujemo da u proizvoljnoj okolini oko tačke 0 mora postojati bar jedna tačka skupa A (očigledno različita od 0), a to po definiciji znači da je 0 tačka nagomilavanja skupa A, šta više jedina, te je $A'=\{0\}$. ■

■ **Primjer 2.15** Skup $\mathbb{N}$ nema unutrašnjih tačaka niti tačaka nagomilavanja. Svaki prirodan broj je rubna tačka i izolovana tačka tog skupa. ■

■ **Primjer 2.16** Cantorov skup nema unutrašnjih tačaka niti izolovanih tačaka. Rub skupa i izvodni skup su jednaki Cantorovom skupu. (Pogledati dodatak A) ■

■ **Primjer 2.17** Skup $\mathbb{Q}$ nema unutrašnjih tačaka niti izolovanih tačaka. Rubne tačke i tačke nagomilavanja skupa $\mathbb{Q}$ su svi realni brojevi. ■

Završimo ovaj dio iskazujući dvije korisne karakterizacije za otvorene i zatvorene skupove.

Teorem 2.3.2 Skup na realnoj pravoj je otvoren ako i samo ako je svaka njegova tačka unutrašnja tačka, to jest $A=A^o$.

Skup može ali i ne mora sadržavati svoje rubne tačke. Ako sadrži neku rubnu tačku, tada ta tačka nije unutrašnja, te skup u tom slučaju nije otvoren. Dakle, ako od skupa želimo napraviti otvoren skup dovoljno je ”oduzeti” mu sve rubne tačke koje mu pripadaju. Naprimjer, za skupa $A=(0,1]$ imamo da je 1 rubna tačka koja mu pripada. Onda je skup $A\setminus\{1\}=(0,1)$ otvoren skup. Za skup $A=\left\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$ smo utvrdili da su sve njegove tačke rubne, te da od njega napravimo otvoren skup dobili bismo prazan skup.

Teorem 2.3.3 Skup na realnoj pravoj je zatvoren ako i samo ako sadrži sve svoje tačke nagomilavanja, to jest $A' \subseteq A$.

Dakle, da bismo od nekog skupa napravili zatvoren skup, dovoljno je "dodati" mu sve njegove tačke nagomilavanja koje mu ne pripadaju. Tako imamo da ako je $A = (0,1)$, $A' = [0,1]$, to jest tačke 0 i 1 su njegove tačke nagomilavanja koje mu ne pripadaju. Tada je skup $A \cup \{0,1\} = [0,1]$ zatvoren skup. Skup $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ima jedinu tačku nagomilavanja 0 koja mu ne pripada, te je skup $A \cup \{0\}$ zatvoren skup.

2.4 Kompaktnost skupa na realnoj pravoj

Da bi smo dali topološku definiciju pojma kompaktnosti, dakle preko otovorenih skupova, uvedimo nekoliko novih pojmova.

Definicija 2.4.1 Neka je $G \subseteq \mathbb{R}$. Familiju skupova $\mathscr{A} = \{A_i \subset \mathbb{R} \mid i \in I\}$ nazivamo pokrivačem skupa G ako i samo ako za svaku tačku iz skupa G postoji skup iz familije $\mathscr{A}$ koji je sadrži, to jest

$$G \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \,.$$

Ukoliko su svi skupovi A_i otvoreni govorimo o otvorenom pokrivaču.
Ukoliko je indeksni skup I konačan, govorimo o konačnom pokrivaču.

■ **Primjer 2.18** Za $n \in \mathbb{N}$ definišimo skupove $A_n = \left(\frac{1}{n}, 2\right)$. Tada je familija $\mathscr{A} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ pokrivač skupa $(0,1]$ jer

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = (0,2) \supset (0,1] \,.$$

Međutim, ista ova familija $\mathscr{A}$ nije pokrivač skupa $[0,1]$ jer njena unija ne sadrži tačku 0. Ako za proizvoljno $\delta > 0$ familiji $\mathscr{A}$ dodamo i skup $B = (-\delta, \delta)$, tada bi imali

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \cup B = (-\delta, 2) \supset [0,1] \,,$$

te bi familija $\mathscr{A}' = \mathscr{A} \cup \{B\}$ bila pokrivač skupa $[0,1]$. Šta više, kako su svi skupovi familije $\mathscr{A}'$ kao intervali relane prave otvoreni skupovi, data familija predstavlja otvoren pokrivač. ■

■ **Primjer 2.19** Familija skupova $\{(n-1, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ predstavlja otvoren pokrivač skupa $\mathbb{R}$, ali familija $\{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ nije pokrivač od $\mathbb{R}$ jer njena unija ne sadrži cijele brojeve, a time ni sam skup $\mathbb{R}$. Ako bismo posmatrali familiju $\{[n, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, ona bi bila pokrivač, ali ne i otvoren pokrivač skupa $\mathbb{R}$. ■

■ **Primjer 2.20** Numerišimo sve racionalne brojeve segmenta $[0,1]$ sa q_i ($i \in \mathbb{N}$) i fiksirajmo $\varepsilon > 0$. Tada familija $\{(q_i - \varepsilon, q_i + \varepsilon) \mid i \in \mathbb{N}\}$ predstavlja jedan otvoren pokrivač skupa $[0,1]$ jer se svaki iracionalni broj $x \in [0,1]$ može aproksimirati nekim racionalnim brojem sa tačnošću ε. Taj pokrivač ima onoliko elemenata koliko ima racionalnih brojeva u segmentu $[0,1]$, a to je prebrojivo mnogo. Na sličan način možemo posmatrati familiju $\{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \mid x \in I\}$, gdje je $I = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. I ova familija predstavlja otvoren pokrivač skupa $[0,1]$, međutim ova familija ima onoliko elemenata koliko ima iracionalnih brojeva u $[0,1]$, a ovih ima neprebrojivo mnogo. ■

Definicija 2.4.2 Neka je familija $\mathscr{A} = \{A_i \subset \mathbb{R} \mid i \in I\}$ pokrivač skupa $G \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $J \subset I$ proizvoljan. Ako je familija $\mathscr{B} = \{A_i \subset \mathbb{R} \mid i \in J\}$ takođe pokrivač skupa G, onda kažemo da je $\mathscr{B}$ podpokrivač pokrivača $\mathscr{A}$.

Ukoliko familija $\mathscr{B}$ ima konačno mnogo elemenata, $\mathscr{B} = \{A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_n}\}$, kažemo da je ona konačan podpokrivač.

■ **Primjer 2.21** Kako smo pokazali u primjeru 2.18, familija skupova $A_n = \left(\frac{1}{n}, 2\right)$ $(n \in \mathbb{N})$ je pokrivač skupa $(0,1]$. Ako posmatramo familiju $\{A_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ona takođe jeste pokrivač skupa $(0,1]$ i kao takva je podpokrivač polazne familije. Međutim, ne postoji konačan podpokrivač polazne familije. Zaista, ako bi postojao konačan podpokrivač $\{A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_n}\}$, onda bi postojao broj $N = \max\{i_1, i_2, ..., i_n\}$. Tada bi bilo

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_{i_k} = \left(\frac{1}{N}, 2\right) ,$$

ali ovaj skup ne sadrži niti jednu tačku $0 < x \leq \frac{1}{N}$, a time ni skup $(0,1]$.
Interesantno je primjetiti da ako bismo posmatrali familiju $\mathscr{A}' = \mathscr{A} \cup \{(-\delta, \delta)\}$, za proizvoljno $\delta > 0$, da bi sada bilo moguće izdvojiti konačan podpokrivač. Naime, na osnovu Arhimedovog aksioma tada postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da $\frac{1}{N} < \delta$, pa bi familija od dva skupa $\left\{\left(\frac{1}{N}, 2\right), (-\delta, \delta)\right\}$ predstavljala pokrivač skupa $(0,1]$ jer je

$$\left(\frac{1}{N}, 2\right) \cup (-\delta, \delta) = (-\delta, 2) \supset (0,1] .$$

■

Definicija 2.4.3 Za skup kažemo da je kompaktan ako se iz svakog njegovog otvorenog pokrivača može izdvojiti konačan podpokrivač.

■ **Primjer 2.22** Familija skupova $\{(n-1, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ predstavlja jedan otvoren pokrivač skupa $\mathbb{N}$ jer je

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (n-1, n+1) = (0, +\infty) \supset \mathbb{N} .$$

Međutim, iz ovog pokrivača nije moguće izdvojiti konačan podpokrivač. Zaista, ako bi postojala konačna podfamilija $\{(k-1, k+1) \mid k \in \{i_1, i_2, ..., i_n\}\}$ koja jeste pokrivač skupa $\mathbb{N}$, tada bi postojao $N = \max\{i_1, i_2, ..., i_n\}$. Za ovakav N bi onda vrijedilo

$$\bigcup_{k=1}^{n} (k-1, k+1) \subset (0, N+1) ,$$

a to onda znači da unija ovih skupova ne sadrži skup $\mathbb{N}$. Ovo nam govori da skup $\mathbb{N}$ nije kompaktan skup. ■

■ **Primjer 2.23** Za $i \in \mathbb{N}_0$ posmatrajmo skupove $A_i = \left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+1}}, \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i+1}}\right)$. Familija $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ jeste pokrivač skupa $(0,1)$ jer

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_i = \left(0, \frac{3}{2}\right) \supset (0,1) .$$

Birajući iz date familije bilo koju konačnu podfamiliju $\{A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_n}\}$ ova ne može biti pokrivač skupa $(0,1)$ jer za $N = \max\{i_1, i_2, ..., i_n\}$ vrijedi

$$\bigcup_{k=1}^{N} A_{i_k} = \left(\frac{1}{2^N} - \frac{1}{2^{N+1}}, \frac{3}{2}\right) .$$

Kako je $\frac{1}{2^N} - \frac{1}{2^{N+1}} = \frac{1}{2^{N+1}}$ jasno je da niti jedan $0 < x < \frac{1}{2^{N+1}}$ neće pripadati gornjoj konačnoj uniji, a time ta konačna podfamilija ne može biti pokrivač skupa $(0,1)$. Dakle, $(0,1)$ nije kompaktan

skup.
Na sličan način se može pokazati da niti jedan interval (a,b) $(a,b \in \mathbb{R},\ a<b)$ niti $(a,+\infty)$ i $(-\infty,a)$, nisu kompaktni skupovi.
Takođe ni skup $\mathbb{R}$ nije kompaktan. Dovoljno je posmatrati njegov otvoren pokrivač $\{(n-1,n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ iz koga se ne može izdvojiti konačan podpokrivač. ■

■ **Primjer 2.24** Familija skupova $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ iz prethodnog primjera očigledno nije pokrivač skupa $[0,1]$. Ako toj familiji dodamo skup $B=(-\delta,\delta)$ dobijamo novu familiju $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{B\}$ koja postaje pokrivač skupa $[0,1]$ jer

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i \cup B = \left(-\delta, \frac{3}{2}\right) \supset [0,1] \, .$$

Sada možemo izabrati dovoljno veliko $n \in \mathbb{N}$ tako da bude $\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} < \delta$. Tada će konačna familija $\{A_0, A_1, ..., A_n, B\}$ biti konačan podpokrivač skupa $[0,1]$.
Ovime je pokazano da se iz datog pokrivača može izdvojiti konačan podpokrivač, ali to još ne znači da je skup $[0,1]$ kompaktan. ■

■ **Primjer 2.25** Neka je $D \subset \mathbb{R}$ konačan skup, to jest $D=\{a_1,a_2,...,a_k\}$ i neka je $\{A_i \mid i \in I\}$ proizvoljan otvoren pokrivač skupa D. Za proizvoljno $i \in \{1,2,...,k\}$, prema definiciji pokrivača, postoji $n_i \in I$ takav da $a_i \in A_{n_i}$. Posmatramo li konačnu podfamiliju formiranu od ovih skupova $\{A_{n_1}, A_{n_2}, ..., A_{n_k}\}$, ona predstavlja konačan podpokrivač skupa D jer

$$D = \bigcup_{i=1}^{k} \{a_i\} \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_{n_i} \, .$$

Iz proizvoljnog otvorenog pokrivača smo izdvojili konačan podpokrivač, te je skup D kompaktan.
Dakle, konačni skupovi na realnoj pravoj su kompaktni skupovi. ■

Skup iz posljednjeg primjera je kompaktan skup ali nam on kao konačan skup nije od interesa kao skupovi $\mathbb{N}$ ili $(0,1)$ za koje smo pokazali da nisu kompaktni. Za utvrditi da neki skup na realnoj pravoj nije kompaktan, dovoljno je naći jedan otvoren pokrivač iz koga ne možemo izdvojiti konačan podpokrivač. Utvrditi da li neki skup jeste kompaktan, malo je teža stvar jer koristeći definiciju kompaktnosti moramo posmatrati sve moguće otvorene pokrivače posmatranog skupa. Zato su nam potrebne neke karakterizacije kompaktnosti. Prije nego iskažemo jednu od najvažnijih karakterizacija kompaktnosti na realnoj pravoj dokažimo pomoćno tvrđenje.

Lema 2.4.1 Neka su $a,b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a<b$. Skup $[a,b]$ je kompaktan.

Dokaz : Neka je $\mathscr{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ proizvoljan otvoren pokrivač skupa $[a,b]$. Označimo sa

$$B = \{x \in [a,b] \mid \text{ skup } [a,x] \text{ možemo pokriti sa konačnim podpokrivačem } \mathscr{A}' \subset \mathscr{A}\} \, .$$

Kako je $\mathscr{A}$ pokrivač skupa $[a,b]$, postoji $A_i \in \mathscr{A}$ takav da $a \in A_i$, te skup $[a,a]=\{a\}$ je pokriven sa konačnim (jednoelementnim) podpokrivačem i kao takav $a \in B$. Dakle, skup B nije prazan skup i kako je ograničen odozgo (elementom b), postoji supremum tog skupa. Stavimo $c = \sup B$ i pri tome je $c \leq b$.
Pretpostavimo da je $c<b$. Kako je $\mathscr{A}$ pokrivač skupa $[a,b]$, postoji $i_0 \in I$, takav da $c \in A_{i_0}$. A_{i_0} je otvoren skup te je on okolina svake svoje tačke, a to znači da postoji $\varepsilon > 0$ takav da $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subseteq A_{i_0}$. Za proizvoljan $y \in (c-\varepsilon, c)$ postojat će konačan pokrivač $\{A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_n}\}$ za skup $[a,y]$ (jer je $c=\sup B$), a time će familija $\{A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_n}, A_{i_0}\}$ biti konačan pokrivač za $[a,c]$. Kako je A_{i_0} otvoren skup i $a \leq c < b$, to postoji $\delta > 0$ takav da $[c, c+\delta) \subseteq A_{i_0} \cap [a,b]$. Ali tada je familija $\{A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_n}, A_{i_0}\}$ konačan podpokrivač za skup $[a,x]$, za neko $c<x<c+\delta$, što je u kontradikciji sa činjenicom da je c supremum skupa B. U kontrdikciju nas je dovela pretpostavka

da je $c < b$, a kako mora biti $c \leq b$ zaključujemo da je $c = b = \sup B$.
Kako je $\mathscr{A}$ pokrivač skupa $[a,b]$, postoji $A_{j_0} \in \mathscr{A}$, takav da $b \in A_{j_0}$. Zbog otvorenosti skupa A_{j_0}, za neko $\delta > 0$ je $(b-\delta, b+\delta) \subset A_{j_0}$, a kako je $b = \sup B$, postoji $d \in B$ takav da je $b - \delta < d \leq b$. Neka je $\{A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_n}\}$ konačan podpokrivač za $[a,d]$. Tada je $\{A_{j_0}, A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_n}\}$ konačan podpokrivač za $[a,b]$, a to znači da $b \in B$, te smo za $[a,b]$ izdvojili konačan podpokrivač iz polaznog otvorenog pokrivača, pa je skup $[a,b]$ kompaktan. □

Najvažniju karakterizaciju kompaktnosti na realnoj pravoj iskazujemo poznatim Heine-Borelovim tvrđenjem.

Teorem 2.4.2 — Heine-Borel. Podskup skupa $\mathbb{R}$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen skup.

Dokaz : Neka je $F \subset \mathbb{R}$ zatvoren i ograničen skup i neka je $\mathscr{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ njegov proizvoljan otvoren pokrivač. Kako je F ograničen skup, to postoje realni brojevi a i b ($a < b$) tako da je $F \subseteq [a,b]$. F je zatvoren skup pa je F^c otvoren skup, a tada familija $\mathscr{A}' = \mathscr{A} \cup \{F^c\}$ predstavlja otvoren pokrivač skupa $[a,b]$. Na osnovu Leme 2.4.1, $[a,b]$ je kompaktan skup pa možemo izdvojiti konačan podpokrivač za $[a,b]$. Očigledno je taj konačni podpokrivač pokrivač i skupa F, te je F kompaktan skup.

Neka je sada $F \subset \mathbb{R}$ kompaktan skup. Posmatrajmo skupove $A_n = (-n,n)$ ($n \in \mathbb{N}$). Familija $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je pokrivač skupa F jer

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R} \supset F \ .$$

Zbog kompaktnosti možemo izdvojiti konačan podpokrivač $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}\}$ za F. Neka je $N = \max\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$. Tada je

$$F \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_{i_k} = (-N, N) \ ,$$

te je F ograničen skup.
Neka je sada $x \in F^c$ proizvoljan fiksan element. Za $i \in \mathbb{N}$ označimo sa

$$A_i = \left[x - \frac{1}{i}, x + \frac{1}{i}\right]^c = \left(-\infty, x - \frac{1}{i}\right) \cup \left(x + \frac{1}{i}, +\infty\right) \ .$$

Familija $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ predstavlja otvoren pokrivač od F jer

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (-\infty, x) \cup (x, +\infty) \supset F \ .$$

Kako je F kompaktan, postoji konačan podpokrivač $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}\}$ za F. Neka je $N = \max\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$. Tada je

$$F \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_{i_k} = \left(-\infty, x - \frac{1}{N}\right) \cup \left(x + \frac{1}{N}, +\infty\right) \ ,$$

iz čega onda imamo da je $\left(x - \frac{1}{N}, x + \frac{1}{N}\right) \subset F^c$. Ovime smo pokazali da je skup F^c otvoren skup, a to onda znači da je F zatvoren skup. □

Sa naredne dvije direktne posljedice Heine-Borelovog teorema jednostavno dolazimo do široke klase kompaktnih skupova na realnoj pravoj.

Posljedica 2.1. *Neka je $K \subset \mathbb{R}$ kompaktan skup i $F \subset K$ zatvoren skup. Tada je i F kompaktan skup.*

Posljedica 2.2. *Neka su $A, B \subset \mathbb{R}$ kompaktni skupovi. Tada su i skupovi $A \cap B$ i $A \cup B$ kompaktni skupovi.*

Teorem 2.4.3 Neka je $K \subset \mathbb{R}$ kompaktan i A beskonačan podskup od K. Tada A ima bar jednu tačku nagomilavanja u K.

Dokaz : Neka je K kompaktan skup. Pretpostavimo suprotno da je $A \subseteq K$ beskonačan skup i da nema tačaka nagomilavanja u K. Tada za svako $x \in K$ (koji nije tačka nagomilavanja skupa A) postoji $\varepsilon > 0$, tako da ako $x \in A$ onda $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A = \{x\}$, a ako $x \notin A$ onda $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A = \varnothing$ (kako x nije tačka nagomilavanja skupa A to ne važi da u svakoj okolini od x postoji tačka skupa A različita od x. Ili, postoji okolina tačke x koja ne sadrži niti jednu tačku skupa A različitu od x.) Ako za svako $x \in K$ odredimo po jednu okolinu sa gornjim svojstvom, familija svih tih skupova predstavlja jedan otvoren pokrivač skupa K. Međutim, niti jedna konačna podfamilija neće biti pokrivač skupa A jer svaka od tih okolina sadrži jednu ili ni jednu tačku skupa A, a skup A je beskonačan. Ali to onda znači da niti jedna konačna podfamilija neće biti pokrivač ni skupa K jer je $A \subset K$, što bi značilo da skup K nije kompaktan. Ovo onda predstavlja kontradikciju sa polaznom pretpostavkom da je K kompaktan skup, te skup A mora imati bar jednu tačku nagomilavanja u K.
$\square$

Teorem 2.4.4 Ako $K \subset \mathbb{R}$ ima osobinu da svaki njegov beskonačan podskup ima tačku nagomilavanja u K, tada je skup K kompaktan.

Dokaz : Neka svaki beskonačan podskup od K ima tačku nagomilavanja u K.
Pretpostavimo da skup K nije ograničen. Tada za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in K$ takav da je $x_n > n$. Posmatrajmo sada skup $A = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Ali on je beskonačan skup koji nema tačaka nagomilavanja u K (on čak nema tačaka nagomilavanja u $\mathbb{R}$), što predstavlja kontradikciju. Dakle, skup K mora biti ograničen.
Pretpostavimo da skup K nije zatvoren. To bi značilo da postoji x_0 tačka nagomilavanja skupa K takva da $x_0 \notin K$. Kako je x_0 tačka nagomilavanja onda u svakoj njenoj okolini postoji beskonačno mnogo elemenata skupa K. Napravimo sada sljedeću konstrukciju: Posmatrajmo okolinu $(x_0 - 1, x_0 + 1)$, u njoj postoji $x_1 \in K$. Posmatrajmo okolinu $\left(x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2}\right)$ i u njoj postoji $x_2 \in K$. Dakle, za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ u okolini $\left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$ će postojati $x_n \in K$. Sada možemo formirati skup od ovako izabranih x_n, $A = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Pokažimo da skup A nema tačaka nagomilavanja u K. Kako $x_0 \notin K$, jasno je da x_0 nije kandidat za takvu tačku nagomilavanja skupa A. Neka je $y_0 \in \mathbb{R}$ proizvoljan $y_0 \neq x_0$. Sada imamo

$$\begin{aligned}|x_n - y_0| &= |(x_0 - y_0) - (x_0 - x_n)| \\ &\geq |x_0 - y_0| - |x_n - x_0| \\ &\geq |x_0 - y_0| - \frac{1}{n}\,.\end{aligned}$$

Prema Arhimedovom aksiomu postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{n_0} < \frac{1}{2}|x_0 - y_0|$. Neka je dalje $n \geq n_0$, tada je $\frac{1}{n} < \frac{1}{2}|x_0 - y_0|$, a onda vrijedi

$$|x_n - y_0| \geq |x_0 - y_0| - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}|x_0 - y_0|\,.$$

Birajući $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}|x_0 - y_0|$, u okolini $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ može biti samo konačno mnogo elemenata skupa A, te tačka y_0 ne može biti tačka nagomilavanja skupa A. Dakle, skup A je beskonačan podskup skupa K koji nema niti jednu tačku nagomilavanja u K, što predstavlja kontradikciju sa polaznom pretpostavkom teorema. Prema tome, skup K mora biti zatvoren.

Sa ovim smo pokazali da pod pretpostavkom da svaki beskonačan podskup skupa K ima tačku nagomilavanja tada je skup K ograničen i zatoren, a onda je prema Heine-Borelovom teoremu skup K kompaktan. $\square$

Završimo ovu priču o kompaktnosti na $\mathbb{R}$ jednim veoma važnim tvrđenjem za matematičku analizu.

Teorem 2.4.5 — Bolzano-Weierstrass. Svaki beskonačan i ograničen skup u skupu $\mathbb{R}$ ima bar jednu tačku nagomilavanja.

Dokaz : Neka je $A \subset \mathbb{R}$ beskonačan i ograničen skup. Zbog ograničenosti tog skupa će postojati $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $A \subseteq [a, b]$. Segment $[a, b]$ je kompaktan pa svaki njegov beskonačan podskup, time i skup A, će na osnovu Teorema 2.4.3 imati tačku nagomilavanja u $[a, b]$, a time i u $\mathbb{R}$. $\square$

A. Cantorov skup

Cantorov skup je jedan od podskupova skupa realnih brojeva koji ima mnoge čudne i iznenađujuće osobine, koje su često "patološkog" karaktera. Prvi put je demonstriran 1883. od strane njemačkog matematičara G. Cantora

Kostrukcija

Neka je $A_0 = [0,1]$. Formirajmo skup A_1 tako da iz skupa A_0 "izbacimo" srednju trećinu, tojest

$$A_1 = [0,1] \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] .$$

Formirajmo sada skup A_2 na način da iz svakog od dva dobijena segmenta, $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ i $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ "odstranimo" srednju trećinu,

$$A_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] .$$

Skup A_3 bi dobili na isti način odstranjivanjem srednje trećine u svakom od četiri segmenta od kojih se sastoji A_2. Postupak bi nastavili ad continuum i na takav način bi formirali skupove A_n ($n \in \mathbb{N}$) koji se sastoje od 2^n disjunktnih segmenata od kojih je svaki "dužine" 3^{-n} i za koje vrijedi

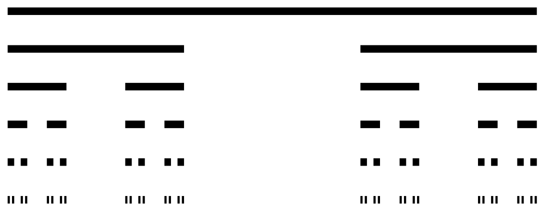
$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots .$$

Konačno, Cantorov skup definišemo na sljedeći način

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n .$$

Ovdje to nećemo pokazivati, a jedna eksplicitna formulacija Cantorovog skupa glasi,

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left(\left[0, \frac{3k+1}{3^n}\right] \cup \left[\frac{3k+2}{3^n}, 1\right] \right) .$$



Slika A.1: Konstrukcija Cantorovog skupa

Drugi način konstrukcije

Konstruisanje Cantorovog skupa možemo izvršiti i na potpuno drugačiji način, koristeći se ternarnim zapisom brojeva (standardno brojeve zapisujemo u dekadnom sistemu, sa ciframa 0,1,2,...,9). U ternarnom sistemu se koristimo ciframa 0,1 i 2.). Za ovaj opis koristit ćemo se mnogim u ovom dijelu nedokazanim tvrdnjama. Jedna od tih stvari je da se svaki broj iz $[0,1]$ može zapisati u formi

$$a,a_1a_2a_3\cdots$$

gdje je $a=0$ ili $a=1$, a $a_i \in \{0,1,2\}$ za $i \in \mathbb{N}$ (Dokaz ovoga se može pogledati u Rudin ili Dedagić, i dat je za dekadni zapis). Neki brojevi će imati dupli zapis kao naprimjer 1 koja se može prikazati sa $1.000\cdots$ ili sa $0.222\cdots$ (ekvivalentno u dekadnom sistemu $1 = 0.999\cdots$). Isto tako ćemo imati

$$\frac{1}{3} = 0.1000\cdots = 0.0222\cdots \ \text{ ili } \ \frac{7}{9} = 0.21000\cdots = 0.20222\cdots \ .$$

Da dobijemo jedinstven ternarni zapis svakog broja iz $[0,1]$ dogovorimo se da brojevi u ternarnom zapisu ne mogu imati beskonačno mnogo 0. Tako za zapis broja 1 koristimo samo zapis $0.222\cdots$.

Izvršimo sada konstrukciju skupa na sljedeći način. Označimo sa A_1 skup svih brojeva iz $[0,1]$ koji na prvom decimalnom mjestu nemaju 1. Taj skup se onda sastoji od segmenta $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ u kome brojevi imaju zapis $0,0a_2a_3\cdots$ i segmenta $\left[\frac{2}{3},1\right]$ u kome brojevi imaju zapis $0,2a_2a_3\cdots$. Formirajmo zatim skup A_2, svih onih brojeva iz A_1 koji na drugom mjestu nemaju 1. Naprimjer, brojevi iz $\left[0,\frac{1}{9}\right]$ imaju zapis $0,00a_3\cdots$ ili brojevi iz $\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]$ imaju zapis $0,02a_3\cdots$ i tako dalje. Jasno je da se u skupu A_2 nalaze svi oni brojevi koji na prva dva decimalna mjesta nemaju 1. Nastavimo li ovaj postupak dalje, formiramo skupove A_n onih brojeva koji u ternarnom zapisu nemaju 1 na prvih n decimalnih mjesta, tojest

$$A_n = \{0.a_1a_2a_3\cdots \mid a_i \in \{0,1,2\} \ , \ a_1,a_2,\cdots a_n \neq 1\} \ .$$

Cantorov skup C sada predstavljamo kao presjek svih skupova A_n ($n \in \mathbb{N}$) odnosno, on predstavlja skup svih brojeva iz $[0,1]$ koji u ternarnom zapisu ne sadrže 1 niti na jednom decimalnom mjestu. Podsjetimo se da naprimjer vrijedi $\frac{1}{3} = 0.1000\cdots = 0.0222\cdots$, ali uz dogovor koji smo napravili za zapis brojeva vrijedi samo $\frac{1}{3} = 0.0222\cdots$, te $\frac{1}{3} \in C$.

Osobine Cantorovog skupa

- Cantorov skup nije prazan. Zaista, kako smo već imali $\frac{1}{3} \in C$. Šta više, primjetimo da kad god smo odbacivali srednju trećinu u konstrukciji Cantorovog skupa, krajnje tačke su ostajale fiksne u svim narednim koracima konstrukcije. Tako naprimjer, kada smo izbacili inetrval $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ iz $[0,1]$, krajnje tačke $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$ su ostale u skupu A_1, ali su ostale i u svakom narednom skupu A_n ($n \in \mathbb{N}$), a time su i elementi skupa C.
  Cantorv skup ne samo da nije prazam, on u stvari ima neprebrojivo mnogo elemenata. Naime,

ako bi smo pretpostavili da je on prebrojiv, mogli bi smo sve njegove elemente poredati u niz

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}\cdots \\
x_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}\cdots \\
x_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}\cdots \\
&\vdots \\
x_n &= 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

pri čemu niti jedna od cifara a_{ij} nije 1. Konstruišimo sada broj $y = 0.b_1b_2b_3\cdots b_n\cdots$ na sljedeći način:

$$b_i = \begin{cases} 0 & ; \quad a_{ii} = 2 \\ 2 & ; \quad a_{ii} = 0 \end{cases}$$

Iz same konstrukcije broja y se vidi da on nema 1 u svom decimalnom zapisu i kao takav on je element Cantorovog skupa. Osim toga je $y \neq x_i$ za svako $i \in \mathbb{N}$ jer se y od x_i razlikuje u bar i-tom decimalnom mjestu. Dakle, y je element Cantorovog skupa koji nije prikazan u gornjem redanju svih elemenata Cantorovog skupa, a kako je prikaz svakog broja jedinstven, ovo nije moguće. Dakle, Cantorov skup ima neprebrojivo mnogo elemenata.

- Cantorov skup je zatvoren. U n-toj iteraciji konstrukcije Cantorovog skupa smo formirali skup A_n koji se sastoji od 2^n segmenata. Dakle, A_n je konačna unija zatvorenih skupova pa je i sam zatvoren skup (Teorem 2.2.2). Kako je C jednak presjeku svih skupova A_n, kao proizvoljan presjek zatvorenih skupova on je i sam zatvoren skup (Teorem 2.2.1).
- Unutrašnjost skupa C je prazan skup, tojest niti jedna tačka Cantorov skupa nije unutrašnja tačka. Zaista, neka je $x \in C$ proizvoljan i za proizvoljno $\varepsilon > 0$ posmatrajmo simetričnu ε-okolinu $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Pripadnost Cantorovom skupu znači da za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ je $x \in A_n$. Neka je sada n izabrano tako da je $3^{-n} < \varepsilon$. Kako je svaki od skupova A_n unija disjunktnih segmenata, mora postojati segment $I_n \subset A_n$ takav da $x \in I_n$. Izaberemo li sada broj a iz srednje trećine segmenta I_n, jasno je da $a \notin A_{n+1}$, a time $a \notin C$. Pri tome je $a \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ jer je $I_n \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Dakle, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \nsubseteq C$ niti za jedno $\varepsilon > 0$, a time x nije unutrašnja tačka skupa C. Dakle, $int(C) = \varnothing$.
- Cantorov skup ne sadrži niti jedan interval. Iako je ovo posljedica prethodne, osobine iskazujemo ovo kao zasebnu osobinu. Zaista, neka su $x, y \in C$ proizvoljni. Izaberimo $n \in \mathbb{N}$ tako da je $3^{-n} < |x-y|$. Svaki od 2^n segmenata koji čine skup A_n iz konstrukcije Cantorovog skupa, ima dužinu 3^{-n} pa zbog izbora n-a ne mogu i x i y biti u istom segmentu, tojest one se nalaze u dva različita segmenta koji čine skup A_n. Time mora postojati tačka z koja leži između ovih segmenata, a time ne pripada skupu C. Pokazali smo da za proizvoljne dvije tačke Cantorovog skupa, postoji tačka između njih koja ne pripada Cantorovom skupu, a time Cantorov skup ne može sadržavati niti jedan interval.
- Sve tačke Cantorovog skupa su njegove tačke nagomilavanja. Da ovo pokažemo, neka su $x \in C$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljni. Za dovoljno veliko $n \in \mathbb{N}$ će biti $3^{-n} < \varepsilon$. Kako je $x \in C \subseteq A_n$ i kako je A_n unija disjunktnih segmenata, postojat će segment I_n koji sadrži tačku x. Kako je dužina segmenta I_n jednaka 3^{-n}, za jedan od krajeva segmenta I_n, recimo x', će biti

$$|x - x'| \leq 3^{-n} < \varepsilon \ ,$$

a to znači da $x' \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Po konstrukciji Cantorovog skupa, krajnje tačke segmenata jesu elementi skupa C, dakle $x' \in C$, te zaključujemo $((x-\varepsilon, x+\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap C \neq \varnothing$, za proizvoljno $\varepsilon > 0$. Dakle, x je tačka nagomilavanja skupa C.

Šta više, može se pokazati da su tačke nagomilavanja skupa C upravo njegovi elementi, što zajedno sa gornjim znači $C = C'$.

- Cantorov skup nema izolovanih tačaka. Ovo je jasno zbog činjenice da su sve tačake Cantorovog skupa njegove tačke nagomilavanja. Ipak pokažimo ilustrativno zašto je to tako. Neka je $a = 02002220202\ldots$ neka tačka skupa C. Zavisno od posmatrane okoline tačke a, tačka $b = 02002222202\ldots$ je takođe iz C, različita od a i "blizu" je tački a, tojest nalazit će se u datoj okolini tačke a.
- Dužina Cantorovog skupa je 0! Da ovo pokažemo, izračunajmo dužinu svih dijelova koje smo odbacivali u konstrukciji skupa. Tako smo u prvom koraku odbacujući srednju trećinu, interval $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, odbacili jedan komad dugačak $\frac{1}{3}$. U drugoj iteraciji odbacili smo dva komada, svaki dugačak po $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$. U trećoj iteraciji odbacili smo 4 intervala, svaki dužine $\frac{1}{3^3}$. Generalno, u n-toj iteraciji konstrukcije Cantorovog skupa odbacivali smo 2^{n-1} interval, svaki dužine $\frac{1}{3^n}$. Izvršimo sumiranje svih odbačenih dužina.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\frac{1}{3^n} &= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1\ .\end{aligned}$$

  (U gornjem sumiranju smo se koristili formulom za sumiranje geometrijskog niza.) Dužina koju smo odbacili je 1, a odbacivali smo dijelove iz skupa $[0,1]$ koji je dugačak takođe 1. Dakle, ono što je preostalo, a to je Cantorov skup, ima dužinu 0.
- Već smo pokazali da je Cantorov skup zatvoren, a kako je sadržan u $[0,1]$ on je i ograničen, te je prema Definiciji 2.4.3 i kompaktan skup.
- Kompaktan skup bez izolovanih tačaka je perfektan, a takav je i Cantorov skup.
- Cantorov skup je fraktal. Ako u bilo kojoj iteraciji konstrukcije Cantorovog skupa odbacimo sve konstruisane dijelove osim jednog i na tom ostavljenom nastavimo dalju konstrukciju po istom algoritmu, dobijamo identičnu "sliku" sa polaznom konstrukcijom (gledano zumirano). Ovu osobinu nazivamo *samo-sličnost*, a ona je u osnovi svih fraktala.
- $\frac{1}{4} \in C$. Interesantno u ovom podatku je činjenica da konstrukcijom Cantorovog skupa očekujemo da su njegovi elementi krajevi segmenata koji se dobijaju konstrukcijom. Naravno da je ovo očekivanje ispravno, ali $\frac{1}{4}$ nije kraj niti jednog segmenta prilikom bilo koje iteracije u konstrukciji. Međutim, u ternarnom zapisu broj $\frac{1}{4}$ je $0.020202\cdots = 0.\overline{02}$ i kao takav on je element Caktorovog skupa.