Matematička analiza I
Aksiomi skupa realnih brojeva

1. Dokazati:
   (a) Postoji jedinstven neutralni element za sabiranje.
   (b) $(\forall x \in \mathbb{R})\ x \cdot 0 = 0.$
   (c) $(\forall x \in \mathbb{R})\ 0 \cdot x = 0.$
   (d) Izračunati $0 \cdot 0$!
   (e) Koliko je $0 \cdot 0^{-1}$?

2. Dokazati:
   (a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x + y = x + z \ \Rightarrow\ y = z).$
   (b) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ (x + y = x \ \Rightarrow\ y = 0).$
   (c) $(\forall x \in \mathbb{R})\ -(-x) = x.$

3. Dokazati: $(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R})\ (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$
   Koristeći se ovom jednakošću dokazati da vrijedi
   $$(\forall x, y \in \mathbb{R})\ (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2\ .$$

4. Dokazati: $(\forall x, y \in \mathbb{R})(\exists z \in \mathbb{R})\ x + z = y.$

5. Dokazati: $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ (-x)y = -xy.$

6. Dokazati: $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\ a(b - c) = ab - ac.$

7. Dokazati:
   (a) Postoji jedinstven neutralni element za množenje.
   (b) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x \neq 0 \wedge xy = xz \ \Rightarrow\ y = z).$
   (c) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ (xy = x \ \Rightarrow\ y = 1).$

8. Dokazati:
   (a) jedinstvenost inverznog elementa za sabiranje.
   (b) jedinstvenost inverznog elementa za množenje.

9. Dokazati:

(a) $(\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\ \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{xy}$.

(b) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (x \neq 0 \ \Rightarrow\ \frac{1}{\frac{1}{x}} = x)$.

(c) $(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\ \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$.

10. Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dokazati:

(a) $x > 0 \ \Leftrightarrow\ -x < 0$.

(b) $x > 0 \land y < z \ \Rightarrow\ xy < xz$. Da li vrijedi obrat tvrdnje?

(c) $x < 0 \land y < z \ \Rightarrow\ xy > xz$. Da li vrijedi obrat tvrdnje?

(d) $x \neq 0 \ \Rightarrow\ x^2 > 0$.

(e) $0 < x < y \ \Rightarrow\ 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

11. Dokazati:

(a) $(\forall x, y \in \mathbb{R})((x \geq 0 \land y \geq 0) \Rightarrow x + y \geq 0)$.

(b) $(\forall x, y \in \mathbb{R})((x > 0 \land y \geq 0) \Rightarrow x + y > 0)$.

12. Dokazati:

(a) $(\forall x, y \in \mathbb{R})((x \geq 0 \land y \geq 0) \Rightarrow xy \geq 0)$.

(b) $(\forall x, y \in \mathbb{R})((x > 0 \land y \geq 0) \Rightarrow xy \geq 0)$.