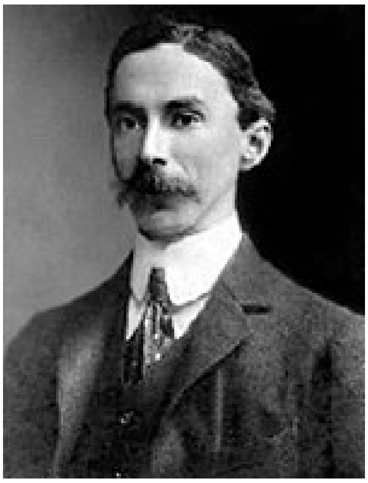
# Uvod u teoriju skupova

Udžbenik

Nermin Okičić

# Sadržaj

# DIO PRVI



Bertrand Arthur William Russell (Trelleck, 18.05. 1872. - Penrhyndeudraeth, 02.02. 1970.), engleski[1] filozof, matematičar, logičar, istoričar i društveni reformator. Jedan je od najsvestranijih naučnika 20. vijeka.

Na Trinity Collegeu u Cambridgeu studirao je filozofiju i matematiku, gdje po završetku studija 1895. počinje akademsku karijeru, ali je 1916. udaljen zbog borbene protivratne agitacije, a 1918. je iz istog razloga zatvoren na šest mjeseci. Potomak je ugledne plemićke porodice, ali ubrzo i sam stječe glas slobodnog mislioca, pacifiste, kritičara građanskog morala i borca za ljudsku jednakost. Politički se angažuje na lijevom krilu laburističke stranke, ali na zastupničkim izborima 1922. i 1923. nema uspjeha. Od 1938. do 1944. predavao je na različitim univerzitetima u SAD-u, a tek je 1944. ponovno izabran za profesora na Trinity Collegeu. I nakon Drugog svjetskog rata nastavlja s političkim aktivnošću humaniste: bori se protiv "ludila hladnog rata", predsjedava Međunarodnom sudu za utvrđivanje ratnih zločina u Vijetnamu, pa je u 89. godini drugi put zatvoren kao vođa i sudionik antinuklearnih demonstracija.

Godine 1950. dobio je Nobelovu nagradu za književnost. Njegovo prvo filozofsko zanimanje vezano je uz matematički prikaz filozofije, a iz te faze proizašlo je monumentalno djelo "Principia mathematica" nastalo u suradnji s A. N. Whiteheadom, koje je obojici autora donijelo svjetsku slavu i postalo ishodište novog smjera u filozofiji i matematici. Već 1901. istaknuo se kao briljantan logičar, uočivši paradoks koji je proizlazio iz petog aksioma Fregeove logičke analize aritmetike (Russellov paradoks). U svojoj konkretnoj društvenoj borbi decidirani je kritičar svake dominacije, proizlazila ona iz vlasništva, države ili iz međurasnih i međuspolnih odnosa.

Neke poznate njegove izreke:
"Tragično je što su glupaci toliko sigurni, a mudri puni sumnje."
"Demokrata ne treba da vjeruje da će većina uvijek donijeti mudru odluku. Ono u šta on treba da vjeruje je da se odluka većine - pametna ili ne - mora prihvatiti, dok većina ne donese neku drugu odluku."
"Ludosti učinjene u mladosti ne može nadoknaditi sva mudrost u starosti."
"Dozvoljavam da kleveću žene samo oni koji priznaju da su zaboravili kako su imali majku."
"Naučnici se trude stvoriti moguće od nemogućeg a političari stvoriti nemoguće od mogućeg."
"Svijet bez ljubavi je svijet bez vrijednosti."
"Strah od ljubavi jednak je strahu od života, a oni koji se boje života, već su napola mrtvi."
"Pobjeda nad strahom je pocetak mudrosti."
"Moć je slatka; ona je droga, ona je želja koja se povećava navikom."

# 1. Od paradoksa do aksiomatske teorije

## 1.1 O paradoksima

Riječ "paradoks" poznata je većini. Kada u običnom govoru kažemo da je nešto paradoksalno, podrazumijevamo da je to "nešto" neostvarivo ili da je nemoguće (najčešće kao "skoro nemoguća" stvar). Najlakše za shvatiti, *paradoks* ili *antinomija* predstavlja rasuđivanje koje nas obavezno dovodi do protivrječnosti, bez obzira koliko nam polazne pretpostavke izgledale tačne, a pravila rasuđivanja ispravna. Krajem XIX vijeka pojavili su se neki paradoksi koji u početku nisu shvatani previše ozbiljno. Kada je Russell[1] 1902. godine objavio svoj paradoks, koji se nalazi u osnovi tadašnje teorije skupova, to je izazvalo pravu krizu u svijetu matematike, ali i filozofije. Naime, sa malim izmjenama u formulaciji tog paradoksa, može se doći do kontradikcije koja se može formulisati na jeziku većine logičkih pojmova.

Naravno da Rusellov paradoks nije prvi paradoks u svijetu matematike. Još iz doba Stare Grčke poznati su neki od njih, ali što je jako bitno, njihovim razrješavanjem dolazilo je do naglog razvoja određene matematičke discipline. Tako je problem nesamjerljive dijagonale doveo do razvoja čitave matematičke oblasti, *teorije proporcija* iz koje će se kasnije razviti teorija iracionalnih brojeva. Takođe, poznati *Zenonov* [2] *paradoks* o Ahilu i kornjači (i njemu srodni) doveli su do razvoja *teorije ekshaustije*, a koji se zasniva na činjenici da se jedna konačna veličina ne može izgraditi od beskonačno mnogo, beskonačno malih veličina. To će ustvari nešto kasnije uzrokovati razvoj integralnog računa. Početkom XIX vijeka nepažljivo i bezobzirno korištenje beskonačno malih veličina će ponovo uzrokovati krizu matematike, a koja će biti otklonjena radovima Cauchyja [3] i Weierstrassa[4], čime će matematička analiza biti postavljena na mnogo zdravijoj osnovi.

Otkrivanje novih paradoksa na kraju XIX vijeka dovodi do naglog razvoja i zainteresovanosti za matematičku logiku, što će bitno uticati na razvoj i kretanja u modernoj matematici, a takođe i na logiku kao filozofsku disciplinu.

Navedimo neke od paradoksa, srodnih Rusellovom paradoksu:

[1]Bertrand Arthur William Russell, britanski filozof (1872-1970)
[2]Zenon od Eleje, grčki filozof (oko 490 p.n.e.- oko 430 p.n.e.)
[3]Augustin Louis Cauchy, francuski matematičar (1789-1857)
[4]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, njemački matematičar (1815-1897)

**Paradoks lažova**
Ovaj paradoks izveden je iz poznate konstrukcije kritskog filozofa *Epimenida*[5] ;

”Ja sam krićanin, a svi krićani lažu.”

Očigledna je kontradiktornost gornje izjave. Naime, ako ja jesam krićanin onda zbog njihove ”lažljivosti” ja nisam krićanin.

Ovaj se paradoks može iskazati i na razne druge načine naprimjer,

”Ja lažem sada.” ili ”Ova izjava je lažna.”

Prema nekim istoričarima, ovaj paradoks je prvi formulisao Eubulid iz Mileta (4. v. p.n.e), koji ga je dao u obliku:

”Čovjek kaže da laže. Da li je to što govori istinito ili lažno?”

**Katološki paradoks**
Posmatrajmo biblioteku koja pravi bibliografski katalog svih (i samo njih) kataloga koji ne navode sami sebe. Da li će se u tom katalogu navoditi i biblioteka koja ga pravi?

**Paradoks brice**
Postoji selo u kojem postoji brico koji brije isključivo samo one muškarce koji ne briju sami sebe. Ko brije bricu?

**Grellingov[6] paradoks**
U svakom jeziku postoje riječi koje su ”samoopisne”. Naprimjer, riječ ”bosanski” je bosanska riječ, ”višesložno” je višesložna riječ, ”kratak” je kratka riječ, ”ispravno” je ispravna riječ, ”apstraktno” je apstraktna riječ itd. Ali riječ ”dug” očigledno nije duga riječ. Riječi poput ”udoban”, ”zanosan” i ”uskoro” očigledno nemaju ovu osobinu samoopisnosti. Ako riječi bez osobine samoopisnosti nazovemo neinspirativnim, da li je riječ ”neinspirativno” neinspirativna?

**Berryjev paradoks**[7]
Argumentacije radi, neka su sve riječi bosanskog jezika navedene u nekom standardnom rječniku. Neka je $T$ skup svih prirodnih brojeva koji se mogu opisati sa manje od dvadeset riječi na bosanskom jeziku. Budući da postoji samo ograničen broj bosanskih riječi, postoji samo konačno mnogo kombinacija sa manje od dvadeset takvih riječi, to jest $T$ je konačan skup. Očigledno je da postoje prirodni brojevi koji su veći od svih elemenata iz $T$. Stoga postoji *najmanji prirodni broj koji se ne može opisati sa manje od dvadeset riječi na bosanskom jeziku*. Po definiciji, taj broj nije u $T$, ipak smo ga opisali u šesnaest riječi, stoga je u $T$?!

Paradoksi (oni koje poznajemo) se mogu podjeliti po mnogim osnovama: sintaksni, semantički, geometrijski, fizikalni. Za nas interesantna podjela je u sljedeće dvije grupe, semantički paradoksi i skupovni paradoksi. U semantičke spadaju: paradoks lažova (Epimenidov paradoks), paradoks brice, Grelingov paradoks, Berryjev, Risharov i svi paradoksi oblika:

*Ne postoji istina!*

Njihova osnova su pojmovi: istina, laž, izrazivost.

U skupovne paradokse spadaju: Burali-Fortijev, Cantorov, Rassellov. Njihov izvor su pojmovi skup i ključne skupovne operacije i relacije, kardinalni broj i ordinalni broj.

---

[5]Epimenides, grčki filozof (VI/VII v.p.n.e.)
[6]Kurt Grelling, njemački matematičar (1886-1942)
[7]G.G. Berry, mlađi bibliotekar Oxford’s Bodleian biblioteke (1867–1928)

## 1.2 Paradoksi u teoriji skupova

Jednu od najznačajnijih matematičkih teorija, teoriju skupova, njen tvorac Cantor[8] razvijao je neaksiomatski. Odatle i naziv za tu teoriju, *naivna teorija skupova* (kako je razvijena i obrazložena, tu nema mjesta nikakvoj naivnosti). Naknadnom analizom je zaključeno da je Cantor sve rezultate izveo oslanjajući se na tri aksioma, koje nigdje nije jasno fomulisao i precizirao. To su:

- Aksiom jednakosti: Dva skupa su jednaka ako i samo ako imaju iste elemente.
  Formalno-logički izraženo: $(\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Leftrightarrow x = y$.
- Aksiom apstrakcije: Za svako svojstvo $S$ (dužine (arnosti) 1), postoji skup $X$ čiji su elementi upravo oni koji imaju svojstvo $S$.
  Formalno-logički izraženo: $(\forall S)(\exists X)\ X = \{x \mid S(x)\}$.
- Aksiom izbora: Za svaku familiju $A$ nepraznih disjunktnih skupova, postoji funkcija $f$ (tzv. izborna funkcija), koja svakom skupu $X$ iz $A$ dodjeljuje po jedan njegov element.
  Formalno-logički izraženo: $(\forall A)(\exists f)(\forall X \in A)\ f(X) \in X$.

Za aksiom izbora, po formulaciji najsloženiji, pokušavalo se veoma dugo čak i poslije stvaranja aksiomatskih teorija skupova, pokazati da ona slijedi iz ostalih aksioma. Međutim, slično kao kod V postulata u Euklidovim Elementima, pokazalo se da je aksiom izbora nezavisan od ostalih aksioma, pa su u skladu sa tim rezultatom kasnije razvijane aksiomatske teorije skupova sa aksiomom izbora kao i one bez nje.

Aksiom apstrakcije izgledao je sasvim prihvatljivo i potpuno prirodno, tako da niko nije ni slutio da će upravo on pokrenuti čitavu lavinu paradoksa, lavinu koja je zaprijetila da poruši matematičku građevinu, pa i cijelokupnu klasičnu nauku.

Radovima mnogih matematičara s kraja XIX vijeka, kao što su Bolzano[9], Weierstrass pa i Cantor, postavljane su osnove matematičke analize. Međutim, 1895. Cantor uočava prvi paradoks u svojoj teoriji. On ga iznosi u svojoj prepisci sa Hilbertom[10] ali ga ne publikuje. Obzirom da se odnosio na prilično tehnički dio teorije dobro uređenih skupova, on se nadao da bi uz male ispravke u nekim dokazima mogao izbjeći to neugodno pojavljivanje. Godine 1897. to isto uočava Burali-Forti[11] i publikuje taj paradoks koga i danas znamo pod imenom **Burali-Fortijev paradoks**.

Dvije godine kasnije Cantor uočava sličan paradoks i u teoriji kardinalnih brojeva.

**Cantorov paradoks**

Po Cantorovoj teoriji, partitivni skup nekog skupa ima kardinal veći od kardinala samog skupa. Ako sa $U$ obilježimo skup svih skupova, tada $\mathcal{P}(U)$ ima veći kardinal od $U$, a to je nemoguće jer $\mathcal{P}(U) \subseteq U$.

1902. Russell uočava sličnu situaciju i konstruiše novi paradoks, mnogo elementarniji od Cantorovog jer ne zahtijeva ni podskupove ni partitivne skupove.

**Russellov paradoks**

U vrijeme stvaranja naivne teorije skupova smatralo se da svaka osobina koja se može zamisliti može poslužiti za određivanje skupa. To potvrđuje i Cantorova definicija skupa:

*Pod "skupom" podrazumijevamo bilo koju kolekciju definisanih i raspoznatljivih objekata iz naše intuicije ili naših misli.*

Russell je prvi uočio da ako se skup definiše osobinom svojih elemenata, da će neki skupovi imati osobinu da su elementi samih sebe. Naprimjer, skup svih konstruisanih skupova je i sam konstruisan skup, pa je on element samog sebe. Upravo ovakav rezon će poslužiti Russellu da konstruiše sljedeći skup. Neka je $S = \{X \mid X \notin X\}$, to jest $S$ je skup svih onih skupova koji nisu elementi samih sebe. Da li je $S$ element samog sebe? Odgovor na ovo pitanje je kontradiktoran,

[8]Georg Cantor, njemački matematičar (1845-1918)
[9]Bernardus Placidus Johann Nepomuk Bolzano, italijanski filozof (1781-1848)
[10]David Hilbert, njemački matematičar (1862-1943)
[11]Cesare Burali-Forti, italijanski matematičar (1861-1931)

naime on dovodi do situacije

$$S \in S \iff S \notin S .$$

Russell obavještava Fregea[12] o ovom paradoksu i publikuje ga 1903. godine ali za razliku od Burali-Fortijevog i Cantorovog, ovaj paradoks nailazi na veliki odijek i bio je prava pometnja u matematičkim krugovima koji su se u to vrijeme bavili fundamentalnim problemima. Tako će Dedekind objavljivanje svog rada o prirodi i smislu brojeva ("*Was sind und was sollen die Zahlen*") prolongirati za izvjesno vrijeme, a Frege koji je privodio kraju svoj veliki rad o formalnim sistemima će u predgovoru rada priznati da je Russellov paradoks uzdrmao fundamente njegovog rada. Poincare[13], jedan od vodećih matematičara tog doba, inače do tada veliki pristalica Cantorovog rada, od pojave Russellovog paradoksa postaje totalni protivnik Cantorove teorije skupova.

U suštini, Russellov i paradoks o brici imaju isti korijen. Međutim, paradoks o brici jednostavno rješavamo tako što kažemo da je brico "kontradiktoran" i konstatujemo da takvo selo ne može postojati. Ali tako nešto ne možemo primjeniti kod Russsellovog paradoksa jer nije jasno zašto onako napravljen skup $S$ ne bi postojao, odnosno zašto je on "samokontradiktoran". Šta više, ako to i prihvatimo tako, postavlja se pitanje da li postoji još takvih skupova, bolje reći, a koliko još ima takvih skupova koji su "samokontradiktorni"?

Iako Cantor nije uspio da riješi ove probleme oko pojave ovih paradoksa, on ni u jednom trenutku nije odustao od svoje teorije skupova. Sama činjenica da čak i mi danas o tim pojavama govorimo u terminima "paradoks" ili "antinomija", a ne "kontradikcija", govori da je Cantor bio u pravu sa svojim stavom. Kako to reče Hilbert, ipak većina matematičara "ne želi biti izgnana iz raja u koji nas je Cantor uveo ".

Prije pojave ovih paradoksa, pitanje *postojanja* skupova nikada nije postavljano. Cantor „definiše" skup kao „skup određenih prepoznatljivih objekata naše percepcije koji se može shvatiti kao cjelinu." Konkretnije, Cantor i njegovi rani sljedbenici prihvataju „zdravorazumsku" ideju da ako možemo opisati osobinu objekata, možemo govoriti o skupu svih objekata koji posjeduju tu osobinu. Paradoksi imaju osnovni značaj pokazati izvorni koncept zašto su neki skupovi neprihvatljivi - ako samo zbog stvarne „osobine" dolazimo do paradoksalnih skupova.
U raznim pokušajima koji se pojavljuju ranih 1900-ih, s ciljem revizije temelja teorija skupova, središnja tema po važnosti je postojanje skupa. To postojanje skupa vezano je uglavnom za pitanja: "Koje osobine legitimno definišu skupove?", "Pod kojim uslovima neka osobina određuje skupove uopšte?", "Kako se novi skupovi mogu formirati od postojećih?" i slično.

## 1.3 Kako izbjeći paradokse?

Pojava skupovnih paradoksa označava početak krize koja uzdrmava temelje matematike, koja nije u potpunosti riješena do današnjih dana. Tako je postalo jasno da je intuitivno shvaćanje skupa, kako ga Cantor daje u „definiciji", ne daju zadovoljavajući temelj za teoriju skupova, a još manje matematike u cjelini. Neki pokušaji kako bi se eliminisali paradoksi, izuzimanjem određenih vrsta pojmova i definicija, su osuđeni na neuspjeh, iz čega je bilo jasno da je potreban potpuno novi pristup. Počevši od 1905., nekoliko načina rješavanja problema bili su predlagani i razvijeni od strane njihovih sljedbenika. Većina njih se mogu svrstati u tri glavne skupine, „aksiomatska", „logicistička" i „intuicionistička" škola.

Suštinski se u modernoj matematici razlikuju tri matematička pravca (pokreta): formalizam, intuicionizam i logicizam. Njihova gledanja na matematiku nisu obavezno toliko protivrječna kako se to ponekad želi prikazati, ali se različitim oblastima problema bave na bitno različite načine.

*FORMALIZAM* U najkraćem, formalizam teži zasnivanju potpunih aksiomatskih sistema. Ova tendencija uočljiva je još od Euklida, a osnivač modernog pravca je Hilbert. Posmatranje

[12] Gottlob Frege, njemački matematičar (1848-1925)
[13] Jules Henri Poincare, francuski matematičar (1854-1912)

matematičkih problema je sljedeće: postoje sintaksa i semantika, to jest iskazanost (mogućnost zapisa) i samo značenje iskaza matematike. Jedan formalista se ne bavi mnogo pitanjem sadržaja i istinosti u logičkom i filozofskom smislu. Hilbert je namjeravao da stvori precizan i detaljan matematički jezik koji će omogućiti formalizaciju čak i samog čina matematičkog dokazivanja. On je zaključio da mogu postojati dokazi o egzistenciji nekog objekta koji se ne mogu sprovesti u konačnom broju koraka. Međutim, ukoliko bi takav dokaz narušio konvencije matematičkog izvođenja i dokazivanja, takvu grešku bismo mogli pronaći na sasvim konačan i izvodljiv način. Zaključuje se po principu isključenja trećeg (to jest stav ili jeste tačan ili nije tačan, formalno: $p$ ili ne $p$) da su navedeni dokazi korektni jer nisu nekorektni. Iz ovakvog pristupa onda imamo ([**zs**], str. 61). ”... Moramo ispitivati ne tvrdnje, već metode dokazivanja. Klasičnu matematiku moramo gledati kao kombinatornu igru osnovnim simbolima i moramo finitnim kombinatornim sredstvima ustanoviti do kojih nas kombinacija osnovnih simbola dovode metode konstrukcije ili ”dokazi”.” Još jedna važna crta formalizma jeste da pravi razliku između pojmova istinito i smisleno. Ovo je na neki način razlika između logičkog i formalnog jer naprimjer i $1+1=2$ i $1+1=1$ jesu (formalno) smisleni iskazi, gde je prvi tačan, a drugi nije, dok $1++1=$ ili $=+1+1$ nisu smisleni, pa se ne može ni govoriti o istinosti tih iskaza, odnosno formalnih zapisa.

*INTUICIONIZAM (KONSTRUKTIVIZAM)* Jedan od najvećih kritičara Cantorove teorije beskonačnih skupova bio je Kronecker[14]. Išao je čak dotle da tu teoriju (a na žalost i samog Cantora) smatra ”ludom” i ”suviše divljom”, odnosno neprimjerenu matematici. Ovim svojim nemilosrdnim i oštrim stavovima on je bio preteča pravca koga je formulisao Brouwer[15]. Intuicionisti nastoje povratiti sigurnost i dignitet matematike kroz samu matematiku kao mentalnu konstrukciju. Matematičke isitne ne smatraju otkrićima o stvarima i njihovim osobinama u nekom apstraktnom svijetu, nego su one konstrukcije takvih svijetova. Intuicionista uzima prirodne brojeve potpuno konstruktivno. Polazi od prirodne, apriorne intuicije prirodnih brojeva, odnosno njihove strukture unutar mišljenja, a ne od prirodnih brojeva kao zaista postojećih objekata ili pak osobina nekih drugih postojećih objekata. Ovo je samo na prvi pogled mistifikacija; baš naprotiv, intuicionista upravo želi da izbjegne svaku vrstu mistifikacije koju implicitno pronalazi u teoriji skupova. O tome Heyting [16] kaže ([**zs**], str. 49): ”Ni prirodnim brojevima ni bilo kakvim drugim matematičkim objektima ne pripisujemo egzistenciju nezavisnu od našeg mišljenja, to jest transcendentnu egzistenciju. Mada bi moglo biti istinito da se svaka misao odnosi na neki objekat poiman kao da postoji nezavisno od nje, ovo pitanje možemo ostaviti otvorenim.”. Dakle, to pitanje je za intuicioniste potpuno irelevantno. Otuda pristalica ovoga pravca smatra da je moguće konstruktivno praviti beskonačan skup (potencijalna beskonačnost) ali nikada se ne može zaista i napraviti beskonačan skup (aktuelna beskonačnost). Postojanje aktuelne beskonačnosti trebalo bi da bude bez značaja za nas, pa se samim tim logički kvantifikator ”postoji” ($\exists$) može smisleno upotrebljavati samo za konačne skupove. Po tumačenju intuicionista, mi smatramo da posjedujemo aktuelnu beskonačnost u mašti, ali je nikakvim svojim (vremenski i prostorno) ograničenim konstruktivnim postupkom ne možemo realizovati. Intuicionista iz ovoga dalje zaključuje da klasična matematika nije zapisiva jer podrazumijeva korišćenje nekonstruktivnih simbola kao što su ”...” (u značenju: i tako dalje - u beskonačnost), a koji jednostavno zavaravaju, ne opisuju nikakav konstruktivan postupak, pa su zato i neupotrebljivi. Postavlja nam se razumno pitanje, kako simbol beskonačnosti može označiti nešto tako neobuhvatno (govorimo o matematičkim, po mogućnosti netranscendentnim objektima)? Ljudi u svom praktičnom djelovanju često pribjegavaju ovakvim ”prečicama” koje nisu toliko odraz inteligentnosti i dosjetke, koliko su jedino moguće. Ako bi intuicionista ipak dozvolio mogućnost postojanja nekonstruktivnih matematičkih objekata, opet bi mogao s punim pravom da nas upita: ”na osnovu kojih to pravila smijemo da svedemo nekonstruktivnost na sasvim

[14]Leopold Kronecker (1823-1891), njemački matematičar

[15]Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), holandski matematičar

[16]Arend Heyting (1898-1980), holandski logičar i matematičar

konstruktivnu simboliku?”. Intucionista, kao izvorni konstruktivista, na osnovu svega ovoga i dalje će tvrditi da su ljudi prevashodno konstruktivna, algoritamska bića, bez obzira na sav njihov afinitet za transcendentnim. Transcendentno i jeste transcendentno zato što je van domašaja našeg konstruktivističkog iskustva i istog takvog promišljanja stvrnosti. Intuicionizam primjećuje, pored nezapisivosti nekonstruktivne matematike, i problem sa logičkim pravilom isključenja trećeg - ono je odbačeno za potencijalno beskonačne i prihvaćeno za aktuelno konačne skupove. Ovo se opravdava, između ostalog, i konstatacijom da su matematika i logika došle do svojih zaključaka posmatranjem konačnih skupova. Heyting će dodatno razjasniti ovakve stavove ([**zs**], str.50). ”... Matematički objekti po svojoj prirodi zavise od ljudskog mišljenja (prim. zato što nastaju apstrahovanjem). Njihovo je postojanje zajamčeno u onoj mjeri u kojoj je ustanovljeno mišljenjem. Oni imaju svojstva u onoj mjeri u kojoj ih mišljenje može izdvajati. Vjeru u transcendentnu egzistenciju, nepodržanu pojmovima, valja odbaciti kao sredstvo matematičkog dokazivanja.”

Ukratko rečeno, intuicionista tvrdi da matematički teorem nije ništa drugo nego činjenična izjava o tome da će određena mentalna konstrukcija dovesti do određenog rezultata. Svaki dokaz mora biti konstruktivan. Ako tvrdimo da postoji matematički objekt, moramo to dokazati tako što ćemo dati postupak za izgradnju tog objekta. Ako tvrdimo da neki odnos važi među danim parom objekata, naš dokaz mora sadržavati metodu za testiranje svakog para objekata koji su u pitanju. „Pravila logike” nisu ništa više od običnog opažanja o procesu matematičkih konstrukcija; nemamo osnove za sumnju ta pravila primjenjivati izvan konteksta konstruktivne matematike. Zapravo je besmisleno primjenjivati ih izvan tog konteksta. Logika je sporedna, ne bitna, u matematici.

*LOGISTICIZAM* I pored suštinske i duboke srodnosti, logika i matematika, međutim, nisu identične ni sa gledišta metoda ni sa gledišta objekata istraživanja. Kao što i sam naziv kaže, pristalice ovog pravca prevashodno daju logici na značaju. U svome djelu ”Principia mathematicae”, Russell je, kao osnivač pravca, izložio osnovne postavke koje se mogu sažeti u sljedeću formulaciju: ”Matematika se skoro u potpunosti može svesti na logiku”, to jest matematika je prevediva na logiku. Nasuprot Hilbertovom tvrđenju da je riječ samo o bezsadržinskoj igri simbola, Russell tvrdi da se matematika sastoji od rečenica oblika, ako $A$, onda $B$ (to jest $A \Rightarrow B$) i intrigantno dodaje da niko ne zna šta je $A$, a šta $B$. U fizici naprimjer, $A$ je eksperiment, a $B$ je rezultat eksperimenta. Imajući ovo u vidu, Carnap[17] navodi sljedeće o logicističkom pogledu na matematiku ([**zs**], str. 39-40). ”... Russell je stoga s pravom oklijevao da ih predstavi kao logičke aksiome (prim. misli se na dva aksioma o egzistenciji - aksiomu beskonačnosti i aksiomu izbora) jer logika ispituje samo moguće entitete i ne može ništa tvrditi o postojanju.”. Russell je našao izlaz iz ove poteškoće ovakvim rasuđivanjem: Kako je i matematika čisto formalna nauka, i ona može da o postojanju tvrdi samo uslovno, a ne kategorički - ako neke strukture postoje, onda postoje i neke druge strukture čija je egzistencija logička posljedica egzistencije onih prvih. Stoga je on preoblikovao matematičku rečenicu, recimo $R$, čiji dokaz zahtijeva aksiom beskonačnosti ($B$) ili aksiom izbora ($A$) (prim. koje su veoma sporne sa logičke, a pogotovo konstruktivističke tačke gledišta) u uslovnu rečenicu; ne tvrdimo $R$, nego $B \Rightarrow R$, odnosno $A \Rightarrow R$. Ta je uslovna rečenica onda izvodljiva iz logičkih aksioma.

Zahvaljujući logicističkom pristupu, dobili smo mogućnost korišćenja računara svođenjem matematike na logiku, a logike na električne impulse, ali je važna činjenica da bez intuicionističke konstruktivnosti ne bi bilo pojma i primjene algoritma onakvog kakav je danas. Formalistički pristup je na svoj način takođe doprinio sistematizaciji i uopštenju algoritmike, pa na osnovu samo ovog jednog vrlo važnog primjera, uviđamo sav značaj korišćenja svega onoga što predstavlja prednost pojedinog matematičkog pravca. Ovo nas upućuje na činjenicu da se ovi pravci ne razlikuju u tolikoj mjeri da bi onemogućili napredak matematike, već da realno, kroz svojevrsnu međusobnu konkurenciju, omogućuju plodnu matematičku sintezu, pri čemu ipak zadržavaju sve svoje osobenosti.

[17] Rudolf Carnap (1891-1970), njemački filozof

Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo rođen 27. 07. 1871, umro 21. 05. 1953 bio je njemački logičar i matematičar, čiji je rad imao presudan uticaj na temelje matematike. Posebno je poznat po svojoj ulozi u zasnivanju Zermelo–Fraenkelove aksiomatske teorije skupova i dokazu teorema o dobroj uređenosti.

Zermelo je završio Berlinsku Luisenstädtisches Gymnasium 1889. Nastavlja sa studijem matematike, fizike i filozofije na Univerzitetima u Berlinu, Halleu i Freiburgu. Doktorski rad je odbranio 1894. na Univerzitetu u Berlinu, gdje je i nagrađen za svoj rad o varijacionom računu. Ostaje na ovom univerzitetu i postaje asistent Plancku, pod čijim vodstvom počinje da se bavi hidrodinamikom. 1897 odlazi u Göttingen. 1910 imenovan je za šefa odsjeka za matematiku na Univerzitetu u Cirihu, 1926 prelazi na odsjek za matematiku na Univerzitetu u Fraiburgu. Zbog Hitlerovog neodobravanja ovo mjesto napušta 1935, ali na svoje insistiranje sa vraća na tu poziciju nakon II svjetskog rata.

1902 Zermelo publikuje svoj prvi rad iz teorije skupova koji se bavio sabiranjem transfinitnih kardinala. Dvije godine kasnije dokazuje da svaki skup može biti dobro uređen što mu donosi slavu i već 1905. postaje profesor na Univerzitetu u Göttingenu. Aksiom izbora je bio osnova Zermelovog dokaza, a kao što će se to pokazati kasnije, ekvivalentan je teoremu o dobrom uređenju.. Iako mu je ovaj dokaz donio slavu, mnogi matematičari nisu prihvatali ovaj dokaz zbog njegove nekonstruktivnosti. Zermelova reakcija na ove kritike bila je pokušaj dokaza osobine dobre uređenosti koji će biti šire prihvaćen i to mu je uspjelu u radu *Neuer Bewise* koji je publikovan 1908. S jedne strane on je naglasio formalni karakter njegovog novog dokaza, a sa druge strane on objašnjava da njegovi kritičari, pa i ostali matematičari, koriste aksiom izbora kada rade sa beskonačnim skupovima.

U teoriji skupova prvi paradoks se pojavio oko 1903. objavljivanjem Russellovog paradoks. Zermelo je u stvari otkrio sličan skupovni paradoks, ali nije objavio taj rezultat. Umjesto toga to ga je potaklo da napravim prvi pokušaj da se aksiomatizuje teorija skupova i on je taj posao započeo 1905. Nakon što je postavio prvi sistem aksioma on je želio dokazati da su njegovi aksiomi konzistentni prije objavljivanja rada. Međutim, u tome nije uspio. 1908. Zermelo je publikovao svoj aksiomatski sistem iako nije imao dokaza njegove konzistentnosti. Taj sistem se sastojao od sedam aksioma: aksom ekstenzionalnosti, aksiom elementarnih skupova, aksiom separacije, aksiom partitivnog skupa, aksiom unije, aksiom izbora i aksiom beskonačnosti.

# 2. Aksiomatika i algebra skupova

## 2.1 Zermelo-Frenkelov sistem aksioma teorije skupova

Kao što smo vidjeli, jedan od načina izbjegavanja paradoksa je i postavljanje teorije, pa i teorije skupova, na aksiomatsku osnovu.

Prvi aksiomatski sistem teorije skupova dao je *Zermelo*[1] 1908. godine. Uz neke korekcije i nadopunu od strane *Fraenkela*[2] i *Skolema*[3], Zermelov sistem aksioma će biti dopunjen 1922. te je tako dobijen sistem aksioma koga danas nazivamo *ZF-sistem* aksioma za teoriju skupova. U različitim knjigama mogu se naći različiti spiskovi ovih aksioma. To ne treba da zbunjuje jer ZF-sistem aksioma je nezavisan sistem, pa redoslijed ili zamjena neke od aksioma su stvar autora.

Iako ćemo mi ovdje postaviti detaljno ZF-sistem aksioma, treba napomenuti da je u upotrebi i *NGB-sistem* aksioma koga je prvo postavio *von Neumann*[4], a kasnije je dopunjen od strane *Robinsona*[5], *Bernaysa* i *Gödela*.

Za izgradnju formalne ”Teorije skupova” koristimo se iskaznom i predikatskom logikom kao formalnim teorijama. Ovo prije svega znači da koristimo *Modus ponens* i *generalizaciju* kao zakone zaključivanja. Međutim, ovo znači i da koristimo alfabet tih teorija, sa napomenom da ćemo za varijable koristiti i mala i velika slova uobičajenih alfabeta ($a,b,c,\ldots,A,B,C,\ldots, x,y,\ldots,X,Y,\ldots$), sa namjerom da sugerišemo standardna označavanja za skupove (velika slova) i njihove elemente (mala slova), koja smo koristili u dosadašnjem učenju matematike. Ovdje treba istaći da će svaka varijabla, bilo izražena malim ili velikim slovom, biti shvaćena kao ”skup”. Simbol ”$=$” (jednakost) koristićemo za označavanje jednakosti objekata. Pored simbola malih zagrada, ”(” i ”)”, kojima diktiramo redosljed izvršavanja operacija, koristi ćemo i simbole vitičastih zagrada, ”$\{$” i ”$\}$”, za dodatno označavanje skupa. Tako će oznaka $\{a\}$ predstavljati skup čiji je element skup $a$. Takođe novi ”ne-logički” simbol koga ćemo koristiti je binarni predikatski simbol ”$\in$” (”indicija”, ”pripadanje” ili ”članstvo”), gdje ćemo izraz $x \in y$ čitati sa ”skup $x$ je element skupa $y$”. Razlog

[1]Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo, njemački matematičar (1871- 1953)
[2]Adolf Abraham Halevi Fraenkel, njemačko-izraelski matematičar (1891-1965)
[3]Thoralf Albert Skolem, norveški matematičar i logičar (1887-1963)
[4]John von Neuman, austro-ugarski matematičar (1903-1957)
[5]Abraham Robinson, USA matematičar (1918-1974)

uvođenja ovog simbola je proširivanje mogućnosti zapisa, prije svega za atomarne formule, a samim tim i uopšteno za bolju iskazivost i pojednostavljenje formula iskaznog i predikatskog računa. Dakle, ako su $a$ i $b$ termi, tada je $a \in b$ atomarna formula. Ovo pojednostavljenje nema nikakvih štetnih djelovanja. Šta više, dovodi do smanjenja broja primitivnih pojmova pa i broja aksioma u teoriji skupova. Uvođenje ovog simbola ima smisla jer je pripadnost skupa skupu jedan od osnovnih koncepata Teorije skupova, a elementi skoro svih skupova u matematici su opet skupovi. Naprimjer, u analitičkoj geometriji ravni linija je skup tačaka, tačka je uređen par realnih brojeva. Realan broj možemo shvatiti kao niz (a to je skup) racionalnih brojeva. Po dogovoru, umjesto iskaza $\neg(x \in y)$, upotrebljavaćemo oznaku $x \notin y$.

U izlaganju ZF-sistema uvijek ćemo navodit semantički zahtjev aksioma kao i njegov formalni zapis u jeziku matematičke logike. Pri tome ćemo podrazumijevati univerzalnu zatvorenost formula, to jest podrazumijevat ćemo vezanost svih slobodnih promjenljivih u rečenici univerzalnim kvantifikatorima.

Kao što je napomenuto, sve varijable u daljoj teoriji čitat ćemo jednostavno "skup". Pojam "skup" je primitivni pojam Teorije skupova i kao takav ne definišemo ga. Ovo treba razlikovati od standardnog shvatanja pojma skupa kao apsolutnog objekta ili kao što to učimo u ranim fazama školovanja kao "skup je skup i to je to". Prelagodno shvatanje ovog pojma je i dovelo do pojave paradoksa.

Iako nije standardan, treba ga spomenuti u formi aksioma, a to je takozvani *nulti aksiom*, kojim formalno opravdavamo izučavanje ove teorije. On glasi,

**Aksiom — *Nulti aksiom.*** Postoji bar jedan skup.

Obzirom na strogost koju želimo da postignemo postavljanjem ove teorije, opravdanost ovakvog aksioma je jasna jer nije sigurno da to što želimo da izučavamo uopšte postoji. On se može izvesti iz aksioma logike, čak i iz aksioma ovog sistema, što jasno govori da nije neophodan (narušava osobinu nezavisnosti), ali ga ovdje napominjemo iz razloga da domen područja o kojem želimo govoriti nije prazan.

Jednakost dva skupa označavat ćemo uobičajenim logičkim simbolom "$=$", čije formalno značenje uvodimo aksiomom.

**Aksiom 1 — *Aksiom ekstenzionalnosti.*** Dva su skupa jednaka ako i samo ako imaju iste elemente.

$$X = Y \ \Leftrightarrow\ (\forall z)(z \in X \Leftrightarrow z \in Y)\ .$$

Primjetimo odma da su skupovi $\{a,b,c\}$ i $\{c,a,b\}$ prema Aksiomu 1 jednaki. Zaista,

$$a \in \{a,b,c\} \ \Leftrightarrow\ a \in \{c,a,b\}\ ,\ b \in \{a,b,c\} \ \Leftrightarrow\ b \in \{c,a,b\}\ ,\ c \in \{a,b,c\} \ \Leftrightarrow\ c \in \{c,a,b\}\ .$$

Isto tako primjećujemo da su skupovi $\{a,a,b\}$ i $\{a,b,b\}$ jednaki jer vrijedi

$$a \in \{a,a,b\} \ \Leftrightarrow\ a \in \{a,b,b\}\ ,\ b \in \{a,a,b\} \ \Leftrightarrow\ b \in \{a,b,b\}\ .$$

Iz aksioma ekstenzionalnosti direktno slijede dvije fundamentalne osobine skupova.

**Teorem 2.1.1** U zapisu proizvoljnog skup nisu bitni
- redosljed navođenja elemenata tog skupa i
- ponavljanje nekog od elemenata tog skupa.

Činjenicu o nejednakosti dva skupa zapisivat ćemo sa $A \neq B$, a ona znači da postoji element koji se ne nalazi u oba skupa istovremeno,

$$A \neq B \ \Leftrightarrow\ (\exists z)(z \notin A \veebar z \notin B)\ .$$

Dakle, jednaki skupovi imaju jednake elemente, ali tu treba voditi računa o direktnom i indirektnom "članstvu" u nekom skupu. Kao primjer posmatrajmo Veliku Britaniju koja je država od četiri članice,

$$\text{Velika Britanija} = \{\text{Engleska}, \text{Škotska}, \text{Sjeverna Irska}, \text{Vels}\} .$$

U slučaju pripadnosti Evropskoj fudbalskoj federaciji (UEFA), sve četiri članice joj pripadaju "direktno",

$$UEFA = \{\text{Njemačka}, \text{Francuska}, \text{Engleska}, \text{Škotska}, \text{Sjeverna Irska}, \text{Vels}, \ldots\} ,$$

ali u slučaju pripadnosti Evropskoj Uniji (EU) prije Brexita, one su imale "indirektnu" pripadnost,

$$EU = \{\text{Njemačka}, \text{Francuska}, \text{Velika Britanija}, \ldots\}$$

jer je "samo" Velika Britanija bila pripadnica EU. U kontekstu ovih zemalja jasno je da $UEFA \neq EU$ jer nemaju iste elemente (iako ima i drugih razloga za ovu nejednakost, koja za ovaj primjer nije važna).

Za jednakost skupova jednostavno se dokazuje (koristeći poznate tautologije) da vrijede sljedeće osobine.

**Teorem 2.1.2** Za proizvoljne skupove $X$, $Y$ i $Z$ vrijedi,
- $X = X$.
- Ako je $X = Y$, onda je $Y = X$.
- Ako je $X = Y$ i $Y = Z$, onda je $X = Z$.

**Aksiom 2 — *Aksiom praznog skupa.*** Postoji skup koji nema niti jedan element.

$$(\exists S)(\forall x) x \notin S .$$

Skup čije postojanje smo uveli gornjim aksiomom, nazivat ćemo *prazan skup* i za njegovo označavanje koristit ćemo oznaku "$\varnothing$". Prostim korištenjem Aksioma 1, jednostavno je uvjeriti se da je takav skup jedinstven. Zaista, ako bi postojala dva takva skupa $\varnothing_1$ i $\varnothing_2$ i pri tome da je $\varnothing_1 \neq \varnothing_2$, tada bi prema aksiomu ekstenzionalnosti postojao element koji nije istovremeno u oba skupa, to jest koji pripada jednom od tih skupova, a ne pripada drugom. Međutim, to bi se protivilo definiciji praznog skupa, odnosno činjenici da oba ova skupa nemaju elemenata.

**Aksiom 3 — *Aksiom para.*** Neka su $X$ i $Y$ proizvoljni skupovi. Postoji skup $Z$ koji sadrži tačno $X$ i $Y$ kao elemente.

$$(\exists Z)(\forall z)(z \in Z \Leftrightarrow (z = X \vee z = Y)) .$$

Skup $Z$ čije nam postojanje garantuje Aksiom 3 je u opštem slučaju dvoelementni skup $\{X,Y\}$ koga nazivamo *neuređen par* skupova $X$ i $Y$, a taj naziv proizilazi iz činjenice da je $\{X,Y\} = \{Y,X\}$. Ako je pri tome još i $X = Y$, onda imamo $\{X,Y\} = \{X,X\} = \{X\}$ i ovakav skup nazivamo *singleton* ili *jednoelementni skup*.
Specijalno, iz egzistencije praznog skupa slijedi da postoji i skup čiji je element prazan skup. Zaista, na osnovu Aksioma 3 i Aksioma 1, $\{\varnothing,\varnothing\} = \{\varnothing\}$ je skup. Jasno je pri tome da $\varnothing \neq \{\varnothing\}$.

Za zadate skupove $X$ i $Y$ postojanje ovakvog skupa koga nam garantuje aksiom para je jedinstveno. Zaista, pretpostavimo da pored skupa $Z$ postoji i skup $W$ sa osobinom iz aksioma para,

$$(\forall z)(z \in W \Leftrightarrow (z = X \vee z = Y)) .$$

Za proizvoljan skup $z$, neka je $z \in Z$. To je onda ekvivalentno sa time da je $z = X \vee z = Y$. Ovo je opet ekvivalentno sa time da je $z \in W$. Dakle vrijedi,

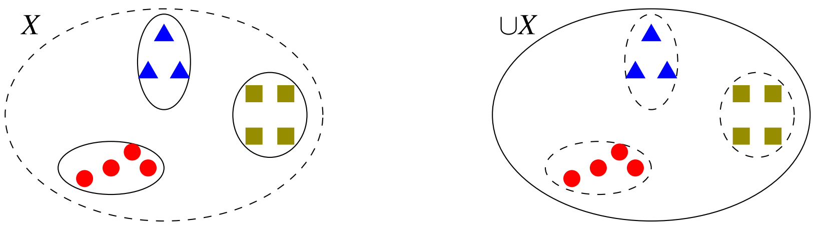
$$(\forall z)(z \in Z \Leftrightarrow z \in W) ,$$

što na osnovu aksioma ekstenzionalnosti znači jednakost skupova, $Z = W$.

Na osnovu ova prva tri aksioma imamo prazan skup i u mogućnosti smo napraviti singleton i skup sa dva elementa, ali još uvijek ne možemo napraviti skup sa tri elementa, to jest za zadate skupove $x, y$ i $z$, postoji li skup $\{x,y,z\}$? Pozitivan odgovor na ovo pitanje obezbijedit će nam sljedeći aksiom.

**Aksiom 4 — *Aksiom unije.*** Neka je $X$ proizvoljan skup. Postoji skup $U$ koji sadrži sve elemente elemenata od $X$.

$$(\exists U)(\forall z)(z \in U \Leftrightarrow (\exists Y)(Y \in X \wedge z \in Y)) \ .$$




Slika 2.1: Unija sadrži sve elemente elemenata skupa.

Skup $U$ koga smo uveli gornjom aksiomom je, na osnovu Aksioma 1, jedinstven i za njega ćemo koristiti oznaku $\cup X$. Ako je $X$ dvočlani skup, $X = \{A, B\}$, onda ćemo koristiti oznaku $A \cup B$. Neka su $A$ i $B$ proizvoljni skupovi. Tada vrijedi

$$X = \{A,B\} \neq \cup X = A \cup B \ .$$

Ako je $X = \{A\}$, tada je $\cup X = A$ i šta više, $\cup\varnothing = \varnothing$. Iz aksioma unije direktno slijedi i osobina $\varnothing \cup A = A$, za proizvoljan skup $A$.

Na osnovu ova četiri aksioma imamo egzistenciju sljedećih skupova:

$$\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\dots$$

Da odgovorimo sada i na postavljeno pitanje iza trećeg aksioma. Neka su dati skupovi $x, y$ i $z$. Na osnovu aksioma para, postoje skupovi $\{x,y\}$ i $\{z\}$, a još jednom primjenom tog aksioma utvrđujemo i postojanje skupa $\{\{x,y\},\{z\}\}$. Sada na osnovu aksioma unije imamo da postoji skup čiji su elementi, svi elementi elemenata posljednjeg skupa, to jest postoji skup $\{x,y,z\}$.

Prije narednog aksioma uvedimo novi simbol našeg alfabeta i za njega vezan novi pojam Teorije skupova. Iz aksioma ekstenzionalnosti, ako ga zapišemo u formi,

$$X = Y \iff (\forall z)\ ((z \in X \ \Rightarrow \ z \in Y) \wedge (z \in Y \ \Rightarrow \ z \in X)) \ ,$$

jasno je da iz desne strane ekvivalencije možemo izdvojiti samo jedan član konjukcije, a to onda vodi ka nekoj novoj osobini, koja je u vezi sa jednakošću skupova.

**Definicija.** *Neka su $A$ i $B$ proizvoljni skupovi. Kažemo da je $A$ podskup od $B$, što zapisujemo sa $A \subseteq B$, ako i samo ako vrijedi da je svaki element skupa $A$ ujedno i element skupa $B$, to jest*

$$A \subseteq B \ \Leftrightarrow \ (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B) \ .$$

**Aksiom 5 — *Aksiom o partitivnom skupu.*** Ako je $X$ proizvoljan skup, postoji skup $P$ čiji su elementi svi podskupovi skupa $X$.

$$(\exists P)(\forall z)(z \in P \Leftrightarrow z \subseteq X) \ .$$

Jedinstvenost ovim aksiomom uvedenog skupa $P$ je jednostavno dokaziva koristeći Aksiom 1. Za njegovo označavanje uobičajeno ćemo koristiti oznaku $\mathcal{P}(X)$, a zvat ćemo ga *partitivni skup skupa* $X$.

Uočimo da je pomoću Aksioma 5 uveden skup svih podskupova nekog skupa, ali da nam nije poznato postojanje niti jednog konkretnog podskupa datog skupa. Takav skup (podskup) očigledno mora imati karakteristiku da "sakuplja" elemente iz datog skupa, a sa zajedničkom im nekom osobinom. Naravno, upravo ovakvo "sakupljanje" objekata na osnovu neke njima zajedničke osobine, čini suštinu pojma skupa, pa svaka formalna teorija koja ima za cilj da opiše intuitivnu teoriju skupova, mora izražavati ovaj semantički zahtjev. S druge strane, nekritičko i previše slobodno primjenjivanje ovog zahtjeva je i dovodilo do pojave paradoksa u naivnoj teoriji skupova. Da bi pokušali pomiriti ova dva zahtjeva, uvodimo sljedeći aksiom.

**Aksiom 6 — *Aksiom podskupa (komprehenzije, izdvajanja).*** Neka je $A$ zadani skup i $P(x)$ predikat koji za svako $x \in A$ ima smisla (za svako $x \in A$, $P(x)$ je iskaz). Tada postoji skup $B$ čiji su elementi oni i samo oni elementi iz skupa $A$ za koje je predikat $P$ tačan.

$$(\exists B)(\forall x)(x \in B \Leftrightarrow (x \in A \wedge P(x))) \ ,$$

gdje je $P(x)$ proizvoljan predikat koji ne sadrži slobodnu promjenljivu $B$.

Kada varijabli $x$ damo neku vrijednost iz oblasti definisanosti predikata $P(\cdot)$, on postaje iskaz koji dakle može biti ili tačan ili netačan. Neka je $A$ oblast definisanosti predikata $P(x)$. Simbolikom

$$\{x \mid x \in A \wedge P(x)\} \ \text{ili} \ \{x \in A \mid P(x)\} \ ,$$

označavat ćemo skup svih onih elemenata iz skupa $A$ za koje je predikat $P(x)$ tačan. To znači

$$a \in \{x \in A \mid P(x)\} \iff a \in A \ \wedge \ \tau(P(a)) = \top \ .$$

Neka je $P(x)$ proizvoljan predikat arnosti 1, naprimjer:
- $P(x)$ : $1 < x \leq 2$,
- $P(x)$ : $x$ je paran broj,
- $P(x)$ : $x$ je jednakostraničan trougao.

Neka je $A = \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ skup realnih brojeva). Tada pomoću Aksioma 6 su dobro definisani i skupovi

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\} \ , \ B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ \text{je paran broj}\} \ .$$

Ako je $A$ skup svih trouglova u ravni, onda je na osnovu Aksioma 6 skup i

$$B = \{x \in A \mid x \ \text{je jednakostraničan trougao}\} \ .$$

Jasno je da za svaki predikat $P(x)$ u Aksiomu 6 imamo po jedan aksiom, pa se za ovaj aksiom kaže da predstavlja "šemu aksioma". Međutim i pored toga, Aksiomom 6 nije moguće konstruisati skup svih skupova, odnosno "univerzalni skup", pa su time otklonjeni svi navedeni paradoksi koji su se pojavljivali u naivnoj teoriji skupova. Dakle, uloga Aksioma 6 je konstruisati što više skupova, ali pri tome izbjeći bar poznate paradokse naivne teorije skupova.

Neka je sa $D$ označen skup svih država. Za $d \in D$ definišimo osobinu $P(d)$ sa

$$P(d) \ : \ d \ \text{ima najmanje 25 sastavnih dijelova} \ .$$

Kako za svaku državu možemo ispitati tačnost predikata $P(\cdot)$, onda je skup $L = \{d \in D | \, P(d)\}$ dobro definisan. USA ima 50 država, Švicarska ima 26 kantona, Indija ima 25 država i 7 teritorija, onda imamo

$$\text{USA}, \text{Indija}, \text{Švicarska} \in L \ , \ \ \text{BiH}, \text{Austrija} \notin L \,.$$

Ako formiramo skup $E = \{d \in EU \mid d \text{ koristi euro}\}$, tada su Njemačka, Holandija $\in E$, ali Velika Britanija $\notin E$. Međutim, i Crna Gora koristi euro, ali nije članica EU, tako da Crna Gora $\notin E$.

Aksiomom 6 smo uveli način zapisivanja skupa

$$A = \{x \in U \mid x \text{ ima osobinu } P\} \,.$$

Pored ovog načina zapisivanja skupa, navođenjem osobine, koristit ćemo i način zapisivanja pojedinačnih elemenata skupa, nabrajanjem njegovih elemenata, $A = \{a_1, a_2, .., a_n\}$.

Sa ovih prvih 6 aksioma moguće je uvesti sve pojmove sa kojima se služimo u "svakodnevnoj" matematici. Ono što se može primjetiti, da oni daju samo konačne skupove, to jest beskonačan skup nije moguće konstruisati pomoću njih. Zato uvedimo sljedeći aksiom koji će obezbijediti postojanje i ovakvih skupova.

**Aksiom 7 — *Aksiom beskonačnosti.*** Postoje beskonačni skupovi.

$$(\exists S)(\varnothing \in S \wedge (\forall x)(x \in S \Rightarrow x \cup \{x\} \in S)) \,.$$

Ako je $X$ skup, onda skup $X^+ = X \cup \{X\}$ nazivamo sljedbenikom skupa $X$. Sa ovim terminom Aksiom 7 garantuje postojanje skupa koji sadrži prazan skup i sljedbenika svakog svog elementa. Skup koji zadovoljava uslov aksioma beskonačnosti se naziva *induktivan skup*. Sa ovom terminologijom, aksiom beskonačnosti nam tvrdi da postoji bar jedan induktivan skup. Svaki takav skup onda sadrži sljedeće skupove: $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots$

**Teorem 2.1.3** Postoji najmanji induktivni skup.

Najmanji induktivni skup mora sadržavati element $\varnothing$. Označimo taj element sa

$$0 \stackrel{def}{=} \varnothing \,.$$

Kako taj skup sadrži sljedbenika svakog svog elementa, izvršimo sljedeća označavanja:

$$1 \stackrel{def}{=} 0^+ = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} \ .$$

$$2 \stackrel{def}{=} 1^+ = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \ .$$

$$3 \stackrel{def}{=} 2^+ = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \ .$$

Nastavimo li dalje sa ovim označavanjem i rezonovanjem, dobijamo najmanji induktivni skup koga označavamo sa $\omega$. Skup $\omega$ bez elementa 0 nazivamo skup prirodnih brojeva, a njegove elemente nazivamo prirodnim brojevima i označavat ćemo ga uobičajeno oznakom $\mathbb{N}$. Na skupu $\omega$ uvodimo jedno jako bitno svojstvo koga nazivamo *princip matematičke indukcije*, a koje glasi:
Neka je $X \subseteq \omega$ za koga vrijedi: $0 \in X$ i za svako $n \in X$ je i $n^+ \in X$. Tada je $X = \omega$.
Ovaj princip nam omogućava i drugi način izvođenja dokaza osim deduktivnog. Naime, ako neko svojstvo $P$ dovedemo u vezu sa prirodnim brojevima, $P = P(n)$ za $n \in \mathbb{N}$ i ako to svojstvo ima osobinu da je tačno za $n = 1$ i da ako je tačno za neko $n \in \mathbb{N}$ onda je tačno i za $n+1$, tada zaključujemo da je ono tačno za sve $n \in \mathbb{N}$. Ovakav način zaključivanja (dokazivanja) nazivamo induktivni način zaključivanja i u njegovoj osnovi je princip matematičke indukcije.

Sa sljedeća dva aksioma ćemo proširiti ali i dodatno ograničiti mogućnosti pravljenja novih skupova.

**Aksiom 8 — *Aksiom zamjene.*** Funkcija preslikava skup u skup.

$$(\forall A)((\forall x\in A)(\exists! y)P(x,y)\Rightarrow(\exists z)(\forall x\in A)(\exists y\in z)P(x,y))\ ,$$

za sve predikate $P(x,y)$ koji nemaju slobodnu promjenljivu $A$.

Prostije rečeno, gornji aksiom nam kaže sljedeće: Neka je $A$ zadani skup i $P(x,y)$ predikat arnosti 2 koji ima osobinu da za proizvoljno $a\in A$, postoji jedinstven $b$, takav da je $\tau(P(a,b))=\top$. Tada postoji jedinstven skup $B$ čiji su elementi svi skupovi $y$ za koje postoji $x\in A$, takav da je $\tau(P(x,y))=\top$.

"Naivno" tumačenje gornjeg aksioma je: Ako je na skupu $A$ definisana funkcija $f$ i za svako $a\in A$ je $f(a)$ skup, tada je $B=\{f(a)\mid a\in A\}$ takođe skup. Ovaj aksiom je Frenkel dodao na Zermelov sistem aksioma i on kao i Aksiom 6. predstavlja šemu aksioma.

Sa ovim aksiomom smo proširili mogućnosti gradnje novih skupova, a sada ćemo napraviti i dodatna ograničenja.

**Aksiom 9 — *Aksiom fundacije, aksiom regularnosti* .** Za svaki neprazan skup $X$ postoji bar jedan njegov element koji nema zajedničkih elemenata sa $X$,

$$X\neq\varnothing\Rightarrow(\exists Y\in X)(\forall t)\neg(t\in X\wedge t\in Y)\ .$$

Aksiom fundacije se može iskazati i u sljedećoj ekvivalentnoj formi:
*Neka je $X$ proizvoljan neprazan skup. Postoji element $y\in X$, takav da za svako $z\in X$ vrijedi $z\notin y$ ili ekvivalentno, svaki neprazan skup $X$ ima element $y$, takav da $y$ i $X$ nemaju zajedničkih elemenata.*

Ovaj drugi oblik smo iskazali jer je "bliži" shvatanju šta se njime želi iskazati. Tako imamo da se postojeći $y\in X$ naziva *minimalni element* skupa $X$ u odnosu na relaciju " $\in$ ". Ako posmatramo skup

$$A=\{0,\{0\},\{1,2\},\{0,\{1,2\}\},\{\{0\}\}\}\ ,$$

on ima dva minimalna elementa i to 0 i $\{1,2\}$ jer niti jedan element skupa $A$ nije element nekog od ovih skupova (1 i 2 nisu elementi skupa $A$). Jasno je da minimalni element ne mora biti jedinstven, ali ako on ima i osobinu da je element svakog od elemenata posmatranog skupa, onda ga nazivamo *najmanji element*. Tako imamo da je skup $\{\varnothing\}$, najmanji element skupa

$$\{\{\varnothing\},\{\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\},\{\{\varnothing\}\}\}\ .$$

U kontekstu minimalnog elementa u odnosu na relaciju pripadnosti, za aksiom fundacije vrijedi naredna tvrdnja.

**Teorem 2.1.4** Aksiom fundacije vrijedi ako i samo ako svaki neprazan skup ima minimalan element u odnosu na relaciju pripadnosti.

Glavna ideja aksioma fundacije jeste dati pravila za formiranje univerzuma skupova, to jest zabraniti "loše" skupove. Prema ovom aksiomu naprimjer imamo

- $\{\{\{x\}\}\}$ ; Pravljenje skupova od skupova je dozvoljeno.
- $\{x,\{x\},\{x,\{x\}\}\}$ ; Skupovi sa "uporedivim" elementima ($x\in\{x\}$) su dozvoljeni.
- $\{x,y\}$, gdje je $x\notin y$ i $y\notin x$ ; Skupovi sa "neuporedivim" elementima su dozvoljeni.
- $\{x,y\}$, gdje je $x\in y$ i $y\in x$: "Cikličnost" nije dozvoljena, to jest ovakvi "skupovi" nisu skupovi.
- $\{x_1,x_2,\ldots\}$, gdje je $x_2\in x_1$, $x_3\in x_2,\ldots$ ; "skupovi" koji formiraju opadajući niz nisu dozvoljeni.

Sve do sada nismo se suočili sa nekim $x$ koji ima osobinu $x\in x$. Željeli smo da ostanemo dovoljno daleko od takvih kreacija jer znamo do čega one dovode (Russellov paradoks), bar dotle dok ne možemo bolje razumjeti njihovu problematiku. Sada je trenutak da više od takvih kreacija ne bježimo jer nam za to služi upravo aksiom regularnosti.

**Teorem 2.1.5** Ne postoji skup koji sadrži sebe samog kao element, to jest ne postoji skup $x$ takav da je $x \in x$.

**Dokaz** : Neka je $x$ proizvoljan skup, tada je $X = \{x\}$ takođe skup. Pretpostavimo da $x \in x$. Sada imamo $x \in x \wedge x \in X$. Međutim, tada imamo da za svaki element $y$ skupa $X$ (a takav je samo $x$) vrijedi $y \in x \wedge y \in X$, što je u suprotnosti sa aksiomom regularnosti. Dakle, za svaki skup $x$ vrijedi $x \notin x$. □

Upravo ova činjenica iz gornjeg teorema dovodi do veoma bitnog fakta ali i ograničenja u ovako konstruisanoj Teoriji skupova. Iskazat ćemo je tvrdnjom.

**Teorem 2.1.6 — Russell.** Ne postoji skup svih skupova.

**Dokaz** : Neka je $X$ proizvoljan skup. Konstruišimo skup $Y = \{x \in X \mid x \notin x\}$. Tvrdimo sada da $Y \notin X$. Zaista, ako bi bilo $Y \in X$, prema Teoremu 2.1.5 imamo da $Y \notin Y$, a to bi prema definiciji skupa $Y$ onda značilo da $Y \in Y$ što predstavlja očiglednu kontradikciju. Dakle, $Y \notin X$.
Ovime smo pokazali da uzevši proizvoljan skup, uvijek možemo konstruisati skup koji mu ne pripada. To bi onda vrijedilo i za ”skup svih skupova”, a time to onda ne može biti skup svih skupova. □

Iako možemo pričati o sveukupnosti skupova, gornje tvrđenje nam govori da ne postoji skup kome pripadaju svi mogući skupovi. Drugačije rečeno, to čemu pripadaju svi mogući skupovi nije skup, ali možemo koristiti neku drugu terminologiju kao ”sveukupnost skupova”, ”kolekcija skupova” i slično.

U iskazu Teorema 2.1.5 kažemo da ”ne postoji skup koji sadrži samog sebe ...”. Međutim, jasnije bi bilo reći da ”ono što sadrži sebe samog kao element” nije skup, to jest nije skup u našoj aksiomatski izgrađenoj teoriji. Ako posmatramo ”ono” što sadrži sve skupove koji imaju bar jedan element, onda bi to sadržalo i samog sebe kao element (jer sadrži bar skup $\{\varnothing\}$), a to onda nije skup, kako tvrdi Teorem 2.1.5, odnosno Aksiom 9 ne dozvoljava njegovu konstrukciju.

Aksiom 9. zbilja isključuje mnoge ”patološke” skupove, ali takođe je mnoge stvari moguće dokazati ne koristeći ga. Formalni sistem koji se koristi aksiomama od 1-8 često se obilježava sa $ZF^-$, dok svih izloženih devet aksioma predstavlja $ZF$ teoriju skupova.

Mada je ZF teorija skupova uklonila očigledne paradokse naivne teorije skupova, ona posjeduje i svoje nedostatke. Naprimjer, aksiomi specifikacije i zamjene oslanjaju se na pojam predikata kao elementarnog pojma, što u principu nije sasvim korektno. Drugo, ovakva teorija skupova potpuno zabranjuje da se govori o izvjesnim kolekcijama objekata kao skupovima. Primjeri za to su kolekcija svih skupova koji ne sadrže sami sebe kao element, kolekcija svih skupova, kolekcija svih jednočlanih skupova, kolekcija svih funkcija, kolekcija svih kardinalnih brojeva itd.

Na kraju pozabavimo se jednim fundamentalnim pitanjem: Da li je ZF sistem aksioma konzistentan? U stvari, znamo li zasigurno da ZF sistem, kako smo ga uveli, nikada neće dati neku kontradikciju? Ako jednog dana stvarno naiđemo na kontradikciju koja proizilazi iz tih aksioma, onda možemo odgovoriti: „Ne, ZF sistem aksioma nije konzistentan, jer smo otkrili kontradikciju koja proizilazi iz tih aksioma!”. Ako se takva proturječnost dogodi morat ćemo nešto mijenjati s postavljenim sistemom aksioma da ispravimo grešku. Međutim, dokle god se ne dogodi neki novi paradoks, odgovor na ovo pitanje je: „Mi ne znamo za sigurno da li ZF sistem aksioma je konzistentan.”.
Pokazalo se nemogućim dokazati ili opovrgnuti da je ZF sistem aksioma konzistentan. To je „priroda zvijeri”, da tako kažemo. Budući da se sve novi i novi oblici matematike otkrivaju svaki dan, moguće je da sljedeće sedmice, za sto godina ili hiljadu godina netko otkrije da je ZF sistem nekonzistentan. „Teorija skupova” je, kao što sam naziv kazuje, samo teorija. Po svojoj prirodi, sve

teorije žele objasniti novootkrivene, do sada nepoznate činjenice. ZF teorija se po tome ne razlikuje od ostalih teorija. Kao temelj moderne matematike, ZF aksiomatski sistem za Teoriju skupova za sada čini da služi svojoj svrsi. Šta više, slobodno možemo reći da je to najbolja teorija koju imamo danas, iako nije isključeno da za neko vrijeme možemo otkriti bitne načine da je poboljšamo.

## 2.2 Operacije sa skupovima

Većina stvari ove sekcije je poznata čitaocu. Mnoge od tih stvari na ovom mjestu ćemo uvesti strogo precizno, držeći se naravno aksiomatike koju smo upravo uveli, ali će mnogi detalji takođe biti i preskočeni i ostavljeni čitaocu da prođe taj put od ZF teorije do dokaza da su novouvedeni objekti zaista dobro definisani. Prevashodni cilj ove sekcije je dakle, da fiksiramo i usvojimo notaciju i terminologiju koja će u daljem biti korištena.

Aksiom para nam je obezbjedio postojanje dvoelementnog skupa. Da li postoje skupovi sa više elemenata?

**Teorem 2.2.1** Neka je $n$ proizvoljan prirodan broj i neka su $X_1, X_2, \dots, X_n$ skupovi. Tada postoji skup čiji su elementi upravo ti skupovi, to jest postoji skup $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

**Dokaz** : Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $X_1, \dots, X_n$ proizvoljni skupovi. Na osnovu Aksioma 3, postoje skupovi $\{X_1, X_2\}$ i $\{X_3\}$. Na osnovu Aksioma 4, primjenjenom na skup $S = \{\{X_1, X_2\}, \{X_3\}\}$, postoji skup

$$\cup S = \{X_1, X_2\} \cup \{X_3\} = \{X_1, X_2, X_3\} \ .$$

Postupak sada ponavljamo primjenjujući aksiom unije na skup $L = \{\{X_1, X_2, X_3\}, \{X_4\}\}$. U konačno mnogo koraka, primjenjujući istu šemu, dolazimo do postojanja skupa

$$\{X_1, X_2, \dots, X_{n-1}\} \cup \{X_n\} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\} \ ,$$

što je i trebalo dokazati. □

Za obilježavanje skupova u daljem ćemo uglavnom koristiti velika slova poznatih nam alfabeta $(A, B, C, \dots, X, Y, Z, \dots)$ ili velika slova sa indeksima ($A_i$ $(i \in I)$, $B_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ i sl.). Ako su $A_i$ $(i \in I)$ proizvoljni skupovi, skup $\{A_i \mid i \in I\}$ uobičajeno ćemo nazivati *familija skupova*, a skup $I$, *indeksni skup* ili *skup indeksa* date familije.

Kao što smo vidjeli u aksiomatici, aksiom unije nam je garantovao postojanje unije skupa $A$,

$$\cup A = \{x \mid (\exists X \in A)\ x \in X\} \ ,$$

čije postojanje sada sa ovom notacijom možemo obrazložiti i aksiomom izdvajanja.

**Lema 2.2.2** Unija je jedinstveno određen skup.

**Dokaz** : Neka su za dati skup $A$, $\cup_1 A$ i $\cup_2 A$ njegove različite unije. To bi značilo na osnovu aksioma akstenzionalnosti da postoji $x \in \cup_1 A$, takav da $x \notin \cup_2 A$. Iz činjenice da $x \in \cup_1 A$ imamo da postoji $X \in A$, takav da je $x \in X$. S druge strane, iz $x \notin \cup_2 A$ imamo

$$\neg(\exists Y \in A) x \in Y \iff (\forall Y \in A) x \notin Y \ ,$$

a to bi i za postojeći $X$ moralo vrijediti, to jest $x \notin X$ što predstavja kontradikciju. □

Ako je $A = \{X, Y\}$, tada ćemo za uniju dva skupa koristiti oznaku $\cup A = X \cup Y$.

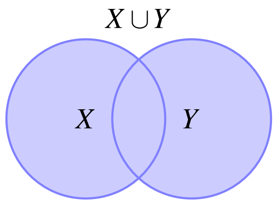
■ **Primjer 2.1** Unija skupova predstavlja sveukupnost svih elemenata skupova koje uniramo. Neka je $A = \{X, Y\}$ gdje su $X = \{1, 2, 3, 4\}$ i $Y = \{a, b, c, d, e\}$. Tada je $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, a, b, c, d, e\}$. ■

Neka je $L = \{A_i \mid i \in I\}$, tada za uniju skupa $L$ koristimo oznaku $\bigcup_{i \in I} A_i$, gdje je $I$ neki skup indeksa. U slučaju konačnosti indeksnog skupa, naprimjer $I = \{1, 2, \dots, n\}$, koristimo oznaku $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, a ako je $I = \mathbb{N}$, onda koristimo oznake $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ ili $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Pripadnost nekog elementa uniji skupova proizilazi iz samog aksioma unije i iskazujemo to sa sljedećom ekvivalencijom:

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff (\exists i_0 \in I)\ x \in A_{i_0} \ .$$

Skupove grafički najčešće predstavljamo pomoću *Vennovih* [6] *dijagrama* koji se još nazivaju i *skupovni dijagrami*. Njima izražavamo hipotetičke mogućnosti logičkih relacija između konačnih kolekcija skupova. Konstruišemo ih pomoću jednostavnih geometrijskih likova (krug, elipsa, pravougaonik i sl.) u ravni, gdje unutrašnjost tih likova simbolički reprezentuje elemente skupa. Kako pod unijom podrazumijevamo sveukupnost elemenata skupova koje uniramo, Vennov dijagram unije dva skupa predstavljen je na slici 2.2.




Slika 2.2: Vennov dijagram unije dva skupa; $A \cup B$

Najbitnije osobine operacije unije iskazujemo narednom tvrdnjom.

**Teorem 2.2.3** Neka su $A, B$ i $C$ skupovi i $U$ univerzum. Tada vrijedi:

1. $A \cup B = B \cup A$. (Zakon komutativnosti za uniju)
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. (Zakon asocijativnosti za uniju)
3. $A \cup A = A$. (Zakon idempotentnosti za uniju)
4. $A \cup \varnothing = A$.
5. $A \cup U = U$.

**Dokaz** :

1. Neka su $A$ i $B$ proizvoljni skupovi i neka je $x \in A \cup B$ proizvoljan. Prema definiciji unije imamo $x \in A \vee x \in B$. Kako disjunkcija zadovoljava zakon komutativnosti ($p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$), posljednje je ekvivalentno sa $x \in B \vee x \in A$, što opet prema definiciji unije znači $x \in B \cup A$. Dakle, skupovi $A \cup B$ i $B \cup A$ imaju iste elemente, te na osnovu aksioma ekstenzionalnosti su jednaki.
2. Neka su $A, B$ i $C$ proizvoljni skupovi. Izaberimo proizvoljno $x \in A \cup (B \cup C)$. Tada imamo:

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cup C) &\iff x \in A \vee x \in B \cup C && \text{(definicija unije)} \\ &\iff x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) && \text{(definicija unije)} \\ &\iff (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C && \text{(asoc. disjunkcije)} \\ &\iff x \in (A \cup B) \vee x \in C && \text{(definicija unije)} \\ &\iff x \in (A \cup B) \cup C \ . && \text{(definicija unije)} \end{aligned}$$

   Na osnovu aksioma ekstenzionalnosti skupovi $A \cup (B \cup C)$ i $(A \cup B) \cup C$ su jednaki.
3. Neka je $A$ proizvoljan skup i neka je $x \in A \cup A$ proizvoljan.

$$\begin{aligned} x \in A \cup A &\iff x \in A \vee x \in A && \text{(definicija unije)} \\ &\iff x \in A \ . && \text{(tautologija } p \vee p \Leftrightarrow p) \end{aligned}$$

   Na osnovu aksioma ekstenzionalnosti skupovi $A \cup A$ i $A$ su jednaki.

[6] John Venn (1834-1923)-Engleski logičar i filozof

4. Neka je $A$ proizvoljan skup i neka je $x \in A \cup \varnothing$ proizvoljan.

$$\begin{aligned} x \in A \cup \varnothing &\iff x \in A \vee x \in \varnothing && \text{(definicija unije)} \\ &\iff x \in A \vee \bot && \text{(prazan skup nema elemenata)} \\ &\iff x \in A \;. && \text{(tautologija } p \vee \bot \Leftrightarrow p) \end{aligned}$$

Na osnovu aksioma ekstenzionalnosti skupovi $A \cup \varnothing$ i $A$ su jednaki.

5. Neka je $A$ proizvoljan skup i $U$ univerzum. Neka je $x \in A \cup U$ proizvoljan.

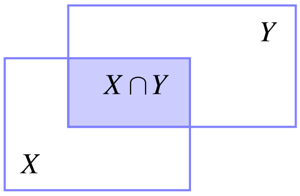
$$\begin{aligned} x \in A \cup U &\iff x \in A \vee x \in U && \text{(definicija unije)} \\ &\iff x \in A \vee \top && \text{(svi posmatrani skupovi su iz univerzuma)} \\ &\iff \top && \text{(tautologija } p \vee \top \Leftrightarrow \top) \\ &\iff x \in U \;. && \text{(jedina sigurna istina } \top \Leftrightarrow x \in U) \end{aligned}$$

Na osnovu aksioma ekstenzionalnosti skupovi $A \cup U$ i $U$ su jednaki.

□

**Definicija 2.2.1** Neka je $A$ proizvoljan skup i neka je $L \subseteq \mathcal{P}(A)$. Presjek skupa $L$, u oznaci $\cap L$, je skup koji se sastoji od onih i samo onih elemenata koji su elementi u svakom skupu iz $L$, to jest

$$\cap L = \{x \mid (\forall Y)\ (Y \in L \ \Rightarrow\ x \in Y\} \;.$$




Slika 2.3: Vennov dijagram presjeka dva skupa; $A \cap B$.

Za razliku od unije koja je uvedena aksiomatski, činjenicu da je "presjek" dobro definisan skup, ostavljamo čitaocu da je dokaže koristeći uvedene aksiome. Za vježbu je ostavljen i dokaz sljedeće tvrdnje.

**Lema 2.2.4** Presjek je jedinstveno određen skup.

Ako je $L = \{X,Y\}$, tada skup $\cap L$ zapisujemo sa $X \cap Y$.

■ **Primjer 2.2** Presjek skupova čine elementi koji su zajednički svim skupovima koje "presjecamo". Neka je $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n \leq 6\}$ i $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \leq 50\}$. Tada je

$$A = \{2,3,4,5,6\}\ ,\ B = \{1,2,3,4,5,6,7\} \text{ te je } A \cap B = \{2,3,4,5,6\}$$

■

Slično kao i kod unije, ako je $L = \{A_i \mid i \in I\}$, presjek skupa $L$ zapisujemo sa $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$, odnosno za konačan i beskonačan presjek koristimo oznake

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \ , \ \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \;.$$

Pripadnost elementa proizvoljnom presjeku skupova izražavamo sa:

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff (\forall i \in I)\ x \in A_i \;.$$

Narednim tvrđenjem ističemo neke od najvažnijih skupovnih jednakosti vezanih za operaciju peresjeka skupova.

**Teorem 2.2.5** Neka su $A, B$ i $C$ skupovi i $U$ univerzum. Tada vrijedi:

1. $A \cap B = B \cap A$. (Zakon komutativnosti za presjek)
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$. (Zakon asocijativnosti za presjek)
3. $A \cap A = A$. (Zakon idempotentnosti za presjek)
4. $A \cap \varnothing = \varnothing$.
5. $A \cap U = A$.

**Dokaz** :

1. Neka su $A$ i $B$ proizvoljni skupovi i neka je $x \in A \cap B$ proizvoljan. Prema definiciji unije imamo $x \in A \wedge x \in B$. Kako konjunkcija zadovoljava zakon komutativnosti ($p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$), posljednje je ekvivalentno sa $x \in B \wedge x \in A$, što opet prema definiciji unije znači $x \in B \cap A$. Na osnovu aksioma ekstenzionalnosti skupovi $A \cap B$ i $B \cap A$ imaju iste elemente, te su jednaki.
2. Neka su $A, B$ i $C$ proizvoljni skupovi. Izaberimo proizvoljno $x \in A \cap (B \cap C)$. Tada imamo:

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cap C) &\iff x \in A \wedge x \in B \cap C && \text{(definicija presjeka)} \\ &\iff x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) && \text{(definicija presjeka)} \\ &\iff (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C && \text{(asoc. konjunkcije)} \\ &\iff x \in (A \cap B) \wedge x \in C && \text{(definicija presjeka)} \\ &\iff x \in (A \cap B) \cap C\,. && \text{(definicija presjeka)} \end{aligned}$$

   Na osnovu aksioma ekstenzionalnosti skupovi $A \cap (B \cap C)$ i $(A \cap B) \cap C$ su jednaki.
3. Neka je $A$ proizvoljan skup i neka je $x \in A \cap A$ proizvoljan.

$$\begin{aligned} x \in A \cap A &\iff x \in A \wedge x \in A && \text{(definicija presjeka)} \\ &\iff x \in A\,. && (\text{tautologija } p \wedge p \Leftrightarrow p) \end{aligned}$$

   Na osnovu aksioma ekstenzionalnosti skupovi $A \cap A$ i $A$ su jednaki.
4. Neka je $A$ proizvoljan skup i neka je $x \in A \cap \varnothing$ proizvoljan.

$$\begin{aligned} x \in A \cap \varnothing &\iff x \in A \wedge x \in \varnothing && \text{(definicija presjeka)} \\ &\iff x \in A \wedge \perp && \text{(prazan skup nema elemenata)} \\ &\iff \perp && (\text{tautologija } p \wedge \perp \Leftrightarrow \perp) \\ &\iff x \in \varnothing\,. && (\text{jedina sigurna neistina } \perp \Leftrightarrow x \in \varnothing) \end{aligned}$$

   Na osnovu aksioma ekstenzionalnosti skupovi $A \cap \varnothing$ i $A$ su jednaki.
5. Neka je $A$ proizvoljan skup i $U$ univerzum. Neka je $x \in A \cap U$ proizvoljan.

$$\begin{aligned} x \in A \cap U &\iff x \in A \wedge x \in U && \text{(definicija presjeka)} \\ &\iff x \in A \wedge \top && \text{(svi posmatrani skupovi su iz univerzuma)} \\ &\iff x \in A\,. && (\text{tautologija } p \wedge \top \Leftrightarrow p) \end{aligned}$$

   Na osnovu aksioma ekstenzionalnosti skupovi $A \cap U$ i $A$ su jednaki.

$\square$

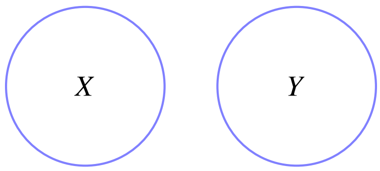
Narednim tvrđenjem dajemo neke od bitnijih skupovnih jednakosti koje vezuju operacije presjeka i unije.

**Teorem 2.2.6** Neka su $A, B$ i $C$ skupovi. Tada vrijedi:

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. (Zakon distributivnosti presjeka prema uniji)
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. (Zakon distributivnosti unije prema presjeku)
3. $A \cup (A \cap B) = A$ ; $A \cap (A \cup B) = A$. (Zakoni apsorpcije)

**Definicija 2.2.2** Za skupove $X$ i $Y$ kažemo da su disjunktni ako vrijedi $X \cap Y = \varnothing$.

Iz ove definicije direktno slijedi da je svaki skup disjunktan sa praznim skupom i da je prazan skup jedini skup koji je disjunktan sa samim sobom.




Slika 2.4: Disjunktni skupovi; $X \cap Y = \varnothing$.

Možemo govoriti i o disjunktnoj familiji skupova. Naime, za familiju skupova $\{A_i \mid i \in I\}$ kažemo da je *familija međusobno disjunktnih skupova* ako i samo ako su svaka dva različita člana familije međusobno disjunktna,

$$(\forall i, j \in I)(i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing) .$$

Jasno je da presjek familije međusobno disjunktnih skupova je prazan skup. Međutim, ako je presjek neke familije skupova prazan skup to ne znači da je data familija, familija međusobno disjunktnih skupova. Zaista, posmatramo li familiju $\{\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$, jasno je

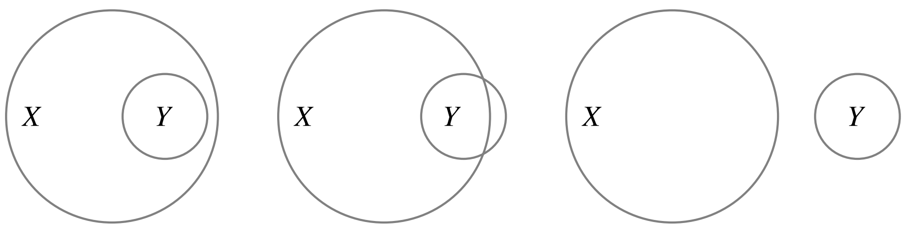
$$\{a,b\} \cap \{b,c\} \cap \{a,c\} = \varnothing ,$$

ali niti jedan par skupova posmatrane familije nije disjunktan.

Aksiomom izdvajanja nam je omogućeno iz datog skupa izdvojiti neki njegov dio, koga smo nazvali podskupom. Uvedimo novi pojam i formalno.

**Definicija 2.2.3** Za skup $X$ kažemo da je podskup skupa $Y$ i pišemo $X \subseteq Y$, ako vrijedi

$$(\forall x)(x \in X \Rightarrow x \in Y) .$$




(a) $Y \subseteq X$ (b) $\neg(Y \subseteq X)$ (c) $\neg(Y \subseteq X)$

Slika 2.5: Vennov dijagram podskupa.

Od osobina veze "biti podskup", ističemo najvažnije.

**Teorem 2.2.7**
1. $(\forall X)\ \varnothing \subseteq X$.
2. $(\forall X)\ X \subseteq X$.
3. $(\forall X,Y)(X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X \Rightarrow X = Y)$.
4. $(\forall X,Y,Z)(X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z)$.

**Dokaz** :
1. Ako bi postojao skup $X$ za koga ne vrijedi $\varnothing \subseteq X$, to bi značilo da postoji bar jedan element skupa $\varnothing$ koji nije u skupu $X$. Ali, prazan skup nema elemenata, pa takvo što nije moguće. (Dokaz ove činjenice smo takođe mogli bazirati i na tautologiji $\perp \Rightarrow p$.)
2. Da je tvrdnja tačna, slijedi iz činjenice da je iskaz $p \Rightarrow p$ tautologija, to jest uvijek vrijedi $x \in X \Rightarrow x \in X$.
3. Ova osobina slijedi direktno iz aksioma ekstenzionalnosti.
4. Neka su $X,Y,Z$ skupovi za koje vrijedi $X \subseteq Y$ i $Y \subseteq Z$. Neka je $x \in X$ proizvoljan. Kako je $X \subseteq Y$, zaključujemo prema definiciji podskupa da je $x$ element i skupa $Y$. Kako vrijedi i $Y \subseteq Z$, onda iz $x \in Y$ zaključujemo da je $x \in Z$. Zbog proizvoljnosti posmatranog elementa $x$ sada imamo

$$(\forall x)(x \in X \ \Rightarrow \ x \in Z) \ \Leftrightarrow \ X \subseteq Z$$

$\square$

**Lema 2.2.8** Neka je data familija skupova $\{A_i \mid i \in I\}$, sa osobinom da je za svako $i \in I$, $A_i \subseteq X$. Tada vrijedi, $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq X$.

**Dokaz** : Za zadate skupove $A_i$ $(i \in I)$ i $X$, neka je $A_i \subseteq X$ za svako $i \in I$. Neka je sada $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ proizvoljan. To znači da postoji $i_0 \in I$, takav da $x \in A_{i_0}$, a kako je $A_{i_0} \subseteq X$, ovo opet znači da je $x \in X$. Dakle,

$$(\forall x)\left(x \in \bigcup_{i\in I} A_i \ \Rightarrow \ x \in X\right) ,$$

a onda na osnovu definicije uvedene relacije imamo da je $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq X$. $\square$

Spomenimo još jednu čestu skupovnu vezu, izvedenu iz relacije "biti podskup".

**Definicija 2.2.4** Ako vrijedi $X \subseteq Y$ i $X \neq Y$, kažemo da je $X$ pravi ili strogi podskup od $Y$ i pišemo $X \subset Y$.

U upotrebi veza "$\subseteq$" i "$\subset$" treba voditi računa o preciznosti iskazivanja. Naime, za skup $2\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ je paran broj }\}$ vrijedi $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$, ali nećemo pogriješiti ako napišemo i $2\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$. Međutim, za skupove $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ i $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\}$ pogrešno bi bilo reći $A \subset B$ jer u stvari vrijedi $A = B$, a ne bi bila greška reći $A \subseteq B$.

Napomenimo da pomoću veze "biti podskup" možemo definisati i vezu "biti nadskup".

**Definicija 2.2.5** Kažemo da je skup $A$ nadskup skupa $B$ i pišemo $A \supseteq B$, ako i samo ako je $B \subseteq A$.

Sljedećim teoremom uvezujemo osobine unije, presjeka i relacije "biti podskup".

**Teorem 2.2.9** Za proizvoljne skupove $A$ i $B$ sljedeća tvrđenja su ekvivalentna:
1. $A \subseteq B$.
2. $A \cap B = A$.
3. $A \cup B = B$.

**Dokaz** : $(1 \Longrightarrow 2)$
Neka je $A \subseteq B$, to jest neka vrijedi

$$(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B) \ .$$

Uzmimo proizvoljan $x \in A \cap B$. Tada imamo

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Longrightarrow x \in A \wedge x \in B && \text{(definicija presjeka)} \\ &\Longrightarrow x \in A \ . && \text{(tautologija } (p \wedge q) \Rightarrow p\text{)} \end{aligned}$$

Na osnovu definicije inkluzije zaključujemo da vrijedi

$$A \cap B \subseteq A \ . \tag{2.1}$$

Neka je sada $x \in A$ proizvoljan.

$$\begin{aligned} x \in A &\Longrightarrow x \in B && \text{(pretpostavka } A \subseteq B\text{)} \\ &\Longrightarrow x \in A \wedge x \in B && \text{(tautologija } p \Rightarrow (p \wedge \top)\text{)} \\ &\Longrightarrow x \in A \cap B \ . && \text{(definicija presjeka)} \end{aligned}$$

Dakle,

$$A \subseteq A \cap B \ . \tag{2.2}$$

Na osnovu (2.1), (2.2) i aksioma ekstenzionalnosti zaključujemo jednakost skupova, to jest

$$A \cap B = A \ .$$

$(2 \Longrightarrow 3)$
neka je $A \cap B = A$. Za proizvoljan $x \in A \cup B$ imamo

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\Longrightarrow x \in A \vee x \in B && \text{(aksiom unije)} \\ &\Longrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in B && \text{(pretpostavka } A = A \cap B\text{)} \\ &\Longrightarrow x \in B && \text{(tautologija } ((p \wedge q) \vee q) \Rightarrow q\text{)} \end{aligned}$$

Na osnovu definicije inkluzije vrijedi

$$A \cup B \subseteq B \ . \tag{2.3}$$

Neka je $x \in B$ proizvoljan. Tada,

$$\begin{aligned} x \in B &\Longrightarrow x \in B \vee x \in A && \text{(tautologija } p \Rightarrow (p \vee q)\text{)} \\ &\Longrightarrow x \in B \cup A && \text{(aksiom unije)} \\ &\Longrightarrow x \in A \cup B \ . && \text{(komutativnost unije)} \end{aligned}$$

Zaključujemo da vrijedi

$$B \subseteq A \cup B \ . \tag{2.4}$$

Iz (2.3), (2.4) i aksioma ekstenzionalnosti imamo da vrijedi $A \cup B = B$.
$(3 \Rightarrow 1)$
Neka je $A \cup B = B$. Tada za proizvoljan $x \in A$ imamo

$$\begin{aligned} x \in A &\Longrightarrow x \in A \vee x \in B && \text{(tautologija } p \Rightarrow (p \vee q)\text{)} \\ &\Longrightarrow x \in B \ . && \text{(pretpostavka } A \cup B = B\text{)} \end{aligned}$$

Na osnovu definicije inkluzije vrijedi $A \subseteq B$.
Na osnovu tranzitivnosti implikacije i tautologije

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \ ,$$

iz $1 \Rightarrow 2$, $2 \Rightarrow 3$ i $3 \Rightarrow 1$, zaključujemo ekvivalentnost sva tri iskaza. $\square$

Narednom definicijom uvodimo novu operaciju nad skupovima.

**Definicija 2.2.6** Neka su $X$ i $Y$ proizvoljni skupovi. Razlika skupova $X$ i $Y$, u oznaci $X \setminus Y$, je skup koji se sastoji od onih elemenata skupa $X$ koji se ne nalaze u skupu $Y$, to jest

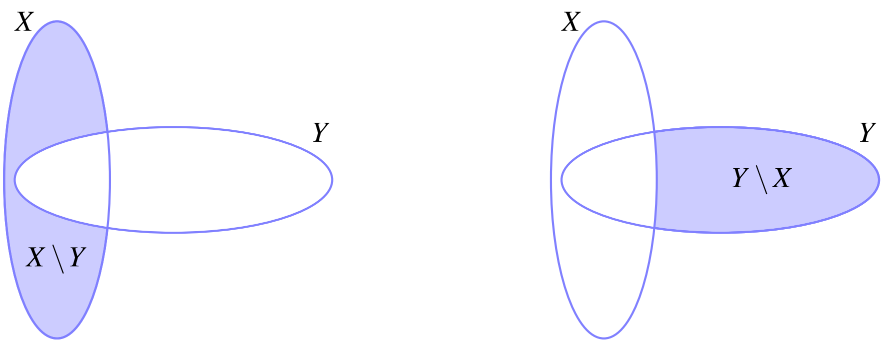
$$X \setminus Y = \{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\} \ .$$

■ **Primjer 2.3** Neka su zadati skupovi $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ i $B = \{2,3,4,5,6,7,8\}$. Tada imamo:

$$A \setminus B = \{1\} \ \ , \ \ B \setminus A = \{8\} \ .$$

■

Jasno je iz same definicije razlike skupova, ali i ovog primjera da u opštem slučaju $A \setminus B \neq B \setminus A$, to jest operacija razlike skupova nije komutativna. Tu činjenicu jednostavno vidimo i iz prikaza razlike skupova Vennovim dijagramima.




Slika 2.6: Vennov dijagram razlike skupova.

Ako je $Y \subseteq X$, umjesto o razlici skupova $X \setminus Y$, govorimo o komplementu skupa $Y$ u odnosu na skup $X$ i koristimo oznaku $C_X(Y)$. Ukoliko su svi skupovi koje posmatramo podskupovi nekog skupa $U$, koga tada nazivamo *univerzalni skup* ili *univerzum*, koristimo oznaku $C(X)$ (ili $X^c$) umjesto $C_U(X) = U \setminus X$.


(a) Komplement skupa u odnosu na skup

(b) Komplement skupa u odnosu na univerzum

Slika 2.7: Vennov dijagram komplementa skupova.

■ **Primjer 2.4** Neka je $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ i $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Tada je $C_B(A) = \{7,8,9,10\}$. Ako bismo za univerzum uzeli skup svih prirodnih brojeva, tada imamo

$$\mathbb{N} \setminus A = C_{\mathbb{N}}(A) = A^c = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 7\} \ .$$

■

Ovdje treba napomenuti da ne postoji skup koji bi predstavljao apsolutni komplement datog skupa, to jest za zadati skup $B$, ne postoji skup $A = \{x \mid x \notin B\}$. Naime, ako bi takav skup postojao, onda na osnovu aksioma unije bi i $A \cup B$ bio skup, što bi značilo da je $A \cup B$ skup svih skupova, a takav na osnovu ZF sistema aksioma nije moguć.

**Teorem 2.2.10** Neka su $A, B$ i $C$ skupovi i $U$ univerzum. Tada vrijedi:

1. $(A^c)^c = A$. (Zakon idempotentnosti komplementa)
2. $U^c = \varnothing$ ; $\varnothing^c = U$.
3. $A \cup A^c = U$ ; $A \cap A^c = \varnothing$. (Zakoni komplementa)
4. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ ; $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
5. $A \setminus B = A \cap B^c$. (Zakon skupovne razlike)

Osobine navedene u 4. nazivamo De Morganovi[7] zakoni, a često se iskazuju i u obliku

$$(B \cup C)^c = B^c \cap C^c \ , \ (B \cap C)^c = B^c \cup C^c \ ,$$

gdje se komplementiranje odnosi na neki zadati skup (npr. u odnosu na neki skup $A$). De Morganovi zakoni vrijede i za proizvoljne presjeke i unije,

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c \ \text{ i } \ \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c \ .$$

Kada vršimo zapis $A \cap B \cap C$ moguća je zabuna, da li mislimo $(A \cap B) \cap C$ ili $A \cap (B \cap C)$. Asocijativni zakon nam govori da o tome ne moramo voditi računa, to jest da nam zagrade u ovom slučaju, slično i za uniju, nisu neophodne. Međutim, kod zapisa $A \cap B \cup C$ to i nije slučaj jer da li želimo iskazati $A \cap (B \cup C)$ ili $(A \cap B) \cup C$, kako nam govore distributivni zakoni ova dva posljednja izraza i nisu jednaka, te zagrade moramo pisati. Zato se dogovaramo o prioritetu skupovnih operacija. Operacije unije, presjeka i razlike skupova su istog prioriteta, pa zagradama naglašavamo redoslijed njihovog izvršavanja. Ako zagrada nema, koristimo se pravilom izvršavanja operacija s lijeva na desno. Tako bi imali za izraz $A \cup B \setminus C \cap D$ da odgovara izrazu $((A \cup B) \setminus C) \cap D$.

**Teorem 2.2.11** Za proizvoljne skupove $X$ i $Y$ vrijedi,

$$X \setminus X = Y \setminus Y \ .$$

**Dokaz** : Neka su $X$ i $Y$ proizvoljni skupovi. Tada imamo

$$x \in X \setminus X \iff x \in X \wedge x \notin X \iff \perp \ . \tag{2.5}$$

$$x \in Y \setminus Y \iff x \in Y \wedge x \notin Y \iff \perp \ . \tag{2.6}$$

Iz (2.5) i (2.6) zaključujemo da vrijedi $x \in X \setminus X \Leftrightarrow x \in Y \setminus Y$, pa na osnovu aksioma ekstenzionalnosti zaključujemo jednakost skupova, to jest $X \setminus X = Y \setminus Y$. □

Prema gornjem tvrđenju razlika $X \setminus X$ ne ovisi o skupu $X$, a to nam samo još jednom potvrđuje jedinstvenost praznog skupa jer je $X \setminus X = \varnothing$.

Aksiom para nam je dozvoljavao napraviti dvočlani skup, koji je predstavljao neuređen par skupova. Sada ćemo definisati uređeni par skupova pomoću koga ćemo moći uvesti još jednu operaciju sa skupovima.

[7] Augustus De Morgan (1806-1871) - Britanski matematičar i logičar

**Definicija 2.2.7** Skup $\{\{x\},\{x,y\}\}$ nazivamo uređeni par s prvim elementom $x$ i drugim elementom $y$ i označavamo ga sa $(x,y)$.

Element $x$ u uređenom paru $(x,y)$ nazivamo prva komponenta ili prva koordinata, a element $y$ nazivamo druga komponenta ili druga koordinata uređenog para. Gornja definicija potiče od Kuratowskog[8] i u daljem nju prihvatamo kao osnovnu. Međutim, postojale su i druge definicije uređenog para. Tako je Hausdorff[9] dao sljedeću definiciju

$$(a,b) \stackrel{def}{=} \{\{a,1\},\{b,2\}\} \ ,$$

gdje su 1 i 2 neki drugi objekti različiti od $a$ i $b$, a Wiener[10] je 1914. dao definiciju koja je bila i prva definicija uređenog para,

$$(a,b) \stackrel{def}{=} \{\{\{a\},\varnothing\},\{\{b\}\}\} \ .$$

U daljem tekstu mi ćemo se držati definicije Kuratowskog. Za $x \neq y$ očigledno vrijedi $(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\} \neq \{\{y\},\{x,y\}\} = (y,x)$. Ovu činjenicu izražavamo lemom

**Lema 2.2.12** Uređeni par $(x,y)$ jednak je uređenom paru $(a,b)$ ako i samo ako vrijedi $x = a$ i $y = b$.

**Dokaz** : ($\Longleftarrow$) Ako je $x = a$ i $y = b$, tada je očigledno

$$(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{a\},\{a,b\}\} = (a,b) \ .$$

($\Longrightarrow$) Neka je $(x,y) = (a,b)$. Razlikujmo dva slučaja: $x = y$ i $x \neq y$.
1) Neka je $x = y$. Tada imamo

$$(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{x\},\{x,x\}\} = \{\{x\}\} \ .$$

Zbog pretpostavke jednakosti uređenih parova je $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{x\}\}$, pa zaključujemo da mora biti $\{a\} = \{a,b\} = \{x\}$, to jest mora vrijediti $x = a = b$, a sa polaznom pretpostavkom $x = y$ onda imamo da je $x = a$ i $y = b$.
2) Neka je $x \neq y$. Iz $(x,y) = (a,b)$ je prema definiciji $\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{a\},\{a,b\}\}$. Moguća su tri slučaja:

a) Neka je $\{a,b\} = \{x\}$. Tada mora biti $a = b = x$, a to nam onda daje

$$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{x\},\{x,x\}\} = \{\{x\}\} \ .$$

Tada je onda $\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{x\}\}$, to jest moralo bi biti $x = y$, a to bi bilo kontradiktorno pretpostavci $x \neq y$.

b) Ako bi bilo $\{a\} = \{x,y\}$, to bi takođe vodilo kontradikciji jer bi onda moralo biti $x = y = a$.

c) Kao treća mogućnost ostaje $\{x\} = \{a\}$ iz čega je onda $x = a$. S druge strane mora biti $\{x,y\} = \{a,b\}$ i ako pretpostavimo da je $b = x$, to bi značilo $\{a,b\} = \{x,x\} = \{x\} \neq \{x,y\}$, što bi davalo očiglednu kontradikciju. Dakle, mora biti $b = y$, što zajedno sa dobijenim $x = a$ kompletira dokaz. $\square$

**Definicija 2.2.8** Direktni proizvod skupova $X$ i $Y$, u oznaci $X \times Y$, je skup svih uređenih parova kod kojih je prva komponenta iz skupa $X$, a druga komponenta iz skupa $Y$.

$$X \times Y = \{(x,y) |\, x \in X \wedge y \in Y\} \ .$$

[8] Kazimierz Kuratowski (1896-1980) - Poljski matematičar i logičar
[9] Felix Hausdorff (1868-1942) - Njemački matematičar
[10] Norbert Wiener (1894-1964) - Američki matematičar

Direktni proizvod skupova nazivamo još i Kartezijev ili Descartesov[11] proizvod skupova.

**Teorem 2.2.13** Kartezijev proizvod skupova je skup.

**Dokaz** : Nije teško vidjeti da smo definiciju Kartezijevog proizvoda mogli uvesti i sa

$$X \times Y = \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y))|\ (\exists x \in X)(\exists y \in Y)\ z = (x,y)\}\ . \tag{2.7}$$

Zato pokažimo da je $X \times Y$ iz gornje jednakosti, dobro definisan skup.
Neka su $x \in X$ i $y \in Y$ proizvoljni elementi. Tada $X \cup Y$ je skup na osnovu aksioma unije i $x, y \in X \cup Y$. Na osnovu aksioma o partitivnom skupu, $\mathcal{P}(X \cup Y)$ je skup i pri tome je $\{x\}, \{x,y\} \in \mathcal{P}(X \cup Y)$. Ali tada $\{\{x\},\{x,y\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y))$ i to je opet zbog Aksioma 5, skup. Dakle, $(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y))$, pa na osnovu Aksioma 6, postoji skup (2.7). $\square$

Od osobina direktnog proizvoda iskažimo njegove veze sa unijom i presjekom.

**Teorem 2.2.14** Neka su $A, B, C$ i $D$ skupovi. Tada vrijedi:
1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
3. $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D)$.
4. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (A \times D) \cap (B \times C) \cap (B \times D)$.

**Dokaz** : 1. Neka je $(a,b) \in A \times (B \cup C)$ proizvoljan. Tada vrijedi,

$$\begin{aligned}
(a,b) \in A \times (B \cup C) &\Longleftrightarrow a \in A \wedge b \in B \cup C && \text{(definicija produkta)}\\
&\Longleftrightarrow a \in A \wedge (b \in B \vee b \in C) && \text{(definicija unije)}\\
&\Longleftrightarrow (a \in A \wedge b \in B) \vee (a \in A \wedge b \in C) && \text{(distributivni zakon)}\\
&\Longleftrightarrow (a,b) \in A \times B \vee (a,b) \in A \times C && \text{(definicija produkta)}\\
&\Longleftrightarrow (a,b) \in A \times B \cup A \times C\ . && \text{(definicija unije)}
\end{aligned}$$

Dokazi ostalih tvrđenja ostavljeni za vježbu! $\square$

Kako god imamo potrebu za uređenim parom elemenata, tako nam je potreban pojam i uređeno trojke, četvorke i slično. Uopštavajući pojam uređenog para, možemo definisati i pojam uređene $n$-torke ($n \in \mathbb{N}$).

**Definicija 2.2.9** Neka je $n$ proizvoljan prirodni broj. Uređenu $n$-torku definišemo kao
1. $(x_1) = x_1$, za $n = 1$.
2. $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = ((x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n)$, za $n > 1$.

Sada Kartezijev proizvod skupova $X_1, X_2, \ldots, X_n$ definišemo kao skup

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)|\ (\forall i)(1 \leq i \leq n \Rightarrow x_i \in X_i)\}\ .$$

Specijalno, ako je $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$, govorimo o $n$-tom (direktnom) stepenu skupa $X$, u oznaci $X^n$. Direktan proizvod skupova možemo definisati i za proizvoljnu familiju skupova. Naime, ako imamo familiju skupova $\{X_i \mid i \in I\}$, gdje je $I$ proizvoljan skup indeksa, onda sa $\prod_{i \in I} X_i$ označavamo direktan proizvod te familije.

[11] Rene Descartes (lat. Renatus Cartesius) (1596-1650) - Francuski filozof

**Načini dokazivanja skupovnih jednakosti**

Za dokazivanje skupovnih jednakosti uobičajeno se koristimo nekom od naredne četiri metode.
**I Način:(Pomoću aksioma ekstenzionalnosti)** Ako trebamo pokazati skupovnu jednakost $A = B$, uzimamo proizvoljan $x \in A$ i pokažemo da onda on pripada i skupu $B$, čime smo pokazali da je $A \subseteq B$. Zatim uzimamo proizvoljan element skupa $B$ i pokazujemo da on pripada i skupu $A$, to jest pokažemo da je $B \subseteq A$. Iz ove dvije činjenice, na osnovu aksioma ekstenzionalnosti, zaključujemo da vrijedi data skupovna jednakost, $A = B$.

■ **Primjer 2.5** Dokažimo skupovnu jednakost

$$(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C .$$

Dokazujemo inkluziju "$\subseteq$".
(1) Neka je $x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ proizvoljan. To na osnovu definicije operacije presjeka skupova znači da $x$ pripada skupu $A \setminus C$ i skupu $B \setminus C$,

$$x \in A \setminus C \ \land x \in B \setminus C .$$

(2) Sada na osnovu definicije razlike skupova imamo da $x$ pripada skupu $A$, a ne pripada skupu $C$ i $x$ pripada skupu $B$, a ne pripada skupu $C$,

$$x \in A \land x \notin C \land x \in B \land x \notin C .$$

(3) Odavde zaključujemo da $x$ pripada skupovima $A$ i $B$ i ne pripada skupu $C$,

$$x \in A \land x \in B \land x \notin C .$$

(4) Prema definiciji presjeka skupova $x$ pripada skupu $A \cap B$ i $x$ ne pripada skupu $C$,

$$x \in A \cap B \ \land \ x \notin C .$$

(5) Konačno, prema definiciji razlike skupova zaključujemo $x \in (A \cap B) \setminus C$, te vrijedi

$$(A \setminus C) \cap (B \setminus C) \subseteq (A \cap B) \setminus C . \tag{2.8}$$

Dokazujemo inkluziju "$\supseteq$".
(1) Neka je $x \in (A \cap B) \setminus C$ proizvoljan. Prema definiciji razlike skupova $x$ pripada skupu $A \cap B$ i ne pripada skupu $C$,

$$x \in A \cap B \ \land \ x \notin C .$$

(2) Dakle, $x$ pripada skupu $A$ i pripada skupu $B$ i ne pripada skupu $C$,

$$x \in A \ \land \ x \in B \ \land \ x \notin C .$$

(3) Ovo je isto kao da kažemo da $x$ pripada skupu $A$, a ne pripada skupu $C$ i $x$ pripada skupu $B$, a ne pripada skupu $C$,

$$x \in A \ \land \ x \notin C \ \land \ x \in B \ \land \ x \notin C .$$

(4) Konačno, prema definiciji razlike zaključujemo da $x$ pripada skupovima $A \setminus C$ i $B \setminus C$,

$$x \in A \setminus C \ \land \ x \in B \setminus C .$$

(5) Prema definiciji prsjeka skupova gornje znači $x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$, te vrijedi

$$(A \cap B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cap (B \setminus C) . \tag{2.9}$$

Iz (2.8) i (2.9) na osnovu aksioma ekstenzionalnosti zaključujemo jednakost skupova. ■

**II Način:(Algebarski dokaz)** U ovoj vrsti dokaza koristimo se već poznatim (dokazanim) skupovnim jednakostima. Neophodno je svaki korak dokaza okarakterisati skupovnom jednakošću ili pravilom zaključivanja kojim se koristimo.

■ **Primjer 2.6** Dokažimo skupovnu jednakost

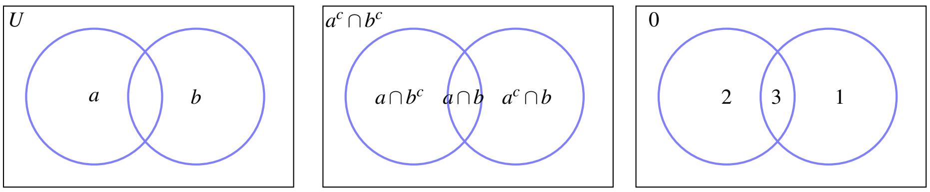
$$(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C\,.$$

$$\begin{aligned}
(A \setminus C) \cap (B \setminus C) &= (A \cap C^c) \cap (B \cap C^c) && (\text{jer } X \setminus Y = X \cap Y^c)\\
&= (A \cap B) \cap (C^c \cap C^c) && (\text{komutativnost i asocijativnost presjeka})\\
&= (A \cap B) \cap C^c && (X \cap X = X)\\
&= (A \cap B) \setminus C\,. && (\text{jer } X \setminus Y = X \cap Y^c)
\end{aligned}$$

■

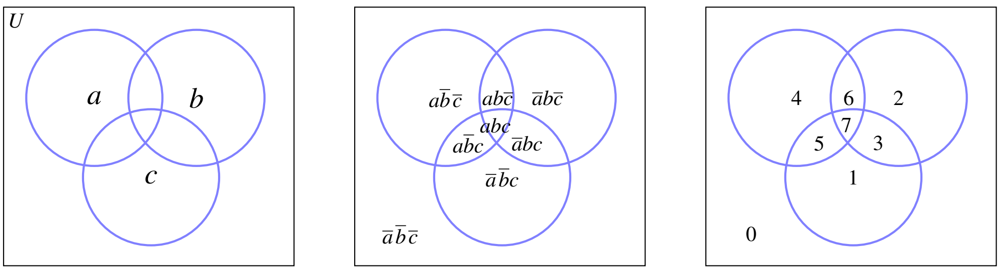
**III Način:(Vennovim dijagramima)**

U dokazivanju skupovnih jednakosti i nejednakosti možemo se poslužiti i Vennovim dijagramima. Ova metoda je veoma dobra jer je vizuelno potkrijepljena, za razliku od ostalih metoda. Za ovu metodu služimo se Vennovim dijagramima sa prikazom dva, tri ili više skupova, u zaisnosti od toga koliko skupova učestvuje u jednakosti ili nejednakosti koju treba dokazati.




(a) (b) (c)

Na slici (a) prikazana su dva skupa $a$ i $b$ pomoću krugova, u univerzumu $U$ (pravougaonik). Na slici (b) predstavljene su četiri odvojene oblasti na koje je univerzum podjeljen sa ova dva skupa, a na slici (c) smo te oblasti označili sa 0, 1, 2 i 3. Skupove sada interpretiramo sa oblastima od kojih su sastavljeni. Naprimjer, skup $a$ je sastavljen od oblasti 2 i 3, a to zapisujemo $a = \{2,3\}$. Ili, $b = \{1,3\}$, $a \cap b = \{3\}$, $U = \{0,1,2,3\}$.




(d) (e) (f)

Slično postupamo i kada radimo sa tri skupa, što je prikazano na gornje tri slike. Na slici (d) je predstavljen univerzum $U$ (pravougaonik) i u njemu tri skupa $a$, $b$ i $c$. Na slici (e) predstavljene su osam odvojenih oblasti na koje ova tri skupa dijele univerzum (kratkoće zapisa radi komplement skupa zapisujemo sa crtom iznad, naprimjer $a^c = \overline{a}$, a presjek skupova pišemo kao množenje, $a \cap b = ab$). Na slici (f) smo svakoj toj oblasti dodijelili jedan broj od 0 do 7. Tako imamo da oblast 7 predstavlja $a \cap b \cap c = abc$ ili oblast 1 je $c \setminus (a \cup b)$. Ideja ove vrste dokaza jeste reprezentovati pojedine skupove preko oblasti, naprimjer skup $a$ je skup oblasti $\{4,5,6,7\}$.

■ **Primjer 2.7** Dokažimo skupovnu jednakost $(A\setminus C)\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus C$.

Prema rečenom, skup $A\setminus C$ je skup regiona $\{4,6\}$, skup $B\setminus C$ je skup regiona $\{2,6\}$. Dalje, skup $A\cap B$ je $\{6,7\}$ i skup $C$ je $\{1,3,5,7\}$. Koristeći se definicijama skupovnih operacija sada imamo,

$$(A\setminus C)\cap(B\setminus C)=\{4,6\}\cap\{2,6\}=\{6\}\ ,$$

i

$$(A\cap B)\setminus C=\{6,7\}\setminus\{1,3,5,7\}=\{6\}\ .$$

Kako se obje strane naše skupovne jednakosti svode ni isti skup regiona ($\{6\}$), to je data skupovna jednakost tačna. ■

**IV Način:(Tabelarni metod)** U ovoj metodi se služimo idejom da formiramo tabelu čije su kolone naslovljene na sve skupove koji figurišu u zadatoj skupovnoj jednakosti, a tabelu popunjavamo sa "Da" i "Ne" prema odgovoru "da li $x$ pripada tom skupu?". Prve kolone su rezervisane za pojedinačne skupove koji učestvuju u skupovnoj jednakosti.

■ **Primjer 2.8** Dokažimo skupovnu jednakost

$$(A\setminus C)\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus C\ .$$

| $A$ | $B$ | $C$ | $A\setminus C$ | $B\setminus C$ | Lijevo | $A\cap B$ | Desno | Venn | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ne | Ne | Ne | Ne | Ne | Ne | Ne | Ne | 0 | |
| Da | Ne | Na | Da | Ne | Ne | Ne | Ne | 4 | |
| Ne | Da | Ne | Ne | Da | Ne | Ne | Ne | 2 | |
| Ne | Ne | Da | Ne | Ne | Ne | Ne | Ne | 1 | |
| Da | Da | Ne | Da | Da | Da | Da | Da | 6 | ✓ |
| Da | Ne | Da | Ne | Ne | Ne | Ne | Ne | 5 | |
| Ne | Da | Da | Ne | Ne | Ne | Ne | Ne | 3 | |
| Da | Da | Da | Ne | Ne | Ne | Da | Ne | 7 | |

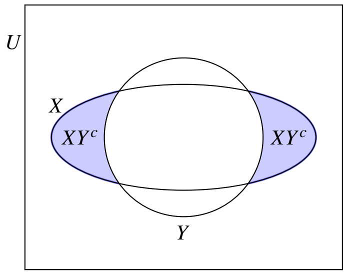
Prve tri kolone daju odgovore na pitanja "Da li je $x$ u skupu $A$", "Da li je $x$ u skupu $B$" i "Da li je $x$ u skupu $C$". Kolone "Lijevo" i "Desno" su odgovori na pitanje "Da li je $x$ u skupu $(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$" i "Da li je $x$ u skupu $(A\cap B)\setminus C$".
Kako su odgovori u kolonama "Lijevo" i "Desno" identični na svih osam pozicija, to nam govori da je data skupovna jednakost tačna.
Kolonu "Venn" smo dodali da uočimo vezu ovog metoda sa metodom Vennovih dijagrama i u njoj očitavamo pripadnost $x$-a datom regionu Vennovog diagrama. ■

### Još o Vennovim dijagramima

Kako smo to već spomenuli, skupove najčešće predstavljamo Vennovim dijagramima. Uobičajeno je univerzalni skup $U$ predstavljati pravougaonikom, a konačnu kolekciju njegovih podskupova $A_1,A_2,...,A_n$ sa pravougaonicima, krugovima ili elipsama. Pri tome mora biti zadovoljen uslov da je univerzalni skup podijeljen na $2^n$ ($n$ broj podskupova koje predstavljamo) povezanih dijelova. To znači da Vennov dijagram mora da obezbijedi dovoljan broj oblasti za predstavljanje svih mogućih presjeka skupova $A_1,A_2,...,A_n$, kao i njihovih komplemenata. Kako svi ti presjeci mogu biti neprazni, to povezanih oblasti mora biti $2^n$. Preglednosti radi, uobičajeno se u Vennovim dijagramima koristimo zamjenskom notacijom za presjek, $A\cap B\equiv AB$ i komplement skupa se uvijek odnosi na univerzum.

Sljedećom slikom prikazan je dijagram, ali koji nije Vennov zbog nepovezanosti oblasti.

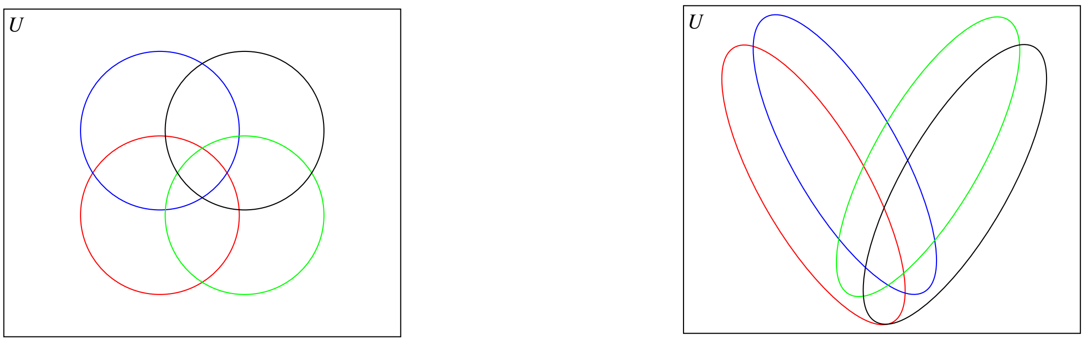
Na žalost, već u slučaju četiri skupa nije moguće nacrtati Vennov dijagram sa krugovima, čak i kada koristimo krugove različitih poluprečnika. Iako su u upotrebu uvedeni još davne 1881. godine,




Slika 2.8: Primjer dijagrama koji nije Vennov. Skup $X \cap Y^c$ nije povezan.

tek je 1975. godine dokazano da se za svaki prirodan broj $n$ može konstruisati Vennov dijagram sa $n$ elipsi, koji obezbjeđuje svih potrebnih $2^n$ povezanih oblasti.

Crtanje Vennovih dijagrama već za pet skupova je toliko komplikovano da to nećemo ovdje raditi. Na Slici 2.9 (a) prikazan je diagram koji ne predstavlja Vennov dijagram (Zašto?). Kao što smo rekli gore, moguće je nacrtati Vennov dijagram za četiri skupa, ali pomoću elipsi što je prikazano na Slici 2.9 (b).




(a) Da li je ovo Vennov dijagram?

(b) Vennov dijagram za 4 skupa

Slika 2.9: Vennov (b) i ne Vennov dijagram (a) za 4 skupa.

# Bibliografija

## Knjige

B. Russell: The Principles of Mathematics, Cambridge University Press, 1903. (http://fair-use.org/bertrand-russell/the-principles-of-mathematics/)
Đ. Kurepa: *Teorija skupova*, Školska knjiga, Zagreb, 1951.
K. Kuratowski, A. Mostowski: *Set Theory*, North-Holland, 1967.
S. Prešić i drugi: *Problem postojanja u matematici*, Matematički Institut, Beograd, 1979.
Z. Šikić: *Novija filozofija matematike*, Nolit, Beograd 1987.
Z. Šikić: *Kako je stvarana novovjekovna matematika*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.
K. Devlin: *The Joy of Sets*, Springer-Verlag, 1993.
M. Clark: *Paradoxes from A to Z*, Routledge Taylor & Francis Group, Frst published 2002.
J. Thomas: *Set Theory*, Third Millennium Edition, Springer Monographs in Mathematics, Berlin, New York, Springer-Verlag 2003.
S. G. Simpson: *Mathematical Logic*, The Pensilvania State University, 2005.
R. M. Sainsbury: *Paradoxes*, Cambridge University Press, 3rd edition 2009.
T. Bedürftig, R. Murawski: Philosopie der Mathematik 2. erweirterte Auflage, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG. Berlin/Boston, 2012.
C. C. Pinter: *A book of Set Theory*, Dover Publications, INC. Mineola, New York 2014.

## Članci i skripte

G. Cantor: Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Berlin, 1874.
M. Males, Teorija skupova skripta, Split, 2003.
S. Miličić: Teorija skupova predavanja, 2005.
M. Vuković: Teorija skupova predavanja, Zagreb 2006.
N. Koceić Bilan: Teorija skupova predavanja, Split, 2009.
H. D. Ebbinghaus, C. G. Fraser, A. Kanamori: ERNST ZERMELO Collected Works, Volume I

Band I, Springer Heidelberg Dordrecht London New York, 2010.
R. André: *Axioms and Set Theory*, A first course in Set Theory, University of Waterloo, Ontario 2014.

# Indeks pojmova