Diferencijalna Geometrija: Pismeni dio ispita i Test 1 06/12/2010

Nema napuštanja ispita u prvih 30 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Ispit traje 2 sata i 15 minuta. Test traje 1 sat i 30 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 60 maksimalnih, po 20 za svaki zadatak.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Zadatak 1. Neka je $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 4(x^2 + y^2) = 1 + z^2, z = 2x + 1\}$.

(a) Napišite C kao bazni skup, tj. $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | F_1(x, y, z) = F_2(x, y, z) = 0\}$, sa dvije odgovarajuće funkcije F_1 i F_2; zatim

(i) provjerite da C definiše regularnu krivu; [2]

(ii) nadjite regularnu parametrizaciju za krivu. [4]

(b) Pretpostavite da je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva, $T = \gamma'$, sa $T'(s) \neq 0$ za sva s.

(i) Dajte definiciju *krivine* κ i *torzije* τ, kada je $N = \frac{T'}{|T'|}$. [2]

(ii) Pokažite da krivina zadovoljava $\kappa^2 = |\gamma' \times \gamma''|^2$. [2]

(c) Nadjite krivinu (do znaka) i torziju krive date u (a). [5]

(d) Neka je $t \mapsto \gamma(t)$ regularna parametrizovana kriva i neka je $s \mapsto \tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ repara – metrizacija krive γ (ne obavezno dužinom luka). Pokažite da je, za sva s,

$$\frac{|\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}''|^2}{|\tilde{\gamma}'|^6}(s) = \frac{|\gamma' \times \gamma''|^2}{|\gamma'|^6}(s)$$

(**Pomoć**: Razmislite o koeficijentima koje trebate prije računanja!) [5]

Rješenje.

(a)

(i) Uzmimo $F_1(x, y, z) := 4x^2 + 4y^2 - z^2 - 1$ i $F_2(x, y, z) := 2x - z + 1$;
Onda $\nabla F_1(x, y, z) \times \nabla F_2(x, y, z) = -4(2y, z - 2x, 4y) = -4(2y, 1, 4y) \neq 0$ jer je $z = 2x + 1$;
stoga su $\nabla F_1(x, y, z)$ i $\nabla F_2(x, y, z)$ linearno nezavisni za sva $(x, y, z) \in C$.
Teorema implicitnog preslikavanja sada osigurava da je C regularna kriva.

(ii) Posmatrajmo $0 = F_1(x, y, 2x + 1) = 4y^2 - 4x - 2$, što daje $x = y^2 - \frac{1}{2}$;
stoga $t \mapsto \gamma(t) := (t^2 - \frac{1}{2}, t, 2t^2)$ daje regularnu parametrizaciju jer je $\gamma'(t) = (2t, 1, 4t) \neq 0, \forall t$.

(b)

(i) Krivina: $\kappa(s) = T'(s) \cdot N(s) = |T'(s)|$.
Torzija: $\tau(s) = N'(s) \cdot B(s) = N'(s) \cdot (T(s) \times N(s))$

(ii) γ je parametrizirana dužinom luka, $|\gamma'|^2 \equiv 1$, tako da $\gamma'' \perp \gamma'$;
onda $|\gamma' \times \gamma''|^2 = |\gamma'|^2 |\gamma''|^2 = |\gamma''|^2 = |T'|^2 = \kappa^2$.

(c) Računamo $\gamma'(t) = (2t, 1, 4t)$ i $\gamma''(t) = (2, 0, 4)$ tako da $\kappa = \frac{|(4,0,-2)|}{|(2t,1,4t)|^3} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{1+20t^2}^3}$; jer je γ planarna kriva, $\tau = 0$.

(d) Računamo

$$\tilde{\gamma}'(s) = t'(s)\gamma(t(s))$$

$$\tilde{\gamma}''(s) = t'^2(s)\gamma''(t(s)) + ?\gamma'(t(s))$$

tako da je $\frac{|\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}''|^2}{|\tilde{\gamma}'|^6}(s) = \frac{|\gamma'(t(s)) \times \gamma''(t(s))|^2 t'^{(2\cdot 3)}(s)}{|\gamma'(t(s))|^6 t'^6(s)} = \frac{|\gamma' \times \gamma''|^2}{|\gamma'|^6}(t(s))$.

Zadatak 2. Neka je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva.

(a) Šta je

(i) *principalno normalno polje* N krive γ? [1]

(ii) *principalni okvir* F krive γ (objasnite sve veličine koje se pojavljuju) [2]

(b) Formulišite i dokažite *Frenetove jednačine.* [7]

(c) Neka je $F = (T, N_1, N_2)$ prilagodjeni okvir i neka je $\tilde{F} = FA$, gdje

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

sa nekom funkcijom $t \mapsto \varphi(t)$. Uvjerite se da je $\tilde{F}$ još jedan prilagodjeni okvir. Zatim izračunajte kako se strukturne jednačine (tj., κ_1, κ_2 i τ) mijenaju. [10]

Rješenje.

(a)

(i) Principalna normala je glatko vektorsko polje $s \mapsto N(s)$ tako da, za sva s:

$$|N(s)| = 1, N(s) \perp \gamma'(s) \text{ i } \gamma''(s) \in span\{\gamma'(s), N(s)\}$$

(ii) Principalni okvir je glatko preslikavanje $s \mapsto F = (T, N, B) \in SO(3)$, gdje: $T = \frac{\gamma'}{|\gamma'|}$ je jedinično tangentno vektorsko polje, N je principalna normala i $B = T \times N$ je binormala.

(b) Principalni okvir $F = (T, N, B)$ dužinom luka parametrizovane krive $s \mapsto \gamma(s)$ zadovoljava

$$F' = F \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T' = & & \kappa N & \\ N' = & -\kappa T & & +\tau B \\ B' = & & -\tau N & \end{cases}.$$

gdje su $\kappa := T' \cdot N$ i $\tau := N' \cdot B$ krivina i torzija krive γ.

Kako je $s \mapsto F(s) \in SO(3)$ imamo $F^{-1} = F^T$ i stoga

$$\Phi = F^T F' = \begin{pmatrix} T\cdot T' & T\cdot N' & T\cdot B' \\ N\cdot T' & N\cdot N' & N\cdot B' \\ B\cdot T' & B\cdot N' & B\cdot B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T\cdot N' & T\cdot B' \\ N\cdot T' & 0 & N\cdot B' \\ B\cdot T' & B\cdot N' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Očito, $\tilde{F} = FA$ će biti još jedan prilagodjeni okvir, jer sa gornjim oblikom A, $\tilde{F}e_1 = Fe_1 = T$ i A ima vrijednosti u $SO(3)$ tako da je $\tilde{F}$, sa F, s vrijednostima u $SO(3)$.

Zbog jednostavnosti, pretpostavićemo da je kriva paramtetrizovana dužinom luka, tj. $|\gamma'| \equiv 1$.

Sada izračunamo $\tilde{\Phi} = \tilde{F}^t\tilde{F}' = A^tF^t(F'A + FA') = A^t\Phi A + A^tA'$ tako da

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_1\cos\varphi - \kappa_2\sin\varphi & \kappa_1\sin\varphi - \kappa_2\cos\varphi \\ \kappa_1\cos\varphi + \kappa_2\sin\varphi & 0 & -(\tau+\varphi') \\ -\kappa_1\sin\varphi + \kappa_2\cos\varphi & \tau+\varphi' & 0 \end{pmatrix},$$

gdje κ_i i τ su krivine i torzija koje dolaze iz Φ. Stoga:

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_1 &= \kappa_1 \cos\varphi + \kappa_2 \sin\varphi, \\ \tilde{\kappa}_2 &= -\kappa_1 \sin\varphi + \kappa_2 \cos\varphi, \\ \tilde{\tau} &= \tau + \varphi'.\end{aligned}$$

Zadatak 3.

(a) Pretpostavite da je $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) \in \mathbb{R}^3$ regularna parametrizirana površ.

(i) Šta su *prva i druga fundamentalna forma* I i II površi $\mathbf{x}$? [2]

(ii) Objasnite šta to znači kada kažemo da je $\mathbf{x}$ *konformalna.* [1]

(iii) Šta znači kada kažemo da $\mathbf{x}$ parametrizira *minimalnu površ*? [2]

(b) Pokažite da je *Enneperova površ* $(u,v) \mapsto (u^3 - 3u(1+v^2), v^3 - 3v(1+u^2), 3(u^2 - v^2))$ konformalno parametrizovana minimalna površ. [7]

(c) Izračunajte drugu fundamentalnu formu helikoida. [8]

Rješenje.

(a)

(i) $\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ sa $E = |\mathbf{x}_u|^2$, $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$ i $G = |x_v|^2$.
$\mathrm{II} = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$ sa $e = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u$, $f = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v$ i $g = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v$.

(ii) $F = 0$ i $E = G$.

(iii) $\mathbf{x}$ je minimalna ako njena srednja krivina $H = \frac{\kappa_1+\kappa_2}{2} = \frac{Eg-2Ff+Ge}{2(EG-F^2)}$ nestaje.

(b) Označicemo parametrizaciju sa $\mathbf{x}$, kao i obično. Prvo provjerimo konformalnost: sa

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(u,v) &= 3(u^2 - (1+v^2), -2uv, 2u) \\ \mathbf{x}_v(u,v) &= 3(-2uv, v^2 - (1+u^2), -2v)\end{aligned}$$

koeficijenti prve fundamentalne forme postaju

$$\begin{aligned}E(u,v) &= 9\{(u^2-(1+v^2))^2 + 4u^2(1+v^2)\} &&= 9(1+u^2+v^2)^2 \\ G(u,v) &= 9\{(v^2-(1+u^2))^2 + 4v^2(1+u^2)\} &&= 9(1+u^2+v^2)^2 \\ F(u,v) &= 9\{-2uv(u^2-v^2-1+v^2-u^2-1) - 4uv\} &&= 0\end{aligned}$$

što pokazuje da $E = G$ i $F \equiv 0$ tako da je $\mathbf{x}$ konformalno.

Kako bismo provjerili da je $\mathbf{x}$ minimalno mi izračunamo

$$\Delta\mathbf{x}(u,v) = 6(u,-v,1) + 6(-u,v,-1) = (0,0,0)$$

tako da je $\mathbf{x}$ minimalna, jer je konformalna i harmonična.

(c) Helikoid možemo parametrizirati sa

$$(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, v)$$

(sa prvom fundamentalnom formom $\mathrm{I}|_{(u,v)} = \cosh^2 u \{du^2 + dv^2\}$, kao što je izračunato ranije). Stoga

$$\mathbf{x}_u(u,v) = \cosh u\,(\cos v, \sin v, 0) \quad \text{i} \quad \mathbf{x}_v(u,v) = (-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, 1)$$

tako da (vidi Problem 5.4)

$$\mathbf{N}(u,v) = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{E}(u,v) = \left(\frac{\sin v}{\cosh u}, -\frac{\cos v}{\cosh u}, \tanh u\right)$$

i

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu}(u,v) &= \sinh u\,(\cos v, \sin v, 0) \\ \mathbf{x}_{uv}(u,v) &= \cosh u\,(-\sin v, \cos v, 0) \\ \mathbf{x}_{vv}(u,v) &= -\sinh u\,(\cos v, \sin v, 0)\end{aligned}$$

tako da

$$e(u,v) = 0, \quad f(u,v) = -1 \quad \text{i} \quad g(u,v) = 0$$

i stoga, $\mathrm{II}|_{(u,v)} = -2\,dudv$.