Diferencijalna Geometrija: Test 2 23/02/2012

Nema napuštanja ispita u prvih 15 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Test traje 1 sat i 30 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 40 maksimalnih.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Zadatak 1. Neka je $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$ regularna parametrizovana površ.

(a) (i) Definišite prvu i drugu fundamentalnu formu površi σ. [1]

(ii) Napišite formule za Gaussovu krivinu K i srednju krivinu H pomoću koeficijenata prve i druge fundamentalne forme površi σ. [1]

(iii) Definišite Gaussovo preslikavanje $\mathbf{n}(u, v)$ površi σ. [1]

(b) Definišite *linijsku* i *razvojnu* površ. [2]

(c) Dokažite da je *cilindar* razvojna površ. Navedite sve razvojne površi koje znate. [4]

(d) Kako bi površ bila izometrična ravni, potrebno je i dovoljno da je Gaussova krivina $K \equiv= 0$. Skicirati dokaz, te jasno navesti sve rezultate koji se koriste. [7]

(e) Pokažite da je kupa $(r, \theta) \mapsto r\,\gamma(\theta)$, gdje je $\theta \mapsto \gamma(\theta) \in S^2$ dužinom luka parametrizovana sferična kriva, izometrična ravni. [5]

(f)

(i) Navedite *Rodriguesovu jednačinu*, rezultat koji karakterizuje pravce krivine. [2]

(ii) Pokažite da je $t \mapsto \gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ linija krivine regularne parametrizovane površi $\mathbf{x}$ ako i samo ako je $t \mapsto N(t) = \mathbf{n}(u(t), v(t))$ paralelno normalno polje duž γ. [3]

(g) Neka su $(u, v) \mapsto \mathbf{x}_1(u, v), \mathbf{x}_2(u, v) \in \mathbb{R}^3$ dvije regularne površi sa Gaussovim preslikavanjima $\mathbf{n}_1$ i $\mathbf{n}_2$. Pretpostavimo da je $\mathbf{x}_1(u, 0) = x_2(u, 0)$, to jest, površi se sijeku duž krive $u \mapsto \gamma(u) := \mathbf{x}_i(u, 0)$. Pretpostavite da je $u \mapsto \gamma(u)$ linija krivine za obje krive. Pokažite da se površi sjeku pod konstantnim uglom. [3]

(h) Objasnite šta to znači kada kažemo da je $\mathbf{x}$ *konformalna.* [1]

(i) Neka $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) = (r(u)\cos v, r(u)\sin v, h(u))$ parametrizira površ revolucije; nadjite uslove za r i h kako bi $\mathbf{x}$ bila konformalna površ. [4]

(ii) Nadjite konformalnu parametrizaciju $\mathbf{x}$ površi

$$\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = \cosh^2 z\}.$$

[4]

(i) Neka je $(u, v) \mapsto \xi(u, v)$ tangencijalno vektorsko polje duž parametrizovane površi $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$.

(i) Definišite *kovarijantni izvod* (u, v) u pravcu (λ, μ) ovog vektorskog polja. [1]

(ii) Definišite *Christoffelove simbole.* [1]

Rješenje.

(a)

(i) $\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ sa $E = |\mathbf{x}_u|^2$, $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$ i $G = |x_v|^2$.
$\mathrm{II} = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$ sa $e = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{n}_u$, $f = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{n}_v$ i $g = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{n}_v$.

(ii)

$$H = \frac{Eg - 2Ff + eG}{2(EG - F^2)}, \quad K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

(iii) Linija $t \mapsto \mathbf{x}(u,v) + t\,(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)(u,v)$ se zove <u>normalnom linijom</u> površi $\mathbf{x}$ u $\mathbf{x}(u,v)$; jedinično normalno vektorsko polje

$$\mathbf{n} = \tfrac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|} = \tfrac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

se zove <u>normalom</u> ili <u>Gaussovim preslikavanjem</u> od $\mathbf{x}$.

(b) Površ $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ se zove <u>linijska površ</u> ako prima (lokalno) parametrizaciju $\mathbf{x}$ forme

$$(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = \gamma(u) + v\,\eta(u),$$

gdje je $u \mapsto \gamma(u)$ regularlna kriva u $\mathbb{R}^3$ i $u \mapsto \eta(u) \in S^2$ jedinično vektorsko polje duž γ.

<u>Razvojna površ</u> je linijska površ $(u,v) \mapsto \gamma(u) + v\,\eta(u)$ čije je Gaussovo preslikavanje $\mathbf{n}(u,v) = \mathbf{n}(u)$ jedino zavisno o u, tj.,

$$\mathbf{n}_v \equiv 0.$$

(c) Cilindar

$$(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = (x(u), y(u), v) = \overbrace{(x(u), y(u), 0)}^{=:\gamma(u)} + v\,\overbrace{(0,0,1)}^{=:\eta(u)}$$

je onda (očito) linijska površ i ima Gaussovo preslikavanje

$$\mathbf{n}(u,v) = \tfrac{1}{\sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)}}(y'(u), -x'(u), 0),$$

koje ne zavisi o linijskom parametru v.

(d) Neka je $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = \gamma(u) + v\,\eta(u)$ razvojna površ, tj., $\mathbf{n}_v \equiv 0$; onda

$$f = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{n}_v = 0 \quad \text{and} \quad g = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{n}_v = 0$$

tako da je Gaussova krivina $K \equiv 0$. Rekli smo (i djelimično dokazali) da su razvojne površi (lokalno) izometrične ravni, tj., primaju (lokalno) izometričnu parametrizaciju.

Sada pretpostavimo da površ prima izometričnu parametrizaciju, tj., parametrizaciju $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v)$ sa $\mathrm{I} = du^2 + dv^2$. Onda, po Gaussovoj Theoremi egregium, $K \equiv 0$. Stoga:

Teorema. Kako bi površ bila izometrična ravni potrebno je da ima Gaussovu krivinu $K \equiv 0$.

S druge strane, ako

$$\begin{aligned} 0 = K &= \tfrac{(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{n}_u)(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{n}_v) - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{n}_v)(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{n}_u)}{EG - F^2} \\ &= \tfrac{(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \cdot (\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v)}{EG - F^2} \\ &= \tfrac{|\mathbf{n}, \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v|}{\sqrt{EG - F^2}}, \end{aligned}$$

onda $\mathbf{n}_u$ i $\mathbf{n}_v$ moraju biti linerno zavisne tako da $\mathbf{n}$ samo zavisi o jednom parametru (konstantna je duž odredjenih krivih na površi). Stoga tangentne ravni površi samo zavise o jednom parametru (primejetite takodjer da je udaljenost $d = \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}$ konstantna duž ovih krivih) i da, kako smo vidjeli ranije, površ mora biti razvojna površ.

Zajedno sa činjenicom da su razvojne površi izometrične ravni, dobivamo:

Teorema. Kako bi površ bila izometrična ravni dovoljno je da je njena Gaussova krivina $K \equiv 0$.

(e) Parametrizirajući Σ kao površ revolucije imamo $z = h(u)$ i $\cosh z = \sqrt{x^2 + y^2} = r(u)$; stoga $r(u) = \cosh h(u)$ tako da konformalnost znači

$$h'^2(u) \sinh^2 h(u) + h'^2(u) = \cosh^2 h(u) \iff h'^2(u) \equiv 1;$$

stoga $(u,v) \mapsto \sigma(u,v) := (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$ daje konformalnu parametrizaciju od Σ.

(f)

(i) Rodriguesova jednačina: $0 = d\mathbf{n} + \kappa d\mathbf{x}$; jednačina je zadovoljena pravcima krivine (κ je onda odgovarajuća principalna krivina) i samo sa njima.

(ii) Ako je $t \mapsto \gamma(t)$ linija krivine, onda po Rodriguesovoj formuli,
$0 \equiv N' + \kappa\gamma' = \nabla^{\perp} N + (\kappa + \frac{N' \cdot \gamma'}{|\gamma'|^2})\gamma'$ i konkretno, $\nabla^{\perp} N \equiv 0$.
Ako je $\nabla^{\perp} N \equiv 0$, onda $N' = -\kappa\gamma'$ sa nekom funkcijom κ i po Rodriguesovoj formuli, γ' je pravac krivine (sa odgovarajućom principalnom krivinom κ).

(g) Ako je $u \mapsto \gamma(u)$ linija krivine za $\mathbf{x}_i$ onda je $N_i(u) = \mathbf{n}_i(u,0)$ paralelno duž γ po (c);
stoga, ako je γ linija krivine za obje površi, onda su N_1 i N_2 paralelna normalna polja duž γ, te stoga čine konstantan ugao.

(h) $F = 0$ i $E = G$.

(i) Ovdje

$$E(u,v) = |(r'(u)\cos v, r'(u)\sin v, h'(u))|^2 = r'^2(u) + h'^2(u)$$
$$F(u,v) = (r'(u)\cos v, r'(u)\sin v, h'(u)) \cdot (-r(u)\sin v, r(u)\cos v, 0) = 0$$
$$G(u,v) = |(-r(u)\sin v, r(u)\cos v, 0)|^2 = r^2(u)$$

tako da je površ konformalna ako i samo ako $r'^2 + h'^2 = r^2$.

(ii) Parametrizirajući Σ kao površ revolucije imamo $z = h(u)$ i $\cosh z = \sqrt{x^2 + y^2} = r(u)$;
stoga $r(u) = \cosh h(u)$ tako da konformalnost znači

$$h'^2(u)\sinh^2 h(u) + h'^2(u) = \cosh^2 h(u) \iff h'^2(u) \equiv 1;$$

stoga $(u,v) \mapsto \sigma(u,v) := (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$ daje konformalnu parametrizaciju od Σ.

(i) Neka je $(u,v) \mapsto \xi(u,v)$ tangencijalni vektorsko polje duž para–metrizovane površi $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v)$; njegov kovarijantni izvod u (u,v) u pravcu (λ, μ) je

$$(\nabla_{(\lambda,\mu)}\xi)|_{(u,v)} := \{(\lambda\xi_u + \mu\xi_v) - ((\lambda\xi_u + \mu\xi_v) \cdot \mathbf{n})\,\mathbf{n}\}(u,v).$$

∇ se takodjer zove Levi-Civita konekcija. Koeficijenti Γ_{ij}^k u

$$\nabla_j(\partial_i \mathbf{x}) := \partial_j\partial_i\mathbf{x} - (\partial_j\partial_i\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \textstyle\sum_k \Gamma_{ij}^k\, \partial_k \mathbf{x}$$

se zovu Christoffelovi simboli.

$$\begin{aligned} \nabla_{(1,0)}\mathbf{x}_u &=: \Gamma_{11}^2\mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2\mathbf{x}_v, \quad \nabla_{(0,1)}\mathbf{x}_u =: \Gamma_{12}^2\mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2\mathbf{x}_v;\\ \nabla_{(1,0)}\mathbf{x}_v &=: \Gamma_{21}^2\mathbf{x}_u + \Gamma_{21}^2\mathbf{x}_v, \quad \nabla_{(0,1)}\mathbf{x}_v =: \Gamma_{22}^2\mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2\mathbf{x}_v. \end{aligned}$$