Diferencijalna Geometrija: Test 1 15/11/2013

Nema napuštanja ispita u prvih 15 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Test traje 1 sat i 30 minuta. Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 40 maksimalnih. Koristiti hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Zadatak 1. Neka je $t \mapsto \gamma(t)$ regularna parametrizirana kriva u $\mathbb{R}^3$.

(a) Posmatrajmo krivu $t \mapsto \gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$.

(i) Dokažite da je kriva γ regularna i nadjite reparametrizaciju dužinom luka krive $s \mapsto \gamma(s)$.

(ii) Izračunajte jedinično normalno vektorsko polje za γ.

(iii) Nadjite okvir $F = (T, N, B)$ prilagodjen za strip (N, γ) i izračunajte njegovu krivinu κ i torziju τ *po definiciji*.

(iv) Nadjite paralelno jedninično normalno vektorsko polje $\tilde{N}$ za γ. Možete ga zapisati u obliku

$$\tilde{N}(t) = \cos(\varphi(t))N(t) + \sin(\varphi(t))B(t),$$

gdje je $\varphi(t)$ funkcija po t koju trebate odrediti.

(b) Neka je kriva $t \mapsto \alpha(t)$ data sa

$$\alpha(t) = \Big(\frac{t + \sin t}{2}, \frac{-t + \sin t}{2}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\Big).$$

(i) Nadjite krivinu i torziju krive α.

(ii) Šta možete zaključiti o krivoj α iz njene krivine i torzije i na osnovu čega?

(iii) Izračunajte oskulatornu, normalnu i rektifirajuću ravan na krivu u proizvoljnoj tački $\gamma(t_0)$.

(c) Neka je kriva $t \mapsto \beta(t)$ data sa

$$\beta(t) = \Big(t, \frac{t^2}{\sqrt{2}}, \frac{t^3}{3}\Big).$$

(i) Nadjite krivinu i torziju krive β.

(ii) Šta možete zaključiti o krivoj β iz njene krivine i torzije i na osnovu ega?

Rješenje.

(a)

(i) Glatko vektorsko polje $t \mapsto N(t)$ tako da $N(t) \perp \gamma'(t),\ \forall t$ i $|N(t)| = 1$ zovemo <u>*(jedinično) normalno polje*</u> duž γ.

(ii) Preslikavanje $t \mapsto F(t) \in SO(3)$ se zove <u>(prilagodjeni) okvir</u> za regularnu strip (N, γ) ako

$$T(t) = F(t)e_1 = \tfrac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|},\ N(t) = F(t)e_2 \forall t$$

(iii) Normalno polje $t \mapsto N(t)$ duž $t \mapsto \gamma(t)$ se zove <u>paralelno</u> ako je

$$\nabla^{\perp} N := (N')^{\perp} = N' - (N' \cdot T)\, T \equiv 0.$$

(b)

(i) $\gamma'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1) \neq 0$, pa je kriva regularna.

(ii) Proveriti da je $N.N = 1$ i $N.\gamma = 0$.

(iii) Prilagodjeni okvir je $F = (T, N, B)$ je

$$T = \frac{\gamma'}{|\gamma'|},\ N = N,\ T = N \times B.$$

$$|\gamma'|^2 = t^2 + 2,$$

pa je stoga

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+2}}(\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1)$$

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t, -\sin t, 1)$$

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{2(t^2+2)}}(2 \sin t + t \cos t, -2 \cos t + t \sin t, t).$$

Torzija je

$$\tau = \frac{N'.B}{|\gamma'|} = \frac{1}{t^2+2}$$

(c) Polje $\tilde{N}$ je *jedinično* i normalno, pa ga možemo zapisati kao

$$\tilde{N}(t) = \cos\varphi(t) N(t) + \sin\varphi(t) B(t)$$

za neku funkciju φ. Primjetite da je

$$\nabla^{\perp} N = (N'.B)B = \frac{1}{\sqrt{t^2+2}} B,$$

$$\nabla^{\perp} B = (B'.N)N = \frac{-1}{\sqrt{t^2+2}} N.$$

Onda je za paralelno polje:

$$0 = \nabla^{\perp}\tilde{N} = -\sin\varphi.\varphi' N + \cos\varphi \nabla^{\perp} N + \cos\varphi.\varphi' B + \sin\varphi \nabla^{\perp} B$$

$$= -\sin\varphi.\varphi' N + \frac{\cos\varphi}{\sqrt{t^2+2}} B + \cos\varphi.\varphi' B - \frac{\sin\varphi}{\sqrt{t^2+2}} N$$

$$= (\varphi' + \frac{1}{\sqrt{t^2+2}})(-\sin\varphi N + \cos\varphi B).$$

Stoga

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{-1}{\sqrt{t^2+2}} dt = arcsinh(\frac{t}{\sqrt{2}}) + \varphi_0$$

daje rješenje.

$$\tilde{N}(t) = \cos(arcsinh(\frac{t}{\sqrt{2}}) + \varphi_0)N(t) + \sin(arcsinh(\frac{t}{\sqrt{2}}) + \varphi_0)B(t).$$

(d)

(i) Prvo parametrišimo α dužinom luka.

$$\alpha'(t) = ((1+\cos t)/2, (-1+\cos t)/2, -\sin t/\sqrt{2}),$$

pa je $|\alpha'| = 1$, pa je kriva već parametrisana dužinom luka. Imamo da je

$$\alpha''(t) = (-\sin t/2, -\sin t/2, -\cos t/\sqrt{2}),$$

tako da je

$$\kappa = |\alpha''| = 1/\sqrt{2}.$$

Imamo da su

$$T = \big(\frac{1+\cos t}{2}, \frac{-1+\cos t}{2}, \frac{-\sin t}{\sqrt{2}}\big),$$

$$N = \big(\frac{-\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{-\sin t}{\sqrt{2}}, -\cos t\big),$$

$$B = T \times N = \big(\frac{\cos t - 1}{2}, \frac{\cos t + 1}{2}, \frac{-\sin t}{\sqrt{2}}\big).$$

Stoga je

$$\tau = -B' \cdot N = \big(\sin t/2, \sin t/2, \cos t/\sqrt{2}\big) = -1/\sqrt{2}.$$

(ii) Budui da su krivina i torzija konstantne, u pitanju je kružni heliks po fundamentalnoj teoremi za prostorne krive.

(e)

(i) Prisjetimo se da je $\mathcal{O}(t) = \{P \,|\, (P - \gamma(t)) \cdot B(t) = 0\}$ oskulatorna ravan krive u $\gamma(t)$;

- $\{P \,|\, (P - \gamma(t)) \cdot T(t) = 0\}$ je normalna ravan krive u $\gamma(t)$ (očito: kriva je sječe ortogonalno) i
- $\{P \,|\, (P - \gamma(t)) \cdot N(t) = 0\}$ je rektifirajuća ravan krive γ u $\gamma(t)$.

(ii) Možemo napisati $P_0 = \gamma + \alpha T + \beta B$ sa odgovarajućim funkcijama $s \mapsto \alpha(s), \beta(s) \in \mathbb{R}$; uzimajući izvod nalazimo, jer su T, N i B linearno nezavisni,

$$0 = (1+\alpha')T + (\alpha\kappa - \beta\tau)N + \beta' B \iff 0 \equiv 1 + \alpha' = \beta' = \alpha\kappa - \beta\tau.$$

Konkretno, imamo $a, b \in \mathbb{R}$ takve da: $\beta \equiv b, \alpha(s) = a - s$;
onda: $0 = \alpha(s)\kappa(s) - \beta(s)\tau(s) = (a-s)\kappa(s) = b\tau(s)$