Diferencijalna Geometrija: Pismeni dio ispita 21/04/2008

Nema napuštanja ispita u prvih 30 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Ispit traje 2 sata i 15 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 60 maksimalnih, po 20 za svaki zadatak.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Zadatak 1. Neka je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva.

(a) Šta je

(i) *principalno normalno polje* N krive γ? [2]

(ii) *principalni okvir* F krive γ (objasnite sve veličine koje se pojavljuju) [2]

(b) Formulišite *Frenetove jednačine.* [3]

(c) Dokažite da Frenetove jednačine vrijede. [5]

(d) Neka $F = (T, N, B)$ označava principalni okvir dužinom luka parametrizovane krive $s \mapsto \gamma(s)$ i neka su κ i τ krivina i torzija krive γ. Definišimo "Darboux-ovo vektorsko polje"

$$\delta := N \times N' = \tau\, T + \kappa\, B.$$

Pokazati da su Frenetove jednačine ekvivalentne jednačinama

$$T' = \delta \times T, \quad N' = \delta \times N, \quad B' = \delta \times B.$$

[8]

Rješenje.

(a)

(i) Principalna normala je glatko vektorsko polje $s \mapsto N(s)$ tako da, za sva s:

$$|N(s)| = 1, N(s) \perp \gamma'(s) \text{ i } \gamma''(s) \in span\{\gamma'(s), N(s)\}$$

(ii) Principalni okvir je glatko preslikavanje $s \mapsto F = (T, N, B) \in SO(3)$, gdje: $T = \frac{\gamma'}{|\gamma'|}$ je jedinično tangentno vektorsko polje, N je principalna normala i $B = T \times N$ je binormala.

(b) Principalni okvir $F = (T, N, B)$ dužinom luka parametrizovane krive $s \mapsto \gamma(s)$ zadovoljava

$$F' = F \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T' = & & \kappa N & \\ N' = & -\kappa T & & +\tau B \\ B' = & & -\tau N & \end{cases}.$$

gdje su $\kappa := T' \cdot N$ i $\tau := N' \cdot B$ krivina i torzija krive γ.

(c) Jer je $s \mapsto F(s) \in SO(3)$ imamo $F^{-1} = F^T$ i stoga

$$\Phi = F^T F' = \begin{pmatrix} T \cdot T' & T \cdot N' & T \cdot B' \\ N \cdot T' & N \cdot N' & N \cdot B' \\ B \cdot T' & B \cdot N' & B \cdot B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T \cdot N' & T \cdot B' \\ N \cdot T' & 0 & N \cdot B' \\ B \cdot T' & B \cdot N' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Pretpostavimo da naš okvir $F = (T, N, B)$ zadovoljava Frenetove jednačine i neka je $\delta := N \times N'$; onda, prvo,

$$\delta = N \times (-\kappa T + \tau B) = \kappa B + \tau T$$

kako smo tvrdili jer F uzima vrijednosti u $SO(3)$; drugo,

$$\begin{array}{rclcl} T' - \delta \times T &=& \kappa N - (\tau T + \kappa B) \times T &=& 0, \\ N' - \delta \times N &=& -\kappa T + \tau B - (\tau T + \kappa B) \times N &=& 0, \\ B' - \delta \times B &=& -\tau N - (\tau T + \kappa B) \times B &=& 0. \end{array}$$

Stoga, Frenetove jednačine impliciraju jednačine $X' = \delta \times X$, gdje $X = T, N, B$.

S druge strane, pretpostavimo da je $s \mapsto F(s) = (T(s), N(s), B(s)) \in SO(3)$ okvir koji zadovoljava $X' = \delta \times X$ za $X = T, N, B$ sa $\delta := \tau T + \kappa B$. Onda, obrčući gornju pretpostavku, sobivamo

$$\begin{array}{rclcl} 0 &=& T' - \delta \times T &=& T' - \kappa N, \\ 0 &=& N' - \delta \times N &=& N' + \kappa T - \tau B, \\ 0 &=& B' - \delta \times B &=& B' + \tau N. \end{array}$$

Stoga, dobijamo Frenetove jednačine.

Zadatak 2.

(a) Neka je kriva $t \mapsto \alpha(t)$ data sa

$$\alpha(t) = \left(\frac{t + \sin t}{2}, \frac{-t + \sin t}{2}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right).$$

(i) Nadjite krivinu i torziju krive α. [8]

(ii) Neka je $t \mapsto \beta(t)$ druga kriva koja ima istu krivinu i torziju kao kriva α. Kakav je odnos izmedju α i β? [2]

(b) Dokažite da je $t \mapsto \gamma(t)$ prava linija ako su $\gamma''(t)$ i $\gamma'(t)$ linearno zavisne za sva t. [5]

(c) Neka je $s \mapsto \kappa(s)$ funkcija i definišimo $\varphi(s) := \int_{s_0}^{s} \kappa(s) ds$. Provjerite da

$$\gamma(s) := \left(\int_{s_0}^{s} \cos \varphi(s) ds, \int_{s_0}^{s} \sin \varphi(s) ds, 0\right)$$

definiše dužinom luka parametrizovanu planarnu krivu sa krivinom $\kappa(s)$. [5]

Rješenje.

(a)

(i) Prvo parametrišimo α dužinom luka.

$$\alpha'(t) = ((1 + \cos t)/2, (-1 + \cos t)/2, -\sin t/\sqrt{2}),$$

pa je $|\alpha'| = 1$, pa je kriva već parametrisana dužinom luka. Imamo da je

$$\alpha''(t) = (-\sin t/2, -\sin t/2, -\cos t/\sqrt{2}),$$

tako da je

$$\kappa = |\alpha''| = 1/\sqrt{2}.$$

Imamo da su

$$T = \left(\frac{1 + \cos t}{2}, \frac{-1 + \cos t}{2}, \frac{-\sin t}{\sqrt{2}}\right),$$

$$N = \left(\frac{-\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{-\sin t}{\sqrt{2}}, -\cos t\right),$$

$$B = T \times N = \left(\frac{\cos t - 1}{2}, \frac{\cos t + 1}{2}, \frac{-\sin t}{\sqrt{2}}\right).$$

Stoga je

$$\tau = -B' \cdot N = \big(\sin t/2, \sin t/2, \cos t/\sqrt{2}\big) = -1/\sqrt{2}.$$

(ii) Po Fundamentalnoj teoremi za prostorne krive, β je jednaka α do rigidnog kretanja.

(b) Pretpostavićemo da je γ regularna kriva tako da je $\gamma'(t) \neq 0$ za sva t. Jedan mogući nastavak je da pretpostavimo da je γ parametrizovana dužinom luka (reparametrizacija dužinom luka ne mijenja pretpostavku da su γ'' i γ' linearno zavisne!); Onda se tvrdnja može dokazati direktnom integracijom. Drugi način je slijedeći, radeći sa proizvoljnom parametrizacijom: Činjenica da su γ'' i γ' linearno zavisne se može formulisati kao $\gamma''(t) = \lambda(t)\gamma'(t)$ (jer $\gamma' \neq 0$) za pogodnu funkciju $t \mapsto \lambda(t) \in \mathbb{R}$. Fiksirajmo t_0 i $n_1, n_2 \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ tako da $n_1, n_2 \perp \gamma'(t_0)$ i $n_1 \perp n_2$ (konkretno, n_1 i n_2 su linearno nezavisni). Sada posmatrajmo funkcije

$$t \mapsto g_i(t) := n_i \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)).$$

Spoznajemo da

$$g_i(t_0) = g_i'(t_0) = 0 \quad \text{i} \quad g_i''(t) = \lambda(t) g_i'(t),$$

to jest, g_i zadovoljavaju linearnu običnu diferencijalnu jednačinu, koja ima jedinstveno, globalno definisano rješenje $g_i \equiv 0$. Stoga, $t \mapsto \gamma(t)$ zadovoljava jednačine prave:

$$n_1 \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)) = n_2 \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)) = 0.$$

(c) Ovo je pravolinijski po diferencijaciji: imamo

$$\gamma' = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

po FTPK, tako da je $|\gamma'| \equiv 1$ i γ je parametrizovana dužinom luka. Kako je (x, y)-ravan fiksna oskulatorna ravan za cijelu krivu možemo izabrati kao principalnu normalu,

$$N := (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$

(ovo dobijemo 90° rotacijom iz $T = \gamma'$ u (x, y)-ravni u pozitivnom smislu); sa ovim izborom principalne normale

$$T' \cdot N = (-\varphi' \sin\varphi, \varphi' \cos\varphi, 0) \cdot (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) = \varphi' = \kappa$$

i kriva ima krivinu κ (obrćući principalnu normalu bi rezultiralo u krivini $-\kappa$)

Zadatak 3. Neka je $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ regularna površ.

(a)

(i) Definišite prvu i drugu fundamentalnu I i $\mathbb{I}$ površi $\mathbf{x}$. [2]

(ii) Šta znači kada kažemo da je $\mathbf{x}$ *konformalna*? [1]

(b) Pokažite da postoji jedinstveno polje linearnih preslikavanja $\mathrm{S} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (*operator oblika*), tako da

$$\mathbb{I}(.,.) = \mathrm{I}(., \mathrm{S}.);$$

Pokazati da je S simetrično u odnosu na I, tj., $\mathrm{I}(., \mathrm{S}.) = \mathrm{I}(\mathrm{S}., .)$. [4]

(c) Navedite i dokažite Gaussovu Theoremu Egregium, jasno navodeći sve druge rezultate koje koristite. [5]

(d)

(i) Šta znači kada kažemo da $\mathbf{x}$ parametrizira *minimalnu površ*? [2]

(ii) Pokažite da je helikoid minimalna površ i odredite njegove asimptotske linije i linije krivine.

[6]

Rješenje.

(a)

(i) $\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ sa $E = |\mathbf{x}_u|^2$, $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$ i $G = |x_v|^2$.
$\mathrm{II} = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$ sa $e = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u$, $f = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v$ i $g = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v$.

(ii) $F = 0$ i $E = G$.

(b) Ako napišemo fundamentalne forme u matričnoj formi,

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathrm{II} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

spozaćemo da $\mathrm{II}(.,.) = \mathrm{I}(.,S.)$ ako i samo ako

$$\begin{aligned} \mathrm{S} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} Ge-Ff & Gf-Fg \\ Ef-Fe & Eg-Ff \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Simetrija S u odnosu na I prati direktno:

$$\mathrm{I}(\mathrm{S}.,.) - \mathrm{I}(.,\mathrm{S}.) = \mathrm{S}^t\mathrm{I} - \mathrm{IS} = \mathrm{II}^t - \mathrm{II} = 0$$

jer je druga fundamentalna forma simetrična.

(c) Gausova krivina K samo zavisi o I:

$$K = \textit{funkcija od } E,\ F,\ G \textit{ i njihovih izvoda.} \qquad (G)$$

Izračunaćemo

$$\begin{aligned} K &= \tfrac{eg-f^2}{EG-F^2} \\ &= \tfrac{|\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_{uu}|\,|\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_{vv}| - |\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_{uv}|^2}{(EG-F^2)^2} \\ &= \tfrac{|(\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_{uu})^t(\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_{vv})| - |(\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_{uv})^t(\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_{uv})|}{(EG-F^2)^2} \\ &= \tfrac{(EG-F^2)(\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_{vv} - \mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_{uv}) + (\text{I- i } \nabla\text{-stvari})}{(EG-F^2)^2} \end{aligned}$$

tako da K može, sa ∇, biti izračunato iz I po slijedećem rezultatu : $\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_{vv} - \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_{uv} = -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu}$.

(d) Helikoid može biti parametrisan sa

$$(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, v)$$

sa prvom i drugom fundamentalnom formom

$$\mathrm{I}|_{(u,v)} = \cosh^2 u \,\{du^2 + dv^2\} \quad \text{i} \quad \mathrm{II}|_{(u,v)} = -2\,dudv,$$

kako je izračunato ranije. Stoga

$$\mathrm{S}|_{(u,v)} = \tfrac{1}{\cosh^2 u} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

što očito ima $2H = \operatorname{tr} \mathrm{S} \equiv 0$.

Jednačine za linije krivine i asimptotske linije postaju

$$0 = (Ef - Fe)\,u'^2 + (Eg - Ge)\,u'v' + (Fg - Gf)\,v'^2 = \cosh^2 u\{-u'^2 + v'^2\}$$

i

$$0 = e\,u'^2 + 2f\,u'v' + g\,v'^2 = -2\,u'v',$$

respektivno. Stoga su asimptotske linije parametarske linije $u \equiv const$ i $v \equiv const$ i linije krivine su linije $u \pm v \equiv const$.