Diferencijalna Geometrija: Pismeni dio ispita 18/09/2008

Nema napuštanja ispita u prvih 30 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Ispit traje 2 sata i 15 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 60 maksimalnih, po 20 za svaki zadatak.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Zadatak 1. Neka je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva.

(a) Šta je

(i) *principalno normalno polje* N krive γ? [1]

(ii) *principalni okvir* F krive γ (objasnite sve veličine koje se pojavljuju) [2]

(b) Formulišite i dokažite *Frenetove jednačine.* [7]

(c) Neka je $F = (T, N_1, N_2)$ prilagodjeni okvir i neka je $\tilde{F} = FA$, gdje

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

sa nekom funkcijom $t \mapsto \varphi(t)$. Uvjerite se da je $\tilde{F}$ još jedan prilagodjeni okvir. Zatim izračunajte kako se strukturne jednačine (tj., κ_1, κ_2 i τ) mijenaju. [10]

Rješenje.

(a)

(i) Principalna normala je glatko vektorsko polje $s \mapsto N(s)$ tako da, za sva s:

$$|N(s)| = 1, N(s) \perp \gamma'(s) \text{ i } \gamma''(s) \in span\{\gamma'(s), N(s)\}$$

(ii) Principalni okvir je glatko preslikavanje $s \mapsto F = (T, N, B) \in SO(3)$, gdje: $T = \frac{\gamma'}{|\gamma'|}$ je jedinično tangentno vektorsko polje, N je principalna normala i $B = T \times N$ je binormala.

(b) Principalni okvir $F = (T, N, B)$ dužinom luka parametrizovane krive $s \mapsto \gamma(s)$ zadovoljava

$$F' = F \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T' = & & \kappa N & \\ N' = & -\kappa T & & +\tau B \\ B' = & & -\tau N & \end{cases}.$$

gdje su $\kappa := T' \cdot N$ i $\tau := N' \cdot B$ krivina i torzija krive γ.

Kako je $s \mapsto F(s) \in SO(3)$ imamo $F^{-1} = F^T$ i stoga

$$\Phi = F^T F' = \begin{pmatrix} T \cdot T' & T \cdot N' & T \cdot B' \\ N \cdot T' & N \cdot N' & N \cdot B' \\ B \cdot T' & B \cdot N' & B \cdot B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T \cdot N' & T \cdot B' \\ N \cdot T' & 0 & N \cdot B' \\ B \cdot T' & B \cdot N' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Očito, $\tilde{F} = FA$ će biti još jedan prilagodjeni okvir, jer sa gornjim oblikom A, $\tilde{F}e_1 = Fe_1 = T$ i A ima vrijednosti u $SO(3)$ tako da je $\tilde{F}$, sa F, s vrijednostima u $SO(3)$.

Zbog jednostavnosti, pretpostavićemo da je kriva paramtetrizovana dužinom luka, tj. $|\gamma'| \equiv 1$.

Sada izračunamo $\tilde{\Phi} = \tilde{F}^t \tilde{F}' = A^t F^t (F'A + FA') = A^t \Phi A + A^t A'$ tako da

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_1 \cos\varphi - \kappa_2 \sin\varphi & \kappa_1 \sin\varphi - \kappa_2 \cos\varphi \\ \kappa_1 \cos\varphi + \kappa_2 \sin\varphi & 0 & -(\tau + \varphi') \\ -\kappa_1 \sin\varphi + \kappa_2 \cos\varphi & \tau + \varphi' & 0 \end{pmatrix},$$

gdje κ_i i τ su krivine i torzija koje dolaze iz Φ. Stoga:

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_1 &= \kappa_1 \cos\varphi + \kappa_2 \sin\varphi, \\ \tilde{\kappa}_2 &= -\kappa_1 \sin\varphi + \kappa_2 \cos\varphi, \\ \tilde{\tau} &= \tau + \varphi'. \end{aligned}$$

Zadatak 2.

(a) Pretpostavite da je $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) \in \mathbb{R}^3$ regularna parametrizirana površ.

(i) Šta je *prva fundamentalna forma* I površi $\mathbf{x}$? [1]

(ii) Objasnite šta to znači kada kažemo da je $\mathbf{x}$ *konformalna.* [1]

(b) Neka $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) = (r(u) \cos v, r(u) \sin v, h(u))$ parametrizira površ revolucije; nadjite uslove za r i h kako bi $\mathbf{x}$ bila konformalna površ. [3]

(c) Pokažite da je površ $\Sigma_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = \cosh^2 z\}$ minimalna površ. [6]

(d) Nadjite konformalnu parametrizaciju za

$$\Sigma_2 = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z^2 < 1\}.$$

Provjerite rezultat! [9]

Rješenje.

(a)

(i) $\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ sa $E = |\mathbf{x}_u|^2$, $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$ i $G = |x_v|^2$.

(ii) $F = 0$ i $E = G$.

(b) Ovdje

$$E(u, v) = |(r'(u) \cos v, r'(u) \sin v, h'(u))|^2 = r'^2(u) + h'^2(u)$$

$$F(u, v) = (r'(u) \cos v, r'(u) \sin v, h'(u)) \cdot (-r(u) \sin v, r(u) \cos v, 0) = 0$$

$$G(u, v) = |(-r(u) \sin v, r(u) \cos v, 0)|^2 = r^2(u)$$

tako da je površ konformalna ako i samo ako $r'^2 + h'^2 = r^2$.

(c) Prvo moramo parametrizovati površ konfomalno. Parametrizirajući Σ_1 kao površ revolucije imamo $z = h(u)$ i $\cosh z = \sqrt{x^2 + y^2} = r(u)$;
stoga $r(u) = \cosh h(u)$ tako da konformalnost znači

$$h'^2(u) \sinh^2 h(u) + h'^2(u) = \cosh^2 h(u) \iff h'^2(u) \equiv 1;$$

stoga $(u, v) \mapsto \sigma(u, v) := (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$ daje konformalnu parametrizaciju od Σ_1.
Tako imamo da je $E(u, v) = G(u, v) = \cosh^2 u$ i $F = 0$;
onda je $\mathbf{N}(u, v) = \frac{1}{r(u)}(-h'(u) \cos v, -h'(u) \sin v, r'(u)) = (-\frac{\cos v}{\cosh u}, -\frac{\sinh u \sin v}{\cosh u}, \tanh u)$ i

$$e(u, v) = -(\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1) \cdot (\frac{\sinh u \cos v}{\cosh^2 u}, \frac{\sinh u \sin v}{\cosh^2 u}, \frac{1}{\cosh^2 u}) = -1,$$

$$f(u,v) = -(\sinh u\cos v, \sinh u \sin v, 1)\cdot(\frac{\sin v}{\cosh u}, -\frac{\cos v}{\cosh u}, 0) = 0,$$

$$g(u,v) = -(-\cosh u\sin v, \cosh u\cos v, 0)\cdot(\frac{\sin v}{\cosh u}, -\frac{\cos v}{\cosh u}, 0) = 1,$$

tako da imamo $H(u,v) = \frac{\cosh^2 u\cdot 1 - 2\cdot 0 + \cosh^2 u(-1)}{2\cosh^4 u} = 0.$

(d) Parametrišemo Σ_2 (što je jedinična sfera probijena na svojim sjevernim i južnim polovima) kao površ revolucije:

$$(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) := (r(u)\cos v, r(u)\sin v, h(u))$$

sa funkcijama $u \mapsto r(u) \in (0,\infty)$ i $u \mapsto h(u) \in \mathbb{R}$. Koeficijenti prve fundamentalne forme onda postaju

$$E = |\mathbf{x}_u|^2 = r'^2 + h'^2, \quad F = \mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v = 0, \quad G = |\mathbf{x}_v|^2 = r^2.$$

Stoga konformalnost čita

$$r^2 = r'^2 + h'^2;$$

zajedno sa jedačinom sfere, $r^2 + h^2 = 1$ izvedemo diferencijalnu jednačinu za h:

$$1 - h^2 = \frac{h^2 h'^2}{1-h^2} + h'^2 \quad \Leftrightarrow \quad h'^2 = (1-h^2)^2;$$

rješenje ove (Riccatijeve) jednačine je $h(u) = \tanh u$. Sa ovim dobijemo $r(u) = \sqrt{1-h^2(u)} = \frac{1}{\cosh u}$ i stoga

$$\mathbf{x}(u,v) = (\frac{\cos v}{\cosh u}, \frac{\sin v}{\cosh u}, \tanh u).$$

Kako bismo završili, provjerimo značajke:

$$(\frac{\cos v}{\cosh u})^2 + (\frac{\sin v}{\cosh u})^2 + (\tanh u)^2 = 1 \quad \text{i} \quad (\tanh u)^2 < 1,$$

u stvari, $\tanh(\mathbb{R}) = (-1,1)$ tako da $\mathbb{R}^2 \ni (u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) \in \Sigma_2$ pokriva Σ_2 u potpunosti; i konformalnost:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x}_u(u,v) & = & \frac{1}{\cosh u}(-\tanh u\cos v, -\tanh u \sin v, \frac{1}{\cosh u}) \\ \mathbf{x}_v(u,v) & = & \frac{1}{\cosh u}(-\sin v, \cos v, 0) \end{array}$$

tako da

$$E(u,v) = \frac{1}{\cosh^2 u} = G(u,v) \quad \text{i} \quad F(u,v) = 0.$$

Zadatak 3.

(a) Navedite i *dokažite Rodriguesovu jednačinu*, rezultat koji karakterizuje pravce krivine. Navedite sve pomoćne rezultate koje budete koristili. [2+4]

(b) Neka je $(u,v) \mapsto \xi(u,v)$ tangencijalno vektorsko polje duž para–metrizovane površi $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v)$.

(i) Definišite *kovarijantni izvod* (u,v) u pravcu (λ,μ) ovog vektorskog polja. [3]

(ii) Definišite *Christoffelove simbole.* [2]

(c) Neka je $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v)$ paramterizacija linijom krivine površi sa konstantnom Gauss -ovom krivinom $K \equiv -1$ tako da, bez gubitka generalnosti, $\kappa_1 = \tan\varphi$ i $\kappa_2 = -\cot\varphi$ sa odgovarajućom funkcijom φ. Pokažite da postoji reparametrizacija linijom krivine, $u = u(\tilde{u})$ i $v = v(\tilde{v})$, tako da

$$\tilde{\mathrm{I}} = \cos^2\varphi \, d\tilde{u}^2 + \sin^2\varphi \, d\tilde{v}^2 \quad \text{i} \quad \tilde{\mathrm{I\!I}} = \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi \,(du^2 - dv^2).$$

(Pomoć: pokažite da je $(\frac{E}{\cos^2\varphi})_v = (\frac{G}{\sin^2\varphi})_u = 0$ iz Codazzijevih jednačina.) [9]

Rješenje.

(a) Rodriguesova jednačina: $d_{(u,v)}\mathbf{x}(\lambda,\mu)$ je pravac krivine ako i samo ako

$$\exists \kappa \in \mathbb{R} : (d_{(u,v)}\mathbf{N} + \kappa\, d_{(u,v)}\mathbf{x}) \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = 0;$$

κ je onda odgovarajuća principalna krivina. Ekvivalentno: $0 = d\mathbf{N} + \kappa d\mathbf{x}$; jednačina je zadovoljena pravcima krivine (κ je onda odgovarajuća principalna krivina) i samo sa njima.

Dokaz. Po lemi iz predavanja koja tvrdi da $d_{(u,v)}\mathbf{N} = -d_{(u,v)}\mathbf{x} \circ \mathrm{S}|_{(u,v)}$. ili, ekvivalentno, $\mathrm{S}|_{(u,v)} = -(d_{(u,v)}\mathbf{x})^{-1} \circ d_{(u,v)}\mathbf{N}$, imamo

$$(d_{(u,v)}\mathbf{N} + \kappa\, d_{(u,v)}\mathbf{x}) \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = d_{(u,v)}\mathbf{x}\,(\kappa \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} - \mathrm{S}|_{(u,v)} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix})$$

tako da $(d_{(u,v)}\mathbf{N} + \kappa\, d_{(u,v)}\mathbf{x}) \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = 0$ ako i samo ako $\kappa \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \mathrm{S}|_{(u,v)} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ jer $d_{(u,v)}\mathbf{x}$ injektira.

(b) Neka je $(u,v) \mapsto \xi(u,v)$ tangencijalni vektorsko polje duž para–metrizovane površi $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v)$; njegov <u>kovarijantni izvod</u> u (u,v) u pravcu (λ,μ) je

$$(\nabla_{(\lambda,\mu)}\xi)|_{(u,v)} := \{(\lambda\xi_u + \mu\xi_v) - ((\lambda\xi_u + \mu\xi_v)\cdot\mathbf{N})\,\mathbf{N}\}(u,v).$$

∇ se takodjer zove <u>Levi-Civita konekcija</u>. Koeficijenti Γ^k_{ij} u

$$\nabla_j(\partial_i\mathbf{x}) := \partial_j\partial_i\mathbf{x} - (\partial_j\partial_i\mathbf{x}\cdot\mathbf{N})\mathbf{N} = \textstyle\sum_k \Gamma^k_{ij}\,\partial_k\mathbf{x}$$

se zovu <u>Christoffelovi simboli</u>.

$$\begin{array}{ll} \nabla_{(1,0)}\mathbf{x}_u =: \Gamma^2_{11}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{11}\mathbf{x}_v, & \nabla_{(0,1)}\mathbf{x}_u =: \Gamma^2_{12}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{12}\mathbf{x}_v; \\ \nabla_{(1,0)}\mathbf{x}_v =: \Gamma^2_{21}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{21}\mathbf{x}_v, & \nabla_{(0,1)}\mathbf{x}_v =: \Gamma^2_{22}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{22}\mathbf{x}_v. \end{array}$$

(c) Iz Codazzijevih jednačina

$$E_v = -2E\tfrac{(\kappa_1)_v}{\kappa_1-\kappa_2} = -2E\varphi_v\tan\varphi \quad \text{i} \quad G_u = 2G\tfrac{(\kappa_2)_u}{\kappa_1-\kappa_2} = 2G\varphi_u\cot\varphi$$

tako da

$$(\tfrac{E}{\cos^2\varphi})_v = \tfrac{1}{\cos^2\varphi}\{E_v + 2E\varphi_v \tan\varphi\} = 0, \quad \text{i} \quad (\tfrac{G}{\sin^2\varphi})_u = \tfrac{1}{\sin^2\varphi}\{G_u - 2G\varphi_u \cot\varphi\} = 0.$$

Kao posljedica ovoga, možemo riješiti diferencijalne jednačine

$$u' = \tfrac{\cos\varphi}{\sqrt{E}}(u) \quad \text{and} \quad v' = \tfrac{\sin\varphi}{\sqrt{G}}(v)$$

sa dvije funkcije $u = u(\tilde{u})$ i $v = v(\tilde{v})$ jedne promjenjljive kako bismo dobili, za $\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{u},\tilde{v}) = \mathbf{x}(u(\tilde{u}), v(\tilde{v}))$:

$$\tilde{\mathrm{I}} = (Eu'^2)\, d\tilde{u}^2 + (Gv'^2)\, d\tilde{v}^2 = \cos^2\varphi\, d\tilde{u}^2 + \sin^2\varphi\, d\tilde{v}^2$$

i

$$\tilde{\mathrm{II}} = \kappa_1 \cos^2\varphi\, d\tilde{u}^2 + \kappa_2 \sin^2\varphi\, d\tilde{v}^2 = \sin\varphi\cos\varphi\,\{d\tilde{u}^2 - d\tilde{v}^2\} = \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\,\{d\tilde{u}^2 - d\tilde{v}^2\}.$$