Diferencijalna Geometrija: Pismeni dio ispita 26/09/2008

Nema napuštanja ispita u prvih 30 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Ispit traje 2 sata i 15 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 60 maksimalnih, po 20 za svaki zadatak.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Zadatak 1. Neka je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva.

(a) Definišite *jedinično tangentno vektorsko polje* T i *krivinu* κ. [2]

(b) Pokažite da je krivina identično jednaka nuli ako i samo ako slika krive γ leži na pravoj. [5]

(c) Definišite *principalno normalno vektorsko polje* N, *binormalu* B i *torziju* τ. Navedite i dokažite *Frenet-Serret formule* za γ. [5]

(d) Pokažite da je odnos τ/κ konstantan ako i samo ako postoji konstantni jedinični vektor u koji čini konstantan ugao θ sa tangentnim vektorskim poljem T, tj. $T \cdot u = \cos\theta$. Kako se u ovom slučaju zove kriva γ? [8]

Rješenje.

(a) Ako je $\gamma \mapsto \gamma(s)$ parametrizovana dužinom luka, onda

- $T(s) := \gamma'(s)$ definiše <u>jedinično tangentno vektorsko polje</u> i
- $0 = 1' = (T \cdot T)'(s) = T(s) \cdot T'(s)$ tako da $T'(s) \parallel N(s)$ i N može biti definisano normalizacijom T' sve dok T' nije nestalo.

Onda se $K(s) := T'(s)$ zove <u>vektorsko polje krivine</u> krive γ i

$$\kappa(s) := T'(s) \cdot N(s) = K(s) \cdot N(s)$$

se zove njenom <u>krivinom</u>.

(b) Ako je $\gamma(s) = p + qs$, $p, q \in R^3$, $|q| = 1$, onda je $T(s) = q$ konstantno i $T'(s) = 0$, pa je stoga $\kappa(s) = 0$.

Obratno, ako je $\kappa(s) = 0$, onda je T konstatno, $T(s) = q$ recimo. Integrirajući $\gamma'(s) = q$, dobivamo $\gamma(s) = p + qs$, gdje je $p = \gamma(0)$.

(c) Principalna normala je glatko vektorsko polje $s \mapsto N(s)$ tako da, za sva s:

$$|N(s)| = 1, N(s) \perp \gamma'(s) \text{ i } \gamma''(s) \in span\{\gamma'(s), N(s)\}.$$

Vektorsko polje $B := T \times N$ zovemo <u>binormalno (vektorsko polje)</u> krive. Torzija je

$$\tau(s) = N'(s) \cdot B(s) = N'(s) \cdot (T(s) \times N(s)).$$

Principalni okvir $F = (T, N, B)$ dužinom luka parametrizovane krive $s \mapsto \gamma(s)$ zadovoljava

$$F' = F \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T' = & & \kappa N & \\ N' = & -\kappa T & & +\tau B \\ B' = & & -\tau N & \end{cases}.$$

gdje su $\kappa := T' \cdot N$ i $\tau := N' \cdot B$ krivina i torzija krive γ.

Jer je $s \mapsto F(s) \in SO(3)$ imamo $F^{-1} = F^T$ i stoga

$$\Phi = F^T F' = \begin{pmatrix} T \cdot T' & T \cdot N' & T \cdot B' \\ N \cdot T' & N \cdot N' & N \cdot B' \\ B \cdot T' & B \cdot N' & B \cdot B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T \cdot N' & T \cdot B' \\ N \cdot T' & 0 & N \cdot B' \\ B \cdot T' & B \cdot N' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Krivu $t \mapsto \gamma(t)$ zovemo <u>(opšti) heliks</u> ako njene tangente čine konstantan ugao sa fiksnim pravcem $a \in \mathbb{R}^3$ u prostoru, tj., $a \cdot T \equiv const$.

Pretpostavimo da je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizovan (opšti) heliks. Onda

$$0 = (a \cdot T)' = \kappa\, a \cdot N,$$

to jest, ako $\kappa \neq 0$, onda je a paralelno sa rektifirajućom ravni,

$$a = \lambda T + \mu B$$

sa pogodnim funkcijama λ i μ. Diferencirajući nalazimo da

$$0 = a' = \lambda' T + (\lambda\kappa - \mu\tau)\, N + \mu' B,$$

to jest, λ i μ su konstantne i odnos $\frac{\tau}{\kappa} \equiv \frac{\lambda}{\mu}$ je konstantan.

Obratno, ako $\frac{\tau}{\kappa} \equiv const$ za krivu $s \mapsto \gamma(s)$ biramo $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da

$$0 = \kappa \cos\alpha - \tau \sin\alpha$$

kako bismo dobili

$$(\cos\alpha\, T + \sin\alpha\, B)' = (\kappa\cos\alpha - \tau\sin\alpha)\, N \equiv 0.$$

To jest, $a := \cos\alpha\, T + \sin\alpha\, B$ je konstantan pravac koji čini konstantan ugao α sa T jer je $a \cdot T \equiv \cos\alpha$.

Zadatak 2.

(a) Neka je kriva $t \mapsto \alpha(t)$ data sa

$$\alpha(t) = \Big(\frac{t + \sin t}{2}, \frac{-t + \sin t}{2}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\Big).$$

(i) Nadjite krivinu i torziju krive α. [8]

(ii) Neka je $t \mapsto \beta(t)$ druga kriva koja ima istu krivinu i torziju kao kriva α. Kakav je odnos izmedju α i β? [2]

(b) Dokažite da je $t \mapsto \gamma(t)$ prava linija ako su $\gamma''(t)$ i $\gamma'(t)$ linearno zavisne za sva t. [5]

(c) Izračunajte dužinu luka krive $t \mapsto e^t(\cos t, \sin t)$ i nadjite parametrizaciju dužinom luka. Zatim izračunajte krivinu funkcije krive. [5]

Rješenje.

(a)

(i) Prvo parametrišimo α dužinom luka.

$$\alpha'(t) = ((1 + \cos t)/2, (-1 + \cos t)/2, -\sin t/\sqrt{2}),$$

pa je $|\alpha'| = 1$, pa je kriva već parametrisana dužinom luka. Imamo da je

$$\alpha''(t) = (-\sin t/2, -\sin t/2, -\cos t/\sqrt{2}),$$

tako da je

$$\kappa = |\alpha''| = 1/\sqrt{2}.$$

Imamo da su

$$T = \Big(\frac{1 + \cos t}{2}, \frac{-1 + \cos t}{2}, \frac{-\sin t}{\sqrt{2}}\Big),$$

$$N = \Big(\frac{-\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{-\sin t}{\sqrt{2}}, -\cos t\Big),$$

$$B = T \times N = \Big(\frac{\cos t - 1}{2}, \frac{\cos t + 1}{2}, \frac{-\sin t}{\sqrt{2}}\Big).$$

Stoga je

$$\tau = -B' \cdot N = \big(\sin t/2, \sin t/2, \cos t/\sqrt{2}\big) = -1/\sqrt{2}.$$

(ii) Po Fundamentalnoj teoremi za prostorne krive, β je jednaka α do rigidnog kretanja.

(b) Pretpostavićemo da je γ regularna kriva tako da je $\gamma'(t) \neq 0$ za sva t. Jedan mogući nastavak je da pretpostavimo da je γ parametrizovana dužinom luka (reparametrizacija dužinom luka ne mijenja pretpostavku da su γ'' i γ' linearno zavisne!); Onda se tvrdnja može dokazati direktnom integracijom. Drugi način je slijedeći, radeći sa proizvoljnom parametrizacijom: Činjenica da su γ'' i γ' linearno zavisne se može formulisati kao $\gamma''(t) = \lambda(t)\gamma'(t)$ (jer $\gamma' \neq 0$) za pogodnu funkciju $t \mapsto \lambda(t) \in \mathbb{R}$. Fiksirajmo t_0 i $n_1, n_2 \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ tako da $n_1, n_2 \perp \gamma'(t_0)$ i $n_1 \perp n_2$ (konkretno, n_1 i n_2 su linearno nezavisni). Sada posmatrajmo funkcije

$$t \mapsto g_i(t) := n_i \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)).$$

Spoznajemo da

$$g_i(t_0) = g_i'(t_0) = 0 \quad \text{i} \quad g_i''(t) = \lambda(t) g_i'(t),$$

to jest, g_i zadovoljavaju linearnu običnu diferencijalnu jednačinu, koja ima jedinstveno, globalno definisano rješenje $g_i \equiv 0$. Stoga, $t \mapsto \gamma(t)$ zadovoljava jednačine prave:

$$n_1 \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)) = n_2 \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)) = 0.$$

(c) Neka je $\gamma(t) := e^t(\cos t, \sin t)$; Onda $|\gamma'(t)|^2 = 2e^{2t}$ i ako izračunamo dužinu luka od $t = 0$,

$$s(t) = \textstyle\int_0^t |\gamma'(t)|\, dt = \sqrt{2}(e^t - 1) \quad \Leftrightarrow \quad t(s) = \ln(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}).$$

Stoga je

$$\tilde{\gamma}(s) := \gamma(t(s)) = (1 + \tfrac{s}{\sqrt{2}})\,(\cos \ln(1 + \tfrac{s}{\sqrt{2}}), \sin \ln(1 + \tfrac{s}{\sqrt{2}}))$$

reparametrizacija dužinom luka krive γ.

Sada, njena krivina je, do znaka, data sa

$$\kappa^2(s) = |\tilde{T}'(s)|^2 = |\tilde{\gamma}''(s)|^2 = \tfrac{1}{(\sqrt{2}+s)^2} = \tfrac{1}{2e^{2t}}.$$

Zadatak 3.

(a) Definišite *linijsku* i *razvojnu* površ. [4]

(b) Pokažite da je 1-strani hiperboloid $\Sigma = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$ linijska površ. [10]

(c) Dokažite da je *cilindar* razvojna površ. Navedite sve razvojne površi koje znate. [6]

Rješenje.

(a) Površ $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ se zove linijska površ ako prima (lokalno) parametrizaciju $\mathbf{x}$ forme

$$(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) = \gamma(u) + v\,\eta(u),$$

gdje je $u \mapsto \gamma(u)$ regularlna kriva u $\mathbb{R}^3$ i $u \mapsto \eta(u) \in S^2$ jedinično vektorsko polje duž γ.

Razvojna površ je linijska površ $(u, v) \mapsto \gamma(u) + v\,\eta(u)$ čije je Gaussovo preslikavanje $\mathbf{N}(u, v) = \mathbf{N}(u)$ jedino zavisno o u, tj.,

$$\mathbf{N}_v \equiv 0.$$

(b) Prateći primjer iz sekcije 2.4, linija $y = 1$, $z = x$ leži na Σ: parametrišemo liniju pomoću $v \mapsto (\frac{1}{\sqrt{2}}v, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}v)$; kako bismo vidjeli da je jednačina koja definiše Σ zadovoljena,

$$\frac{1}{2}v^2 + 1 = 1 + \frac{1}{2}v^2.$$

Takodje, znamo da je površ površ revolucije (jer je 0-ti nivo funkcije $F(x, y, z) = (x^2+y^2)-z^2$, čija je zavisnost o x i y jedino u obliku x^2+y^2, tj., udaljenost tačke od z-ose) oko z-ose. Odavdje dobivamo parametrizaciju površi rotirajući gornju liniju oko z-ose:

$$(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) := \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}v \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} + v\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Stoga je Σ linijska površ sa $\gamma(u) = (-\sin u, \cos u, 0)$ i $\eta(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, \sin u, 1)$.

(c) Cilindar

$$(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) = (x(u), y(u), v) = \overbrace{(x(u), y(u), 0)}^{=:\gamma(u)} + v\overbrace{(0, 0, 1)}^{=:\eta(u)}$$

je onda (očito) linijska površ i ima Gaussovo preslikavanje

$$\mathbf{N}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{x'^2(u)+y'^2(u)}}(y'(u), -x'(u), 0),$$

koje ne zavisi o linijskom parametru v.