1 Granične vrijednosti

1.1 Intuitivni uvod u granične vrijednosti

Uvod

Razvoj diferencijalnog računa stimulisan je od strane dva geometrijska problema:

- nalaženjem površina ravnih površi;
- nalaženjem tangenti na krive.

Oba ove problema zahtjevaju 'granične procese' za svoja opća rješenja.

Međutim koncept limesa ili granične vrijednosti je fundamentali graditeljski blok na kojem se zasniva cijeli diferencijalni i integralni račun! Na početku ovog poglavlja ćemo promatrati granične procese informalno. Mnogi problemi diferencijalnog i integralnog računa se izvode iz slijedeca tri problema:

Tangentni problem

Ako nam je data funkcija f i tačka $P(x_0, y_0)$ na grafu funkcije, naći jednačinu linije koja je tangentna na graf f u tački p

Površinski problem

Ukoliko nam je data funkcija f, naći površinu ispod grafa funkcije f i intervala $[a, b]$ na x-osi.

Problem trenutne brzine

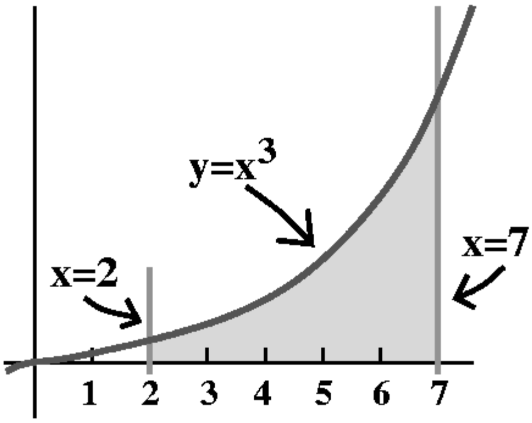
Ukoliko nam je data kriva pozicije u odnosu na vrijeme za česticu koja se kreće duž koordinatne linije, naći brzinu te čestice u datom vremenu.

Tangentni problem

Primjer tangentnog problema Promatranje ovih problema ima dugu historiju.

Površinske formule za osnovne geometrijske figure, kao što su pravougaonici, poligoni i krugovi idu nazad do najranijih matematičkih zapisa. Prvi pravi napredak od najprimitivnih pokušaja je napravio starogrčki matematičar *Arhimed* ($`A\rho\chi\iota\mu\eta\delta\eta\varsigma$), koji je razvio genijalnu, ali napornu tehniku, koja se zove *tehnika iscrpljenja*, kako bi našao površine regija koje su ograničene parabolama, spiralama i raznim drugim krivim.

Do 17-og stoljeća mnogi su matematičari otkrili načine kako izračunati ove površine koristeći limese. Međutim, svim ovim metodama je nedostajala generalnost.

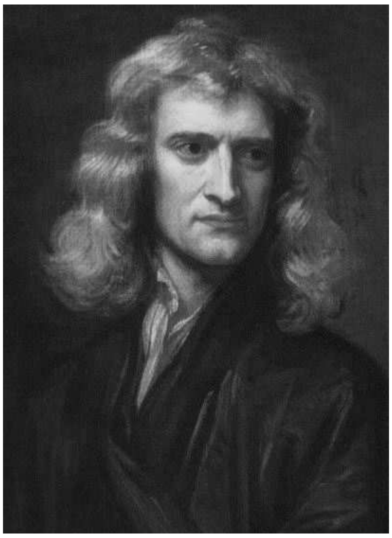


Uvod u površinski problem

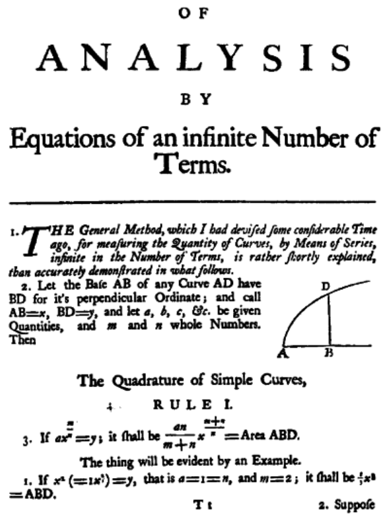
Veliki napredak su napravili nezavisno jedan od drugoga Newton i Leibniz, koji su otkrili da se površine mogu dobiti obrćući proces diferencijacije.

Newtonov rad *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* izdat 1711 se smatra početkom više matematike.

Sir Isaac Newton PRS MP



Gottfried Wilhelm Leibniz



OF

ANALYSIS

BY

Equations of an infinite Number of Terms.

1. *THE General Method, which I had devifed fome confiderable Time ago, for meafuring the Quantity of Curves, by Means of Series, infinite in the Number of Terms, is rather fhortly explained, than accurately demonftrated in what follows.*

2. Let the Bafe AB of any Curve AD have BD for it's perpendicular Ordinate; and call AB=x, BD=y, and let a, b, c, &c. be given Quantities, and m and n whole Numbers. Then

The Quadrature of Simple Curves,

RULE I.

3. If $ax^{\frac{m}{n}} = y$; it fhall be $\frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ = Area ABD.

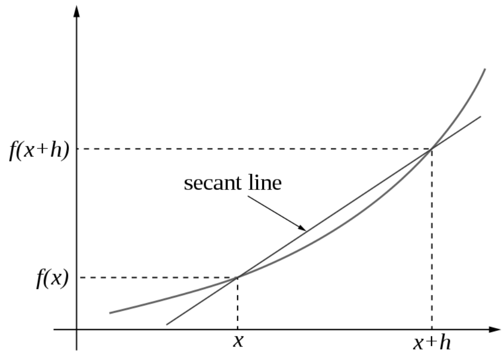
The thing will be evident by an Example.

1. If $x^2 (= 1x^{\frac{2}{1}}) = y$, that is $a = 1 = n$, and $m = 2$; it fhall be $\frac{1}{3}x^3$ = ABD.

T t 2. Suppofe

Tradicionalno se smatra da matematika koja proizilazi iz tangentnog problema čini diferencijalni račun, dok matematika koja proizilazi iz površinskog problema predstavlja integralni račun.

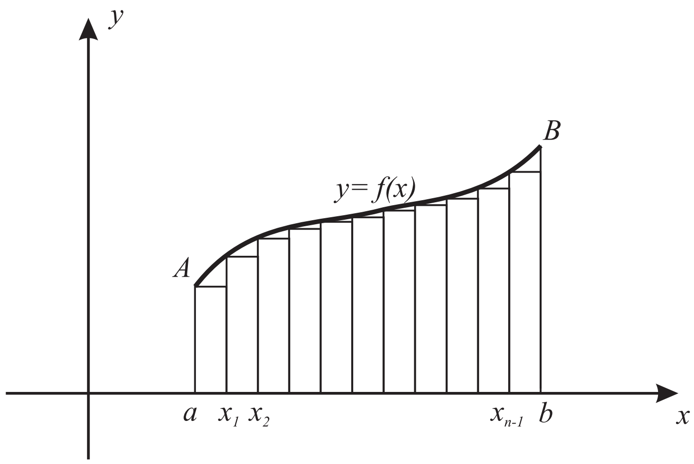
Međutim, vidjet ćemo da su ova dva problema toliko vezani jedan za drugi da je često teško napraviti razliku između diferencijalnog i integralnog računa!



Kako bismo bolje razumjeli gornje probleme, potrebno je da damo precizniju definiciju onoga što smatramo tangentnom linijom, površinom i brzinom.

Tangentne linije i limesi

Površinski problem



Trenutna brzina

Ako se čestica kreće u pozitivnom smjeru s-ose, koja zavisi od vremena t, prosječnu brzinu v_{sr} čestice tokom vremenskog intervala od t_0 do t_1 definišemo kao

$$v_{sr} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

gdje su s_1 i s_0 s-koordinate čestice u vremenima t_1 i t_0 respektivno. Geometrijski, ovo je nagib sekante koja povezuje tačke (t_0, s_0) i (t_1, s_1) na krivoj koja pokazuje poziciju u ondosu na vrijeme.

Pretpostavimo međutim da nismo zainteresirani za prosječnu, već za trenutnu brzinu v_{tren} u datom vremenu t. Intuicija nam govori da preko dovoljno malog vremenskog intervala, brzina čestice neće previše varirati. Drugim rječima, neće biti velike razlike između v_{tren} i v_{sr} ukoliko je interval (t_0, t_1) dovoljno mali.

$$v_{tren} \approx \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}.$$

Što je t_1 bliže t_0, to je ova procjena bolja. Međutim, kako se t_1 približava t_0, nagib sekante će se sve više približavati nagibu tangente na krivu položaja čestice u vremenu $t = t_0$. Stoga nam ovo predlaže da trenutnu brzinu u vremenu $t = t_0$ definišemo kao nagib tangente na krivoj pozicije u odnosu na vrijeme u ovoj tački.

Tangentni problem

Neka se materijalna tačka kreće po krivoj tako da funkcija $s = s(t)$ izražava pređeni put, od neke početne tačke $O(0, 0)$, u funkciji od vremena t. Prema tome, u trenutku t materijalna tačka se nalazi u tački $M(t, 0)$, a u trenutku $t + \Delta t$ u tački $N(t + \Delta t, 0)$. Pređeni put do trenutka t je $s(t)$, a do $t + \Delta t$ je $s(t + \Delta t)$. Nas zanima kako odrediti brzinu te tačke kada je ona u tački $M(t, 0)$.

Označimo sa v_{sr} srednju brzinu tačke na putu MN, tada je

$$v_{sr} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

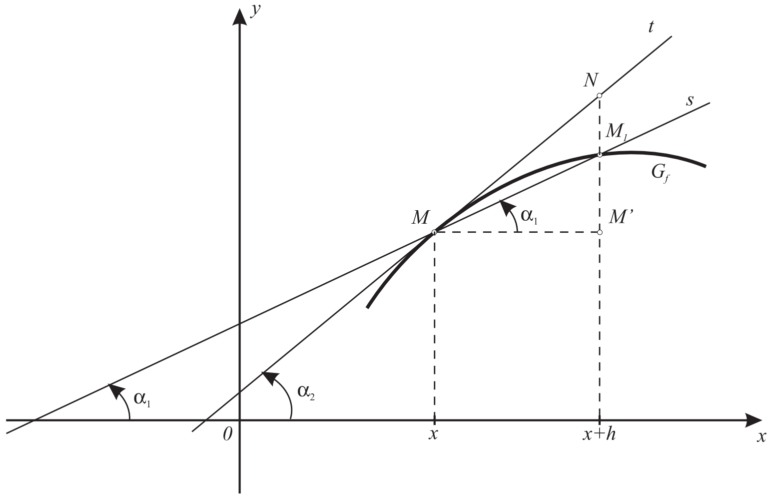
Prirodna definicija trenutne brzine tačke u momentu M je granična vrijednost srednje brzine kada N teži prema M (a to će se dogoditi ako $\Delta t \to 0$). Dakle, brzina $v(t)$ u tački M se definira kao

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t),$$

tj. *p*rvom derivacijom funkcije $s(t)$ po argumentu t. Geometrijski, prva derivacija (konačna ili beskonačna) funkcije f, u tački x_0, predstavlja koeficijent pravca tangente (t) na krivu G_f u tački x_0.

Da bismo se u to uvjerili, najprije trebamo definirati tangentu krive.

Definicija. Tangenta na neku krivu G_f, u zadatoj tački $(x_0, f(x_0))$ te krive, definira se kao prava koja sadrži tačku $(x_0, f(x_0)) \in G_f$, a predstavlja granični položaj snopa sječica (tetiva) krive, koje spajaju tačku $(x_0, f(x_0))$ kao stalnu i bilo koju drugu tačku $(x, f(x))$ na krivoj. Pri tome snop sječica nastaje pomjeranjem tačke $(x, f(x))$ po krivoj prema stalnoj tački $(x_0, f(x_0))$.



Ako fiksiramo tačku $M(x_0, f(x_0)) \in G_f$, tada snop pravih koje prolaze kroz tačku M imaju jednačinu

$y - f(x_0) = k(x - x_0)$, (P)

gdje sve prave snopa imaju koeficijent pravca k. Prava koja ima koeficijent $k = tg\alpha_2 = f'(x)$, jasno, predstavlja tangentu krive G_f. Naime, koeficijent pravca sječice (s) je

$$tg\alpha_1 = \frac{M_1M'}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Površine ravnih likova.

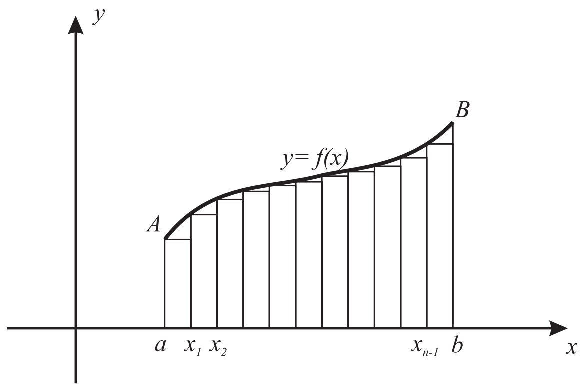
Slika 1

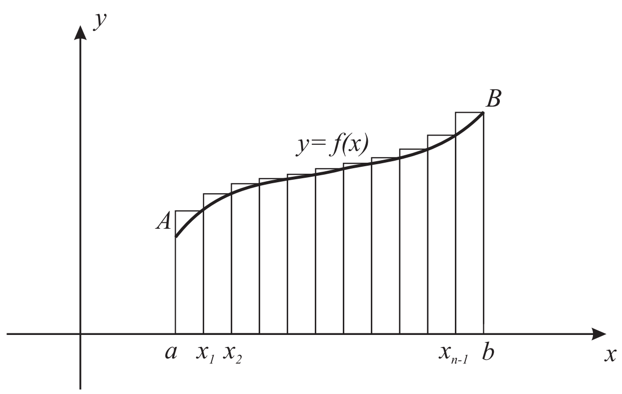
Pretpostavimo da $y = f(x), x \in [a, b]$, gdje je f nenegativna i neprekidna funkcija, ima grafik kao na slici 1.

Figura D_{ABba} u ravni Oxy, ograničena dijelovima pravih $x = a$, $x = b$, $y = 0$ i zadatom krivom G_f, zove se *krivolinijski trapez*.

Izvedimo formulu za izračunavanje površine ove ravne figure.

Slika 2





Neka je $\mathrm{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ podjela segmenta $[a, b]$; označimo dalje $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ i $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$.

Tada će donja Darbouxova suma $s(f, \mathrm{P})$ biti jednaka zbiru svih površina upisanih pravougaonika u figuru D_{ABba}, čije su visine m_i, kao na slici 1. Sa druge strane, gornja Darbouxova suma $S(f, \mathrm{P})$ biće jednaka sumi površina opisanih pravougaonika, čije su visine M_i, kao na slici 2.

Darbouxove sume

Pretpostavimo da je f definirana na $[a, b]$ i da je ograničena a da je $\mathrm{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ podjela toga segmenta. Uvedimo oznake

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), m = \inf_{x \in [a,b]} f(x),$$

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

Sume $s_{\mathrm{P}} = s\left(f, \mathrm{P}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, S_{\mathrm{P}} = S\left(f, \mathrm{P}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ nazivamo, redom, ***do-***

njom i gornjom Darbouxovom sumom funkcije f na segmentu $[a, b]$, koje odgovaraju podjeli P.

Budući da je f integrabilna funkcija na $[a, b]$, jer je neprekidna, to za zadato $\varepsilon > 0$ postoji podjela P segmenta $[a, b]$, tako da je $S(f, \mathrm{P}) - s(f, \mathrm{P}) < \varepsilon$, odnosno krivolinijski trapez je mjerljiva figura, a njegova površina je

$$P\left(D_{ABba}\right) = \int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

Sada kada imamo motivaciju, vrijeme je se pozabavimo samim pojmom granične vrijednosti.

Najosnovnija upotreba limesa je da opišemo kako se funkcija ponaša kada se nezavisna promjenljiva približava određenoj vrijednosti!

Primjer. Posmatrajmo stoga npr. funkciju $y = 3x + 1$ i različite vrijednosti funkcije za različite argumente

x	0,5	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99	0,999	0,9999
y	2,5	3,1	3,4	3,7	3,85	3,97	3,997	3,9997

Očito, kako se argument funkcije približava vrijednosti 1 sa lijeve strane, vrijednost funkcije se približava vrijednosti 4.

Kažemo da funkcija teži vrijednosti 4 kako vrijednost x teži ka 1 (ovaj put s lijeve strane).

x	1,5	1,3	1,2	1,1	1,05	1,01	1,001	1,0001
y	5,5	4,9	4,3	4,6	4,15	4,03	4,003	4,0003

Kažemo da funkcija teži vrijednosti 4 kako vrijednost x teži ka 1 (ovaj put s desne strane).

Ako su desna i lijeva granična vrijednost funkcije jednake, onda kažemo da funkcija ima graničnu vrijednost u toj tački! Intuitivna i veoma neformalna definicija limesa:

Definicija 1.1. Ako se vrijednosti funkcije $f(x)$ mogu napraviti onoliko blizu vrijednosti L koliko želimo, tako što ćemo napraviti x dovoljno blizu vrijednosti a (ali ne jednako vrijednosti a!), onda pišemo

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

što čitamo 'limes funkcije $f(x)$ kada x teži ka a'.

Primjer. Napravite konjekturu o vrijednosti limesa

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}.$$

Primjetimo da je funkcija nedefinisana u tački $x = 0$. Međutim ovo nema uticaja na posmatranje granične vrijednosti, jer se ona tiče ponašanja funkcije f u blizini 0, a ne u samoj tački 0. Donja tabela nam predstavlja ponašanje funkcije u tačkama oko 0, zaokruženo na šest decimalnim mjesta

x	-0,01	-0,001	-0,0001	-0,00001	0	0,00001	0,0001	0,001	0,01
y	1,994987	1,999500	1,999950	1,999995		2,000005	2,000050	2,000500	2,004988

Stoga je naša konjektura da je

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = 2.$$

Sjetimo se također

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \sqrt{x+1} + 1(x \neq 0!)$$

Primjer. Napravite konjekturu o vrijednosti limesa

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Primjer. Napravite konjekturu o vrijednosti limesa

$$\lim_{x \to 0} sin\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

Prvi (veoma stidljivi) pogled u neprekidnost

Krive u ravni se generalno mogu podijeliti u dvije kategorije – one koje imaju skokove ili rupe i one koje nemaju. Skokovi ili rupe u krivim nazivaju se *prekidima*. Kriva koja neka prekida se, (veoma inventivno ☺), naziva *neprekidnom*.

Očito ćemo imati dvije vrste prekida, kao što smo već spomenuli. Prekid izazvan rupom ili izbačenom tačkom funkcije naziva se *otklonjivi prekid* grafa funkcije. Sve ovo u stvari nam govori koji će to uslovi morati biti zadovoljeni kako bi funkcija bila neprekidna u tački a:

- Funkcja mora biti definisana u a(!);
- Granične vrijednosti s obje strane moraju postojati u tački a;
- Vrijednost funkcije $f(a)$ mora biti jednaka objema graničnim vrijednostima.

Beskonačne granične vrijednosti - informalno

Ako se vrijednosti funkcije $f(x)$ konstantno povećavaju kako se x približava vrijednosti a sa desne ili lijeve strane, onda pišemo

$$\lim_{x \to a+} f(x) = +\infty \text{ ili } \lim_{x \to a-} f(x) = +\infty$$

kako je odgovarajuće i kažemo da se funkcija f *neograničeno povećava* kako x teži ka a sa desne, odnosno lijeve strane.

Ako se vrijednosti funkcije $f(x)$ konstantno smanjuju kako se x približava vrijednosti a sa desne ili lijeve strane, onda pišemo

$$\lim_{x \to a+} f(x) = -\infty \text{ ili } \lim_{x \to a-} f(x) = -\infty$$

kako je odgovarajuće i kažemo da se funkcija f *neograničeno smanjuje* kako x teži ka a sa desne, odnosno lijeve strane. Ukoliko su obje vrijednosti iste, onda pišemo

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty, \quad tj. \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Vertikalna asimptota

Definicija 1.2. Linija $x = a$ se naziva *vertikalna asimptota* grafa funkcije f, ukoliko se $f(x)$ približava $+\infty$ ili $-\infty$ kako se x približava a sa lijeve ili desne strane.

Granične vrijednosti u beskonačnosti i horizontalne asimptote

Do sada smo samo posmatrali granične vrijednosti funkcija kada se x približavalo nekoj konkretnoj vrijednosti a. Međutim, veoma često nas interesuje kako se funkcija ponaša kada vrijednost argumenta neograničeno raste ili opada.

Definicija 1.3 (Granične vrijednosti u beskonačnosti - inf.)**.** Ako se vrijednosti funkcije $f(x)$ sve više i više približavaju nekom broju L kako se argument x neograničeno povećava, onda pišemo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L.$$

Ako se vrijednosti funkcije $f(x)$ sve više i više približavaju nekom broju L kako se argument x neograničeno smanjuje, onda pišemo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

Geometrijski, ako se $f(x) \to L$ kako $x \to +\infty$, onda se graf funkcije eventualno sve više i više približava horizontalnoj liniji $y = L$ (kada graf pomatramo u pozitivnom smjeru).

Slično, ako se $f(x) \to L$ kako $x \to -\infty$, onda se graf funkcije eventualno sve više i više približava horizontalnoj liniji $y = L$ (kada graf pomatramo u negativnom smjeru).

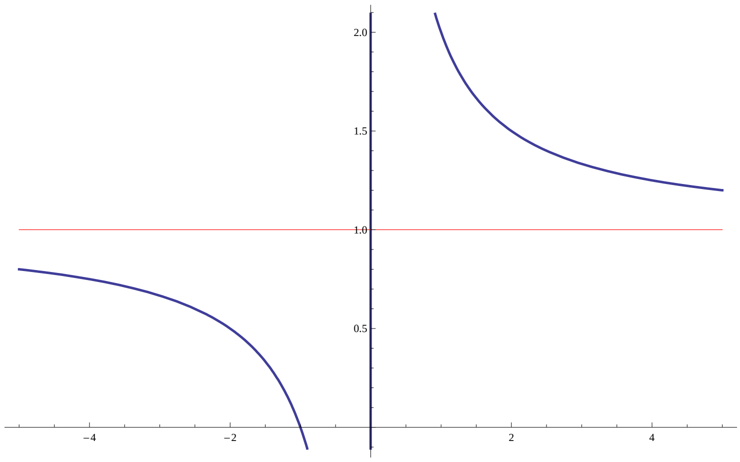
Definicija 1.4 (Horizontalna asimptota)**.** Linija $y = L$ naziva se *horizontalna asimptota* grafa funkcije f ako $f(x) \to L$ kako $x \to +\infty$ ili $x \to -\infty$.

Definicija 1.5 (Beskonačne granične vrijednosti u beskonačnosti - informalno)**.** Ako se vrijednosti funkcije $f(x)$ sve više i više povećavaju kako se argument x neograničeno povećava ili smanjuje, onda pišemo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad ili \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Ako se vrijednosti funkcije $f(x)$ sve više i više smanjuju kako se argument x neograničeno povećava ili smanjuje, onda pišemo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad ili \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$



Slika 1: Graf funkcije $1/x + 1$ sa horizontalnom asimptotom

Također granična vrijednost u beskonačnosti može da uopće ne postoji ukoliko funkcija beskonačno oscilira na takav način da se vrijednost funkcije ne približava nijednoj vrijednosti, niti se neograničeno povećavaju niti smanjuju.

Takve su na prijer trigonometrijske funkcije $\sin$ i $\cos$. U tom slučaju kažemo da graničnna vrijednost ne postoji zbog oscilacije.

Izačunavanje limesa

Deset standardnih graničnih vrijednosti će formirati osnovu za izračunavanje graničnih vrijednosti. Tri uključuju konstantnu funkciju, tri uključuju linearnu funkciju, dok četiri uključuju racionalnu funkciju.

$$\lim_{x\to a} k = k, \quad \lim_{x\to+\infty} k = k, \quad \lim_{x\to-\infty} k = k,$$

$$\lim_{x\to a} x = a, \quad \lim_{x\to+\infty} x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Osobine granične vrijednosti funkcije

Neka $\lim$ označava jednu od graničnih vrijednosti $\lim_{x\to a}$, $\lim_{x\to a^-}$, $\lim_{x\to a^+}$, $\lim_{x\to+\infty}$, ili $\lim_{x\to-\infty}$. Pretpostavimo da postoje granične vrijednost funkcije $L_1 = \lim f(x)$ i $L_2 = \lim g(x)$. Tada

1. $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim(x) = L_1 + L_2$

2. $\lim k \cdot f(x) = k \cdot \lim f(x) = k \cdot L_1 \ (k \in \mathbb{R})$

3. $\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = L_1 dot L_2$

4. $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, (L_2 \neq 0)$

5. $\lim[f(x)]^k = (\lim f(x))^k = L_1^k, \ (k \in \mathbb{R})$.

Primjer. Izračunati:

1. $$\lim_{x \to 1}(2x^2 - 5x + 10)$$

2. $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2}{x-1}$$

3. $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$$

Za svaki polinom

$$p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$$

i za bilo koji realan broj a,

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a) = c_0 + c_1 a + \cdots + c_n a^n$$

A šta je s polinomima oblika x^n u beskonačnosti? Pogledajmo sliku!

Množenje sa pozitivnom brojem ništa ne mijenja, dok množenje sa negativnim brojem mijenja znak beskonačnosti.

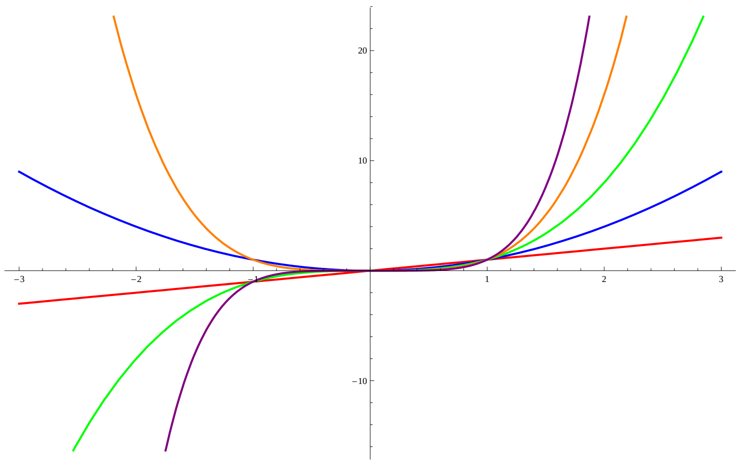
Također možemo posmatrati granične vrijednosti funkcija definisanih dio po dio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5, & x \leq 3 \\ \sqrt{x + 13}, & x > 3 \end{cases}$$

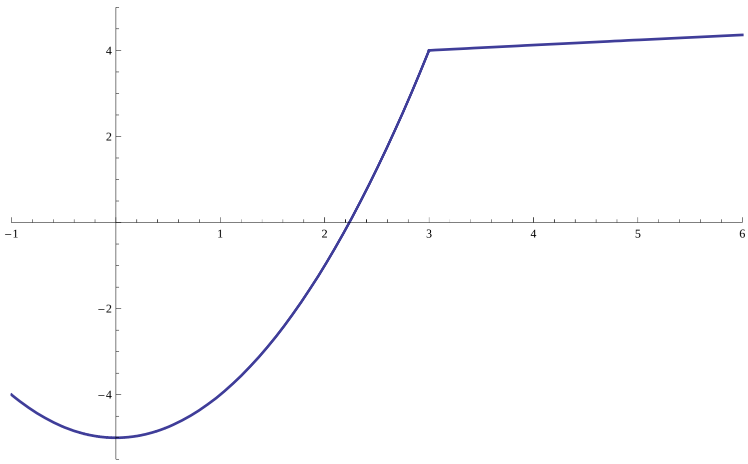
1.2 Granična vrijednost funkcije

Granična vrijednost funkcije

Do sada se sva diskusija zasnivala na intuitivnoj predodžbi šta to znači da se vrijednost funkcije sve više i više približava nekoj graničnoj vrijednosti.



Slika 2: Grafici funkcija x,x^2,x^3,x^4,x^5

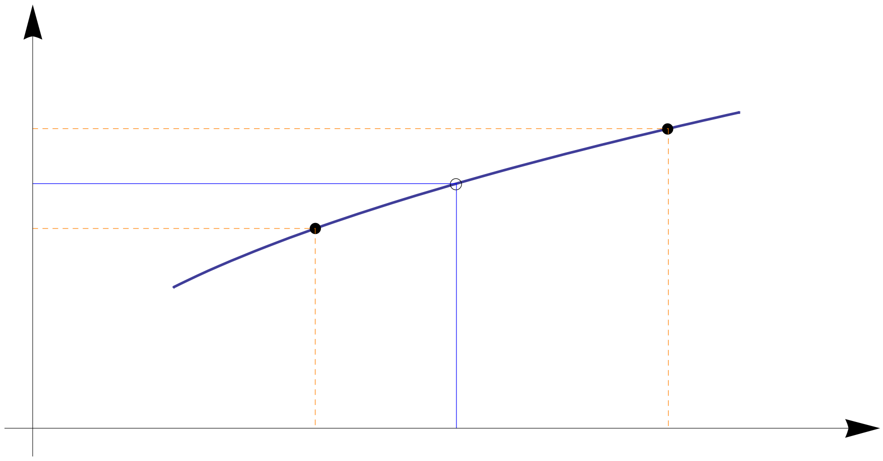


Sada se konačno možemo i trebamo, pozabaviti problemom granične vrijednosti formalnije. Međutim, većinu tog posla ostavljamo predmetu Analiza I. No nešto fundamentalno ipak trebamo vidjeti!

Stoga posmatrajmo funkciju za koju $f(x) \to L$ kako $x \to a$. Ako $f(x) \to L$ kako $x \to a$, onda za bilo koji pozitivan broj ε, možemo naći otvoreni interval na x-osi koji sadrži tačku $x = a$ i ima osobinu da za svako x u tom intervalu, osim možda u $x = a$ vrijednost funkcije $f(x)$ je između $L - \varepsilon$ i $L + \varepsilon$.

Definicija 1.6 (Prva preliminarna verzija)**.** Neka je funkcija $f(x)$ definisana za svako x u nekom otvorenom intervalu koji sadrži broj a, sa mogućim izuzetkom u samom a. Onda ćemo pisati

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$



ako za bilo koji dati broj $\varepsilon > 0$ možemo naći otvoreni interval (x_0, x_1) koji sadrži tačku a takav da $f(x)$ zadovoljava

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

za svako x u intervalu (x_0, x_1) osim možda u $x = a$.

Definicija 1.7 (Druga preliminarna verzija)**.** Neka je funkcija $f(x)$ definisana za svako x u nekom otvorenom intervalu koji sadrži broj a, sa mogućim izuzetkom u samom a. Onda ćemo pisati

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

ako za bilo koji dati broj $\varepsilon > 0$ možemo naći broj $\delta > 0$ takav da $f(x)$ zadovoljava

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

za svako x u intervalu $(a - \delta, a + \delta)$ osim možda u $x = a$.

Definicija 1.8 (KONAČNA verzija)**.** Neka je funkcija $f(x)$ definisana za svako x u nekom otvorenom intervalu koji sadrži broj a, sa mogućim izuzetkom u samom a. Onda ćemo pisati

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

ako za bilo koji dati broj $\varepsilon > 0$ možemo naći broj $\delta > 0$ takav da

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad ako \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

Definicija 1.9. Za broj $L \in \mathbb{R}$ reći ćemo da je granična vrijednost funkcije $y = f(x)$ u tački a ako za svako $\varepsilon > 0$ uvijek postoji broj $\delta > 0$ koji zavisi od ε, tako da vrijedi da ako je udaljenost između x i a manje od δ, tada je i udaljenost između $f(x)$ i L manja od ε, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon, \text{ ili}$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) \quad x \in O_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(L).$$
$$O_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta), \quad O_\varepsilon(L) = (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

i piše se

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Primjer. Funkcija $f(x) = 3x - 5$ ima graničnu vrijednost $L = 1$ u tački $a = 2$.

Primjer. Funkcija $f(x) = x^2$ ima graničnu vrijednost $b = 9$ u tački $a = 3$.

Vrijednost δ nije jedinstvena!

Primjer. Koristeći urađeni primjer, za funkciju $f(x) = x^2$ i par $(a, b) = (3, 9)$, popuniti sljedeću "$\varepsilon - \delta$" tablicu za istu funkciju i par $(a, b) = (2, 4)$:

ε	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$	...
$\delta(\varepsilon)$					

Definicija 1.10. $+\infty$ je granična vrijednost funkcije $y = f(x)$ u tački a ako vrijedi da za svako $M > 0$ postoji δ koje zavisi od M takvo da čim je x iz $O_\delta(a)$, imao da je $f(x) > M$, tj.

$$(\forall M > 0)(\exists \delta = \delta(M) > 0) \quad x \in O_\delta(a) \Rightarrow f(x) > M.$$

Za $-\infty$, imamo

$$(\forall M < 0)(\exists \delta = \delta(M) > 0) \quad x \in O_\delta(a) \Rightarrow f(x) < M.$$

L je granična vrijednost funkcije $y = f(x)$ kada $x \to +\infty$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M = M(\varepsilon) > 0) \quad x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

L je granična vrijednost funkcije $y = f(x)$ kada $x \to -\infty$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M = M(\varepsilon) < 0) \quad x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

1.3 Lijeva i desna granična vrijednost

Definicija 1.11. Vrijednost $\lim\limits_{\mathbb{R}_a^+ \cap D \ni x \to a} f(x)$ označavamo sa $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ ili kraće $f(a+0)$, kad god ta vrijednost postoji i zovemo je **desnom graničnom vrijednosti** funkcije *f u tački a* . Ako je $a = 0$, onda se piše $\lim\limits_{x \to +0} f(x)$, tj. $f(+0)$ (ili pak, $f(0+)$).

Po analogiji se definira i **lijeva granična vrijednost**

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a - 0).$$

Nije teško zaključiti da vrijedi

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = b.$$

2 Neprekidnost

Neprekidnost

Objekt koji se kreće ne može tek tako samo nestati i pojaviti se na drugom mjestu i nastaviti kretati. Stoga ukoliko put objekta u kretanju posmatramo kao krivu, ona bi trebala biti *neprekidna*, bez rupa, skokova ili prekida.

Ranije smo razmatrali neprekidnost informalno. Međutim, taj pogled je i više nego dobar, kao što vidimo iz

Definicija 2.1. Funkcija f je *neprekidna u tački* c ukoliko su zadovoljeni slijedeći uslovi:

1. $f(c)$ je definisana.
2. $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ postoji.
3. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Ukoliko je jedan ili više od gore navedenih uslova nije zadovoljen, kažemo da funkcija f ima *prekid* u tački c.

Ako je f neprekidna u svakoj tački intervala (a, b) onda kažemo da je funkcija neprekidna na intervalu (a, b).

Ukoliko je funkcija neprekidna na intervalu $(-\infty, \infty)$ onda kažemo da je svuda neprekidna.

Primjetite da su prva dva uslova u stvari suvišni!

Primjer. Odrediti da li su slijedeće funkcije neprekidne u tački $x = 2$:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases},$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$

Neprekidnost u primjenama

U primjenama, prekidi obično signaliziraju pojave važnih fizikalnih fenomena.

S obzirom da prekidi imaju značajne fizikalne interpretacije, važno je da smo u mogućnosti identificirati tačke prekida specifičnih funkcija i da smo u mogućnosti napraviti opća tvrđenja o osobinama neprekidnosti cijelih familija funkcija. Uobičajeni pristup da pokažemo da je funkcija neprekidna je da pokažemo da je neprekidna u nekoj *proizvoljnoj* tački. Na primjer, kao što smo vidjeli ranije, ako je $p(x)$ polinom i ako je a

proizvoljan realni broj, imamo da je

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a).$$

Stoga, imamo slijedeći rezultat:

Teorem 2.2. *Polinomi su svuda neprekidni.*

Primjer. Pokazati da je funkcija $|x|$ svuda neprekidna.

Ako je $x > 0$, onda je $|x| = x$, što je polinom, koji je po prethodnom teoremu neprekidna funkcija. Na isti način, ako je $x < 0$, onda je $|x| = -x$, što je polinom, koji je po prethodnom teoremu neprekidna funkcija.

Ako međutim posmatramo neprekidnost u $x = 0$, onda vidimo da je prvi uslov zadovoljen. Da bi vidjeli da je drugi uslov zadovoljen, moramo posmatrati

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0.$$

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} -x = 0.$$

Stoga je $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

Također, po definiciji $|0| = 0 = \lim_{x \to 0} |x|$, pa zaključujemo da je funkcija neprekidna u tački $x = 0$. Stoga je neprekidna na $(-\infty, +\infty)$.

Osobine neprekidnih funkcija

Teorem 2.3. *Ukoliko su funkcije f i g neprekidne u tački c, onda*

- *$f + g$ je neprekidna u c;*
- *$f - g$ je neprekidna u c;*
- *$f \cdot g$ je neprekidna u c;*
- *$\frac{f}{g}$ je neprekidna u c ako je $g(c) \neq 0$, a ima prekid u c ako je $g(c) = 0$.*

Teorem 2.4. *Racionalna funkcija je neprekidna svuda osim u tačkama gdje je imenioc jednak nuli.*

Primjer. Za koje vrijednosti x imamo rupu u grafu funkcije $\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$?

Budući da je $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, to znači da funkcija nije definisana u tačkama $x_1 = 2$ i $x_2 = 3$. S druge strane,

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+3)}{(x-2)} = 6,$$

pa limes funkcije postoji i konačan je. S druge strane

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+3)}{(x-2)} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x+3)}{(x-2)} = -\infty,$$

pa u $x = 2$ imam vertikalnu asimptotu, a u $x = 3$ funkcija ima rupu.

Neprekidnost kompozicija

Ako $\lim$ označava jednu od graničnih vrijednosti $\lim_{x\to c}$, $\lim_{x\to c^-}$, $\lim_{x\to c^+}$, $\lim_{x\to+\infty}$ ili $\lim_{x\to-\infty}$.

Ako je $\lim g(x) = L$ a funkcija f je neprekidna u tački L, onda je

$$\lim f(g(x)) = f(L).$$

To jest,

$$\lim(f(g(x))) = f(\lim g(x)).$$

Drugim riječima, znak granične vrijednosti može zamijeniti mjesto sa znakom funkcije, ukoliko je funkcija neprekidna i ukoliko postoji granična vrijednost izraza unutar funkcije.

Primjer. Ispitati neprekidnost funkcije $f(x) = |5 - x^2|$.

S obzirom da je $5 - x^2 \geq 0 \iff x \in [-5, 5]$, ako je $x \in (-\infty, -5)$, $|5 - x^2| = x^2 - 5$, što je neprekidno. Onda moramo posmatrati sve ostale slučajeve, kao i posebne slučajeve $x = \pm 5$.

Alternativno, ako posmatramo limes kad $x \to a$, $a \in \mathbb{R}$ i primjenimo malopređašnju teoremu,

$$\lim_{x\to a} |5 - x^2| = |\lim_{x\to a}(5 - x^2)| = |5 - a^2| = f(a).$$

Stoga je funkcija f neprekidna svugdje!

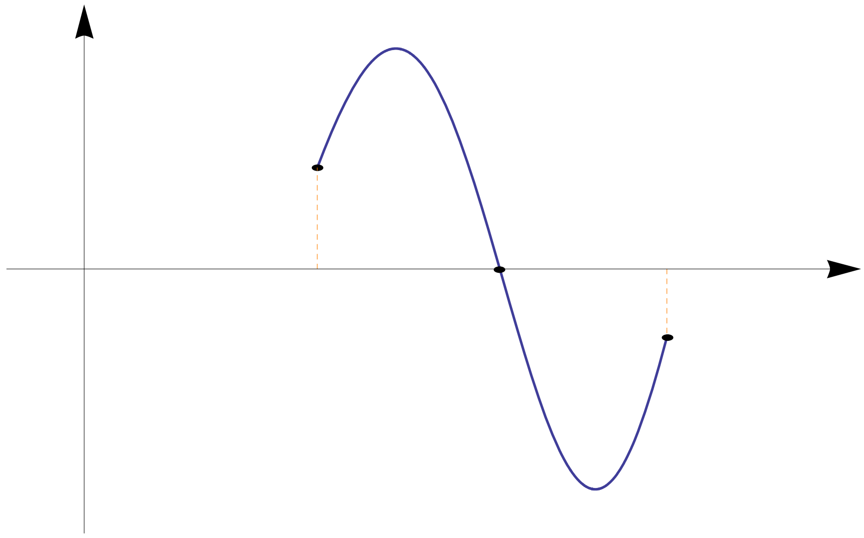
Teorem 2.5.

1. *Ako je funkcija g neprekidna u tački c i ako je funkcija f neprekidna u tački $g(c)$, onda je u kompozicija funkcija $f \circ g$ neprekidna u tački c.*
2. *Ako je funkcija g neprekidna svuda i ako je funkcija f neprekidna svuda, onda je u kompozicija funkcija $f \circ g$ neprekidna svuda.*

Stoga na osnovu prethodnog primjera zaključujemo na primjer da je apsolutna vrijednost neprekidne funkcije neprekidna funkcija!

Pitanje

Može li apsolutna vrijednost prekidne funkcije biti nepredkidna funkcija?



Reći ćemo da je funkcija neprekidna s lijeve strane u tački c ukoliko

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = c,$$

a da je neprekidna s desne strane u tački c ukoliko

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = c.$$

Definicija 2.6. Funkcija se naziva neprekidnom na zatvorenom intervalu $[a, b]$ ukoliko su zadovoljeni slijedeći uslovi:

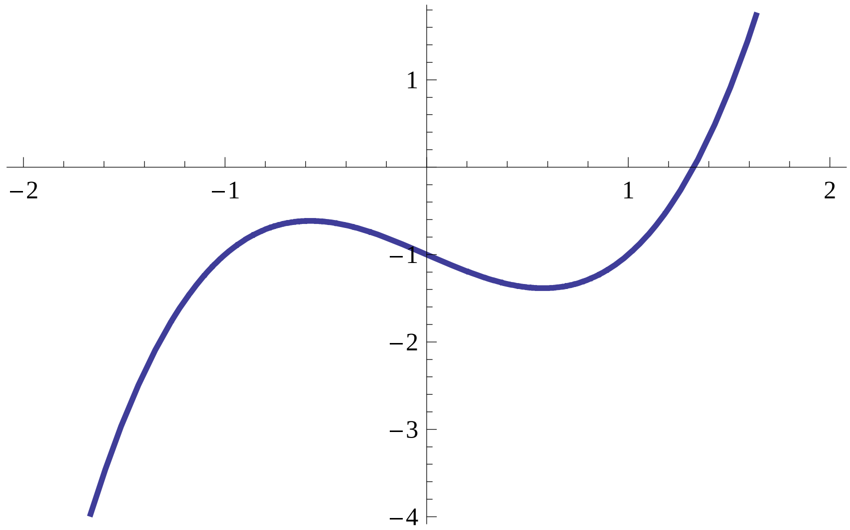
1. f je neprekidna na (a, b);
2. f je neprekidna s desna u a ;
3. f je neprekidna s lijeva u b.

Šta možemo reći o neprekidnosti funkcije $\sqrt{9 - x^2}$?

Teorem 2.7 (Teorema srednje vrijednosti)**.** *Ako je f neprekidna funkcija na zatvorenom intervalu $[a, b]$ i ako je k bilo koji broj između $f(a)$ i $f(b)$ (inkluzivno), onda postoji najmanje jedan broj x na intervalu $[a, b]$ takav da je $f(x) = k$.*

Iako je ova teorema intuitivno očigledna, njen dokaz zavisi od matematički precizne razvijene teorije sistema realnih brojeva, što je izvan granica ovog predmeta i bit će urađen u Analizi I.

Posljedica 2.8. *Ako je f neprekidna na $[a, b]$ i ako su $f(a)$ i $f(b)$ različiti od nule i suprotnog znaka, ona postoji najmanje jedno rješenje jednačine $f(x) = 0$ u intervalu (a, b).*



Primjer. Naći rješenje (približno) realno jednačine $x^3 - x - 1 = 0$.

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
y	-1	-0,77	-0,47	-0,10	0,34	0,88	1,50	2,21

x	1,3	1,31	1,32	1,33	1,34	1,35	1,36	1,37
y	-0,103	-0,062	-0,020	0,023	0,066	0,110	0,155	0,201

Neprekidnost trigonometrijskih funkcija

Teorem 2.9. *Ako je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljan broj u domeni specificirane trigonometrijske funkcije, onda*

$$\lim_{x\to c} \sin x = \sin c, \ \lim_{x\to c} \cos x = \cos c, \ \lim_{x\to c} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} c,$$

$$\lim_{x\to c} \csc x = \csc c, \ \lim_{x\to c} \sec x = \sec c, \ \lim_{x\to c} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} c.$$

Teorem stezanja/sendvič/lopovi i policajci

Teorem 2.10. *Ako su f, g i h funkcije koje zadovoljavaju nejednakosti*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)),$$

za sva x u nekom otvorenom intervalu koji sadrži tačku c, sa mogućim izuzetkom u samoj tački c. Ako g i h imaju istu graničnu vrijednost kako se x približava c, recimo

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} = h(x) = L,$$

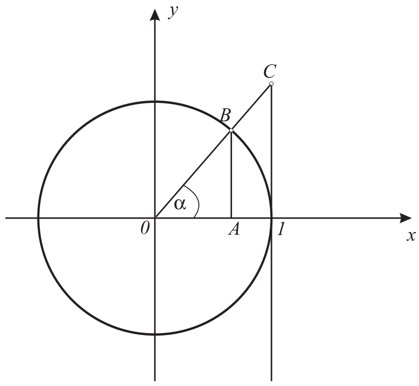
onda i f mora imati istu graničnu vrijednsot kako se x priližava c, tj.

$$\lim_{x\to c} f(x) = L.$$

Primjedba. Ova teorema također vrijedi i za beskonačne granične vrijednosti.

Primjer. Dokazati da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$$



Primjetimo prvo da je $f(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$ parna funkcija, pa će biti dovoljno da razmotrimo samo vrijednosti $\alpha > 0$, jer je $f(-\alpha) = f(\alpha)$.

Na trigonometrijskoj kružnici, uočimo tri ravne figure: ΔOAB, ΔOAC i kružni isječak OAB. Jasno je da za njihove površine, vrijedi procjena

$$P_{\Delta OAB} \leq P_{OAB} \leq P_{\Delta OAC}.$$

Napomena : površina kružnog isječka se računa po formuli $\frac{1}{2}\alpha \cdot r)$. Budući da je $r = \overline{OA} = \overline{OB} = 1$, iz poslednjih nejednakosti slijedi

$$\frac{\sin\alpha}{2} \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 \leq \frac{\alpha}{\sin\alpha} \leq \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha \leq \frac{\sin\alpha}{\alpha} \leq 1,$$

odakle je, s obzirom da je $\lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha = \cos 0 = 1$, primjenom sendvič teorema, dobijamo da je

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$$

.

Primjer. Pokažimo da je niz $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ rastući i ograničen odozgo.

Jednostavnim računom se ima

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+2}{n+1}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n .$$

Na osnovu Bernoullijeve nejednakosti je

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n > 1 - \frac{n}{(n+1)^2} \ , \ n \geq 2 \ ,$$

pa imamo

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{n+2}{n+1}\left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1 \ .$$

Dakle niz je strogo monotono rastući.

Ako sada posmatramo i niz $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, očigledna je nejednakost $x_n \leq y_n$ za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$.

Pokazati da je niz (y_n) strogo monotono opadajući, ostavljeno je za vježbu. Iz ovoga onda zaključujemo da je bilo koji član niza (y_n) gornje ograničenje niza (x_n), pa možemo reći da je $x_n \leq y_1 = 4$ za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$.

Iz monotonosti i ograničenosti niza (x_n) zaključujemo njegovu konvergenciju.

Graničnoj vrijednosti ovog niza dajemo posebno ime (prema Euleru), a ističemo i njegovu važnost za računanje mnogih drugih limesa.

Definicija 2.11.

$$\boxed{e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ .}$$

Broj e nazivamo Eulerovim brojem i on je jedna od najvažnijih matematičkih konstanti. Prvih nekoliko decimala tog broja su

$$e = 2,718281828...$$

Prebacimo li ovo u jezik funkcija jedne promjenljive, dobijemo da je

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

ili

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Primjer. Izračunati

1. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x-1}$; $\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}$

2. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x+1}$; $\lim_{x\to\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$;