1 Uvod u izvode

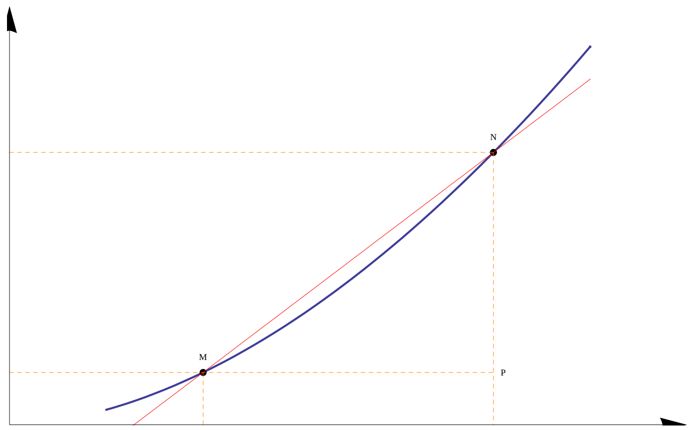
1.1 Intuitivni uvod u izvode

Uvod

Mnogi fizikalni fenomeni uključuju mijenjajuće kvantitete - brzina rakete, monetarna inflacija, broj bakterija u kulturi, intenzitet udara u zemljotresu, napon električnog signala i tako dalje.

U ovom poglavlju razvit ćemo pojam *izvoda* ili *derivacije*, što je matematički alat pomoću kojeg se proučavaju stope po kojima se mijenjaju fizikalne vrijednosti.

Tangentne vrijednosti



MN se naziva *sekanta* ili sječica krive $y = f(x)$.

Posmatrajmo $\triangle MNP$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{NP}{MP} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

je nagib sječice MN.

Kako $\Delta x \to 0$, N klizi po grafiku krive $y = f(x)$ prema tački M.

Kako $\Delta x \to 0$ u stvari sječica MN teži da zauzme granični položaj, tj. položaj tangente t na krivu $y = f(x)$ u tački M. $\operatorname{tg} \beta$ je nagib tangente t na krivu u tački M. Kako $\Delta x \to 0$ onda $\alpha \to \beta$, tj. $\operatorname{tg} \alpha \to \operatorname{tg} \beta$.

$$\operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$$

Trenutna brzina

Geometrijska interpretacija prosječne brzine

Ako se čestica kreće u pozitivnom smjeru duž neke s-ose i ako je kriva pozicije u odnosu na vrijeme $s = f(t)$, onda je prosječna brzina čestice između vremena t_0 i t_1 predstavljena geometrijski pomoću nagiba sekante koja povezuje tačke $(t_0, f(t_0))$ i $(t_1, f(t_1))$.

Geometrijska interpretacija trenutne brzine

Ako se čestica kreće u pozitivnom smjeru duž neke s-ose i ako je kriva pozicije u odnosu na vrijeme $s = f(t)$, onda je trenutna brzina čestice u vremenu t_0 predstavljena geometrijski pomoću nagiba tangente na krivu $f(t)$ u tački $(t_0, f(t_0))$.

Brzina se može promatrati kao mjera promjene - mjera promjene pozicije u odnosu na vrijeme ili mjera promjene s u odnosu na t. Mjere promjene se mogu pojaviti u mnogim primjerima:

- Mikrobiolog je zainteresiran za razinu promjene broja bakterija u koloniji tokom vremena;
- Inžinjer može biti zainteresiran za mjeru promjene dužine metalne šipke u odnosu na promjenu temperature;
- Ekonomista je zainteresiran kako se mijenja cijena proizvodnje u ondosu na kvantitet proizvodnje;
- Medicinski istražitelj je zainteresiran za promjenu radijusa arterije kada se poveća koncentracija alkohola u krvi...

Definicija 1.1. Ako je $y = f(x)$, onda je prosječna mjera promjene y u odnosu na x na intervalu $[x_0, x_1]$ nagib m_{sek} sekantne linije koja povezuje tačke $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$ na grafu funkcije f, tj.

$$m_{sek} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Definicija 1.2. Ako je $y = f(x)$, onda je trenutna mjera promjene y u odnosu na x na intervalu $[x_0, x_1]$ nagib m_{tan} tangente na krivu f u tački $(x_0, f(x_0))$, tj.

$$m_{tan} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Primjer. Ako je data funkcija $y = x^2 + 1$, naći prosječnu mjeru promjene y u odnosu na x preko intervala $[3, 5]$, trenutnu mjeru promjene y u odnosu na x u tački $x = -4$ te trenutnu mjeru promjene y u odnosu na x u nekoj proizvoljnoj tački $x = x_0$.

Prethodno smo promatrali nagib tangente na jedan način. Sada, zbog kalkulacijskih potreba i izbjegavanja "viška" promjenljivih, novu promjenljivu $h = x_1 - x_0$, odakle jasno slijedi da je $x_1 = x_0 + h$, pa konzekventno $x_1 \to x_0$ ako $h \to 0$.

Stoga, nagib tangente na krivu f u tački x_0 sada možemo izraziti kao

$$m_{tan} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Definicija 1.3. Ako je $P(x_0, y_0)$ tačka na grafu funkcije f, onda je *tangentna linija na graf funkcije f u tački P* ili *tangentna linija na graf funkcije f u x_0* se definiše kao linija kroz tačku P sa nagibom

$$m_{tan} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

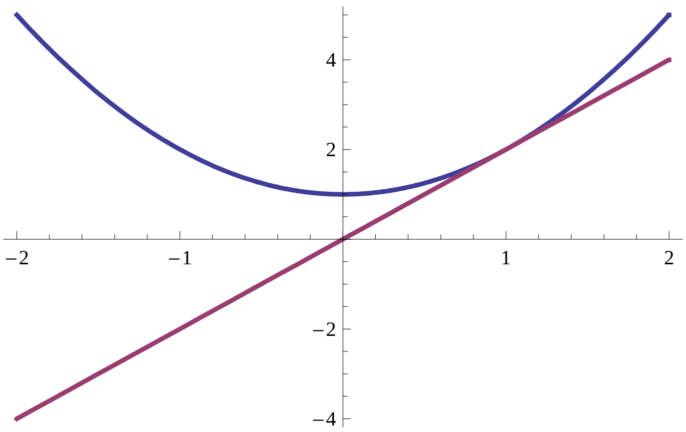
pod uslovom da ovaj limes postoji, dakako. Ako limes ne postoji, kažemo da kriva nema tangentne linije u P.

Iz ove definicije slijedi da je jednačina tangentne linije data sa

$$y - y_0 = m_{tan}(x - x_0).$$

Primjer. Naći tangentu na krivu $y = x^2 + 1$ u tački $x_0 = 1$.

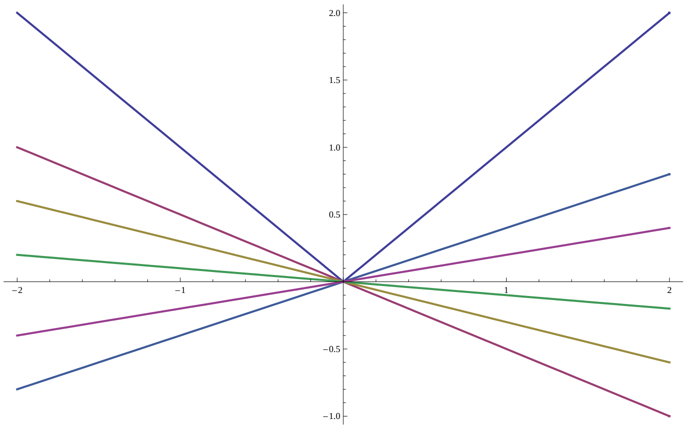
Primjer. Naći tangentu na krivu $y = |x|$ u tački $x_0 = 0$.



Definicija 1.4 (Izvod informalno)**.** Funkcija f' definisana formulom

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

naziva se izvodom ili derivacijom funkcije f u odnosu na x.



2 Izvod funkcije jedne promjenljive

Neka je x proizvoljno izabrana unutrašnja tačka razmaka D_f, dakle $x \in (a, b)$. Ako argument x promijenimo za neko malo h, tada će se promijeniti i vrijednost funkcije $f(x)$ u novu vrijednost $f(x + h)$. Mi ćemo razliku

$$\Delta f \stackrel{def}{=} f(x + h) - f(x)$$

zvati prirastom (priraštajem) funkcije f u tački x, a veličinu $h \stackrel{def}{=} \Delta x$ prirastom argumenta.

Definicija 2.1. Derivacija ili izvod funkcije f u tački $x \in (a, b)$ naziva se granična vrijednost

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}, \tag{1}$$

ukoliko postoji konačna ili beskonačna.

Za derivaciju funkcije f u tački x, koristi se oznaka $f'(x)$.

Jednako tako derivacija funkcije $y = f(x)$ po promjenljivoj x, označava se f'_x, y', y'_x i $\frac{df}{dx}$, ali one označavaju da je u pitanju derivacija po x, a nije naglašeno na koju tačku se to odnosi. Ako funkcija $f(x)$ ima derivaciju u svim tačkama skupa $D \subseteq (a, b)$, onda derivacija predstavlja novu funkciju od x, koja je definirana na tome skupu, u opštem slučaju različitom od (a, b). U tačkama toga skupa, dakle ta funkcija f', ima konačnu ili pak beskonačnu vrijednost.

Prema tome

$$f' : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Treba zapaziti da razmak može imati tačaka koje nisu unutrašnje tačke, pa se čini da ostaje ne definirana derivacija u takvim tačkama. Implicitno su i takve derivacije uvedene datom definicijom, a eksplicitno ćemo o tome govoriti u okviru jednostranih derivacija.

Postupak nalaženja funkcije f' naziva se diferenciranje ili deriviranje funkcije f.

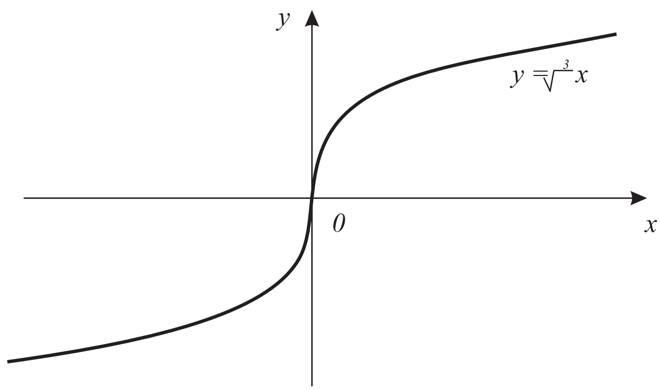
Definicija 2.2. Za funkciju $y = f(x)$ kažemo da je diferencijabilna (ili derivabilna) u tački $x \in (a, b)$ ako ima konačnu derivaciju u toj tački.

Stav

Ako je f diferencijabilna funkcija u tački $x \in (a, b)$, tada je ona i neprekidna u istoj tački.

Ako je f neprekidna funkcija u nekoj tački ona ne mora biti diferencijabilna u toj tački, kao što pokazuje

Primjer. Funkcija f zadana pomoću $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ je neprekidna na $\mathbb{R}$, ali nije diferencijabilna u tački $x = 0$.



Slika 5.1

Za zadanu funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kažemo da ima lijevu derivaciju u tački $x \in (a, b]$, ako postoji

$$\lim_{\mathbb{R}^- \ni h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

i u tom slučaju, jednostranu derivaciju označavamo $f'_l(x)$ ili pak $f'(x - 0)$.

Analogno se definira desna derivacija u tački $x \in [a\ , b)$, kao

$$f'_d(x) = f'(x+0) = \lim_{\mathbb{R}^+ \ni h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Jasno, kao kod svake druge granične vrijednosti, derivacija (1) funkcije f postoji u tački x ako i samo ako postoje jednostrane derivacije (jednostrane granične vrijednosti) u toj tački i ako imaju istu vrijednost.

2.1 Pravila diferenciranja funkcije

Pretpostavljamo diferencijabilnost na čitavome intervalu (a, b), bez obzira što diferencijabilnost, u opštem slučaju, može biti ispunjena samo na $E \subseteq (a, b)$. Ako se uzme $[a, b]$ umjesto (a, b) onda bi se diferencijabilnost u tački a (odnosno b) svodi na postojanje konačnih jednostranih derivacija u pomenutim tačkama.

Teorem 2.3. *Neka su $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$. Tada ako $f, g \in \mathcal{D}^1_{(a,b)}$ onda je $f \pm g, fg, \frac{f}{g} \in \mathcal{D}^1_{(a,b)}, (g(x) \neq 0$). Još više, za svako $x \in (a, b)$ vrijedi:*

(i) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x);$

(ii) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$

(iii) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$

Primijetimo ovdje da je preslikavanje $\frac{d}{dx} : \mathcal{D}^1_{(a,b)} \to \mathcal{F}(\mathcal{F}$ je skup funkcija) aditivno preslikavanje, tj. $\frac{d}{dx}(f + g) = \frac{d}{dx}(f) + \frac{d}{dx}(g)$. Osim toga, iz svojstva (ii) slijedi i njegova homogenost ($\frac{d}{dx}(\lambda f) = \lambda \frac{d}{dx}(f)$). Prema tome, vidimo da je diferenciranje linearno preslikavanje.

2.2 Geometrijsko i fizikalno tumačenje derivacije funkcije

Geometrijsko i fizikalno tumačenje izvoda

Neka se materijalna tačka kreće po pravoj tako da funkcija $s = s(t)$ izražava pređeni put, od neke početne tačke $O(0, 0)$, u funkciji od vremena t. Prema tome, u trenutku t materijalna tačka se nalazi u tački $M(t, 0)$, a u trenutku $t + \Delta t$ u tački $N(t + \Delta t, 0)$. Pređeni put do trenutka t je $s(t)$, a do $t + \Delta t$ je $s(t + \Delta t)$. Nas zanima kako odrediti brzinu te tačke kada je ona u tački $M(t, 0)$.

Označimo sa v_{sr} srednju brzinu tačke na putu MN, tada je

$$v_{sr} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

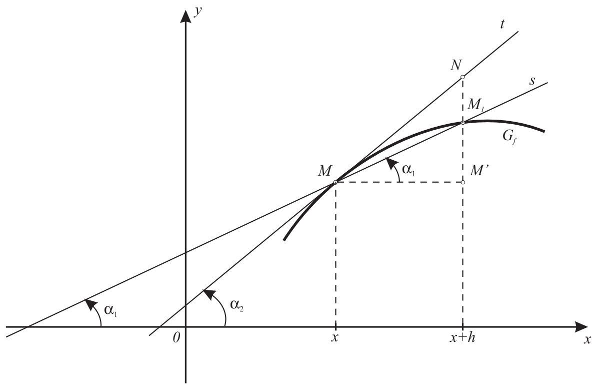
Prirodna definicija trenutne brzine tačke u momentu M je granična vrijednost srednje brzine kada N teži prema M (a to će se dogoditi ako $\Delta t \to 0$). Dakle, brzina $v(t)$ u tački M se definira kao

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t),$$

tj. prvom derivacijom funkcije $s(t)$ po argumentu t. Geometrijski, prva derivacija (konačna ili beskonačna) funkcije f, u tački x_0, predstavlja koeficijent pravca tangente (t) na krivu G_f u tački x_0.

Da bismo se u to uvjerili, najprije trebamo definirati tangentu krive.

Definicija. Tangenta na neku krivu G_f, u zadatoj tački $(x_0, f(x_0))$ te krive, definira se kao prava koja sadrži tačku $(x_0, f(x_0)) \in G_f$, a predstavlja granični položaj snopa sječica (tetiva) krive, koje spajaju tačku $(x_0, f(x_0))$ kao stalnu i bilo koju drugu tačku $(x, f(x))$ na krivoj. Pri tome snop sječica nastaje pomijeranjem tačke $(x, f(x))$ po krivoj prema stalnoj tački $(x_0, f(x_0))$.



Ako fiksiramo tačku $M(x_0, f(x_0)) \in G_f$, tada snop pravih koje prolaze kroz tačku M imaju jednačinu

$y - f(x_0) = k(x - x_0)$, (P)

gdje sve prave snopa imaju koeficijent pravca k. Prava koja ima koeficijent $k = tg\alpha_2 = f'(x)$, jasno, predstavlja tangentu krive G_f. Naime, koeficijent pravca sječice (s) je

$$tg\alpha_1 = \frac{M_1M'}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

2.3 Tablica izvoda

Tablica derivacija

	Funkcija $f(x)$	**Derivacija** $f'(x)$	**Vrijedi za**
1.	$C = const.$	0	$x \in \mathbb{R}$
2.	x	1	$x \in \mathbb{R}$
3.	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, q = 2k-1; x \neq 0$
			$\alpha = \frac{p}{q} > 1, q = 2k-1; x \in \mathbb{R}$
4.	a^x	$a^x \ln a$	$a \in R^+ \setminus \{1\}\, ; x \in \mathbb{R}$
5.	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\, ; x \in \mathbb{R}^+$
6.	$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
7.	$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
8.	$tgx = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos x}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$
9.	$ctgx = \frac{1}{tgx}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$
10.	$arc\cos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$

	Funkcija $f(x)$	**Deriv** f'
11.	$\arcsin x$	[illegible]
12.	arctg x	[illegible]
13.	$arcctgx$	[illegible]
14.	shx	[illegible]
15.	thx	[illegible]
16.	$arshx = $ $= \ln(x + \sqrt{1+x^2})$	[illegible]
17.	$arhx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$	[illegible]

Teorem 2.4 (Derivacija složene funkcije)**.** *Neka su zadate funkcije fig takve da je definirana složena funkcija $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Neka, dalje, funkcija f ima konačnu derivaciju u tački x, a funkcija g ima prvu derivaciju u tački $f(x)$. Tada superpozicija $g \circ f$ ima derivaciju u tački x i vrijedi:*

$$(g \circ f)'(x) = g(f(x))' = g'_f(f) f'_x(x). \qquad \textit{(P4)}$$

Ovaj proces možemo onda nastaviti, tj. na primjer

$$z = z(w),\ w = w(y),\ y = y(x) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dw}\frac{dw}{dy}\frac{dy}{dx}$$

Primjer. Naći izvod funkcije $z = 3(3x^2 - 2)^2$.

Primjer. Naći izvod funkcije $y = 6\sqrt{2x - 3}$.

Primjer. Naći izvod funkcije $y = e^{-2x^2}$.

Teorem 2.5 (Derivacija inverzne funkcije)**.** *Neka funkcija $y = y(x)$ ima derivaciju u tački x. Neka dalje, postoji inverzna funkcija $x = x(y)$, koja je neprekidna u tački y.*

Ako je $y'(x) \neq 0$ tada je funkcija $x(y)$ diferencijabilna i vrijedi

$$y'_x \cdot x'_y = 1.$$

Primjer. Funkcija $y = \arcsin x$ za $x \in (-1, +1)$ predstavlja inverznu funkciju funkcije $x = \sin y$. Koristeći gornju formulu, možemo odrediti derivaciju funkcije $y(x)$.

Primjer. Elementarna funkcija $y = \cosh x \overset{def}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ima derivaciju

$$y' = (\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \overset{def}{=} shx$$

Ako iz jednakosti $e^x + \frac{1}{e^x} = 2y$ izrazimo $x, (x > 1)$, dobijamo da je inverzna funkcija funkcije $\cosh x$ funkcija

$$\operatorname{arccosh} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right) \quad \textit{(areacosinushiperbolikus)}$$

čija je derivacija $(archx)' = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Logaritamska derivacija

Neke funkcije mogu biti zadane analitičkim izrazom koji nije pogodan za određivanje derivacije po definiciji, budući da se komplikuje izračunavanje odgovarajućih limesa. Takav je primjer funkcije

$$F(x) = [f(x)]^{\phi(x)}\,, \tag{2}$$

gdje su f i ϕ diferencijabilne funkcije na $E = (a,b)$, na kome je i $f(x) > 0$.

Sa druge strane ako se logaritmira (2), onda dobijamo funkciju

$$\Lambda(x) = \ln F(x) = \phi(x)\ln[f(x)]\,. \tag{3}$$

Prema tome, funkcija $F(x)$ je implicitno zadata pomoću

$$\ln F(x) - \phi(x)\ln[f(x)] = 0.$$

Potražimo derivaciju funkcije (3) kao superpozicije dvije funkcije F i $\ln$. Dakle

$$\Lambda'(x) = \frac{1}{F(x)}\cdot F'(x), \tag{4}$$

dobijamo izraz na desnoj strani $\frac{F'}{F}$, koji se naziva logaritamska derivacija funkcije F.

$$F'(x) = [f(x)]^{\phi(x)}\left[\phi'(x)\ln[f(x)] + \phi(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right].$$

Primjer. Naći izvode funkcija

$$y = x^{\sin x}$$

i

$$y = (x+1)^{2x-1)}.$$

Diferenciranje implicitne funkcije

Ako je izrazom $F(x,y) = 0$ implicitno zadata diferencijabilna funkcija $y(x)$, njena se derivacija može odrediti iz relacije

$$F'_x + F'_y y'_x = 0,$$

koja diferenciranjem (po promjenljivoj x) slijedi iz $F(x,y) = 0$.

Prema tome za derivaciju diferencijabilne funkcije $y(x)$, zadate implicitno $F(x,y) = 0$, koristićemo formulu

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}. \qquad \text{(P8)}$$

Primjer. Naći izvod funkcije $x^2 + y^2 - 5 = 0$.

Primjer. Naći izvod funkcije $x \ln y + y^2 \ln x + 3y = 0$.

2.4 Diferencijal funkcije

Definicija 2.6 (Diferencijal funkcije)**.** Diferencijal funkcije f u tački x u kojoj je funkcija diferencijabilna, u oznaci $df(x)$ ili df, je proizvod derivacije funkcije i priraštaja nezavisno promjenljive u toj tački, tj.

$$df(x) = f'(x)h. \tag{5}$$

Ako uzmemo $i(x) = x$, onda je prvi diferencijal

$$di(x) = dx = (x)'h = h;$$

vidimo da je diferencijal funkcije, koja je identički x, jednak h zbog toga, po dogovoru, pišemo $h = dx$.

Prema tome, diferencijal funkcije f, je $df = f'dx$. Sad ovu jednakost možemo podijeliti sa dx ; odakle dobijamo $\frac{df}{dx} = f'(x)$, što smo već uveli u uznakama za prvu derivaciju funkcije.

Geometrijski, diferencijal funkcije u tački x predstavlja priraštaj tangente, koji se definira kao dužina $M'N$ na slici geometrijske interpretacije.

Teorem 2.7. *Neka su funkcije f i g diferencijabilne na skupu (a, b). Tada, u tačkama intervala (a, b) gdje je $g \neq 0$, vrijedi*

(i) $d(f \pm g) = df \pm dg$;

(ii) $d(fg) = (df)g + f(dg)$;

(iii) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(df)g - f(dg)}{g^2}$.

3 Derivacije i diferencijali višega reda

Derivacije i diferencijali višega reda

Pretpostavimo sada da postoji derivacija $f'(x)$ neke funkcije f u okolini tačke $x_0 \in (a, b)$. Često deriviranjem funkcije f dobijamo funkciju koja, zapravo, i sama ima derivaciju u nekoj okolini te ili druge tačke, tj. postoji

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}.$$

Posljednju graničnu vrijednost označavamo sa $f''(x_0)$ (koristimo i oznake $y''_x(x_0), y''_{x_0}$, $\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)$) i zovemo **druga derivacija funkcije** (ili drugim izvodom funkcije) f u tački $x_0 \in (a,b)$. Indukcijom možemo uvesti i **derivaciju** $n-$ **toga reda funkcije** ($n-$ ti izvod funkcije) f u tački $x_0 \in V(x_0) \subseteq D_{f^{(n-1)}}$, kao

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0+h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h} = \left(f^{(n-1)}(x_0)\right)', \quad \text{(*)}$$

gdje je $n \in \mathbb{N}$. Jasno, $f^{(0)}(x_0) \overset{def.}{=} f(x_0)$.

Dakle, $n-$ ta derivacija funkcije f je prva derivacija funkcije $f^{(n-1)}$ u svakoj unutrašnjoj tački $x_0 \in D_{f^{(n-1)}}$, za koju postoji limes (*). Ako se pretpostavi da su funkcije f' i f'' diferencijabilne u svakoj tački $x \in (a,b) = D_{f'}$, tada za linearno preslikavanje $\frac{d}{dx}$, vrijedi

$$\frac{d}{dx} : \mathcal{D}^1_{(a,b)} \to \mathcal{D}^1_{(a,b)};$$

a pretpostavka da postoji $f^{(n)}, n > 1$, za svako $x \in (a,b)$ znači da funkcija f ima sve derivacije do $n-$ toga reda u svim tačkama intervala (a,b). Klasu funkcija koje imaju sve derivacije do $n-$ toga reda u svim tačkama skupa $E = (a,b)$, označićemo $\mathcal{D}^{(n)}_{(a,b)}$, a ako funkcija ima derivaciju bilo kojeg reda u tačkama skupa $E = (a,b)$ onda pripada klasi beskonačno puta diferencijabilnih funkcija $\mathcal{D}^{\infty}_{(a,b)}$.

Dakle, $e^x \in \mathcal{D}^{\infty}_{\mathbb{R}} = \mathcal{D}^{\infty}_{(-\infty,+\infty)}$.

Primjer. Pokazati da funkcija $\varphi(x) = \ln(1+x)$ ima $n-$ tu ($n \in \mathbb{N}$) derivaciju u svakoj tački skupa $E = (-1,+\infty)$.

Definicija 3.1. Diferencijal n–toga reda funkcije f, u oznaci $d^n f$, jeste prvi diferencijal ($n-1$)–og diferencijala funkcije f, odnosno

$$d^n f(x) = d\left(d^{n-1} f(x)\right).$$

Budući da je $d^{n-1}f = f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}$, to je $d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n$. Ako podijelimo poslednju jednakost sa $dx^n \overset{def.}{=} (dx)^n$, dobićemo da je $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$, što predstavlja takođe oznaku za $n-$tu derivaciju funkcije f.

Leibnizova formula

Principom potpune matematičke indukcije, dokazuje se Leibnizova formula za $n-$ tu derivaciju proizvoda dvije funkcije

$$(u\cdot v)^{(n)} =$$
$$u^{(n)}v^{(0)} + \binom{n}{1} u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)}v'' + \cdots + \binom{n}{n-1} u'v^{(n-1)} + v^{(n)}u^{(0)},$$

gdje je $u^{(0)} = u(x); v^{(0)} = v(x)$.

4 Derivacija i izračunavanje limesa funkcije

Funkcija $F(x)$ za neku tačku $x = a$ (koja je tačka nagomilavanja skupa D_F), može predstavljati izraz koji nije definiran, te se ne može odmah reći kolika bi bila vrijednost $F(a)$, niti pak, koliko je $\lim\limits_{x\to a} F(x)$, ako uopšte taj limes postoji.

Dakle $F(a)$ prividno nema smisla, ali kada $x \to a$ (x teži prema a) funkcija F može imati graničnu vrijednost pa čak i beskonačnu. Tada $A = \lim\limits_{x\to a} F(x)$ ima smisla i funkcija F se može dodefinirati u tački $x = a$, naprimjer tako da je $F(a) = A$. Naravno tačka $x = a$ kao i A, može pripadati i skupu $\{-\infty, +\infty\}$. Neodređeni oblici funkcija predstavljaju oblike neodređenosti koji se često susreću, pa ćemo ovdje, dakle za

$$\left(\frac{0}{0}\right), \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right), \quad (0\cdot\infty), \quad (\infty-\infty), \quad \left(0^0\right), \quad \left(\infty^0\right), \quad (1^\infty) \tag{6}$$

pokazati kako se mogu pogodnim transformacijama svesti na oblike koji pri računanju limesa ne predstavljaju osobito tešku prepreku. Ako je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, tada transformacijom funkcije $F = \frac{f}{g}$ u $F = \frac{\frac{1}{g}}{\frac{1}{f}}$ očito neodređenost oblika $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ može se svesti na oblik $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Isto tako, funkcija $F = f\cdot g$ neodređenog oblika $(0\cdot\infty)$ u tački $x = a$, na očigledan način prelazi u $F = \frac{f}{\frac{1}{g}}$, tj. u neodređenost oblika $\left(\frac{0}{0}\right)$. Transformacijom $f - g = \frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}$ funkcija $F = f - g$, koja u tački $x = a$ ima oblik $(\infty-\infty)$, dobija neodređeni oblik $\left(\frac{0}{0}\right)$. Ako funkciju $F = f^g$ logaritmiramo, dobijamo novu funkciju $\ln F = g\ln(f)$. Desna strana u poslednjoj jednakosti pokazuje da nova funkcija može imati samo oblik $(0\cdot\infty)$, pri svim pretpostavkama kada funkcija $F = f^g$ ima neki od poslednja tri oblika neodređenog izraza, pobrojanih u (6). Još više, elementarnom transformacijom iz $\ln F = g\ln(f)$ dolazimo do

$$F = e^{g\ln(f)} = e^{\frac{\ln(f)}{\frac{1}{g}}}.$$

Sada, ako je naprimjer, $f(a) = 1$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, ponovo se dobija oblik $\left(\frac{0}{0}\right)$.

4.1 Prvo L'Hospitalovo pravilo

L'Hospitalovo pravilo

Teorem 4.1 (Prvo L'Hospitalovo pravilo)**.** *Ako f, g neprekidne na nekom segmentu $[a, b]$ i diferencijabilne na (a, b) sa istom domenom i neka je $x_0 \in (a, b)$.*

Ako je $f(x_0) = g(x_0) = 0$ i postoji $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, konačan ili beskonačan, tada *postoji i* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$*. Još više, tada vrijedi*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Primjer 16. Izračunati $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$.

Teorem 4.2. *Neka su funkcije f i g diferencijabilne u* $[a,+\infty)\,,a>0$ *i pri tome je* $g'(x)\neq 0$ *za* $x\in[a,+\infty)$ *i neka je* $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$*. Tada, ako postoji* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$*, onda postoji i* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ *i vrijedi*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}.\tag{7}$$

4.2 Drugo L'Hospitaleovo pravilo

Teorem 4.3 (Drugo L'Hospitaleovo pravilo)**.** *Neka su funkcije f i g diferencijabilne u intervalu* (a,b)*, na kome je* $g'\neq 0$ *i neka je*

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to a+0}g(x)=\infty.$$

Tada, ako postoji $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$*, onda postoji i* $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}$*. Još više, vrijedi*

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Primjer. Naći limese:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+2x}{x^2-3x+1},\quad \lim_{x\to 0}x\ln x.$$

Primjer. Izračunati $L=\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-h-1}{h^2}$.

Primjer. Limes $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$, primjenom L'Hospitalova pravila, se ne može odrediti.

Ako, suprotno tvrdnji, primijenimo L'Hospitaleov teorem da bismo odredilu ovaj limes, dobit ćemo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}.$$

Poslednji limes ne postoji. Zaista, ako stavimo $\varphi(x)=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$, tada za

$$x_k=(2k-1)\pi+\tfrac{1}{k},\ (k=1,2,...),$$

imamo $\varphi(x_k) = \frac{1-\cos(\pi - \frac{1}{k})}{1+\cos(\pi - \frac{1}{k})} \to +\infty$, kada $k \to \infty$ (jer je $\lim\limits_{k\to\infty} \cos(\pi - \frac{1}{k}) = -1$). Očigledno imamo da je $\varphi(x) \geq 0$ za $x \neq (2k-1)\pi$, jer je za sve takve x, $1+\cos x > 0$ i $1 - \cos x > 0$.

Osim toga, za $x_k^* = 2k\pi$, $(k = 1, 2, ...)$, imamo $\varphi(x_k^*) = 0$.

Sa druge strane, ako polazni limes napišemo u formi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}},$$

odmah, dobijamo da je $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x} = 1$, jer je $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. $\triangleleft$ Ovaj primjer nam pokazuje da L'Hospitalova pravila daju dovoljne, ali ne i potrebne uslove za egzistenciju granične vrijednosti funkcije.

5 Osnovni teoremi diferencijalnog računa

5.1 Lokalni ekstremi funkcije jedne promjenljive

Osnovni teoremi diferencijalnog računa

Definicija 5.1. Kažemo da funkcija f ima u tački $c \in D_f$ lokalni maksimum $f(c)$, ako postoji okolina $V(c) \subseteq D_f$ tačke c, sa svojstvom da je

$$f(x) - f(c) \leq 0, \ (\forall x \in V(c))\,; \tag{8}$$

vidi sliku a.

Funkcija f ima u tački $d \in D_f$ lokalni minimum $f(d)$, ako postoji okolina $V(d) \subseteq D_f$ tačke d, tako da vrijedi

$$f(x) - f(d) \geq 0, \ (\forall x \in V(d))\,; \tag{9}$$

vidi sliku b.

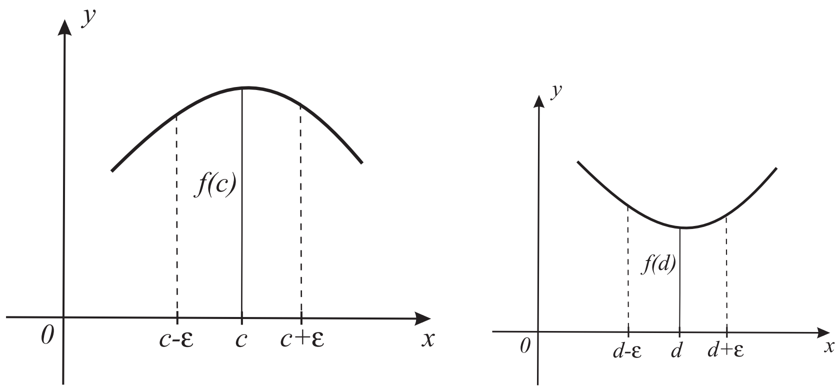
Vrijednosti $f(c)$ i $f(d)$ su lokalni ekstremumi funkcije f.

Slika a Slika b

Teorem 5.2. *Neka je funkcija f definirana na $D_f = (a, b)$ i ima derivaciju u okolini $V(x_0) \subseteq (a, b)$ tačke x_0. Ako je $f'(x) > 0$ za svako $x \in V(x_0)$, tada funkcija f strogo raste na skupu $V = V(x_0)$.*

Teorem 5.3. *Neka je funkcija f definirana na $D_f = (a, b)$ i ima derivaciju u okolini $V(x_0) \subseteq (a, b)$ tačke x_0. Ako je $f'(x) < 0$ za svako $x \in V(x_0)$, tada funkcija f strogo opada na skupu $V = V(x_0)$.*

Teorem 5.4 (Fermat)**.** *Neka je funkcija f definirana na $D_f = (a, b)$ i ima lokalni ekstremum $f(c)$ u tački $c \in (a, b)$. Tada, ako funkcija f ima derivaciju u tački c, onda je $f'(c) = 0$.*

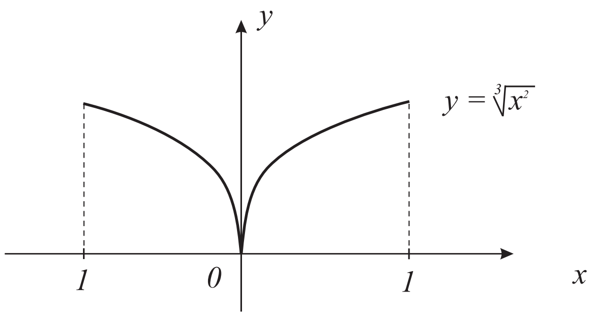


Definicija 5.5. Tačku $a \in D_f$ zovemo stacionarnom tačkom funkcije f, ako je $f'(a) = 0$.

Primjer. Pokazati da funkcija može imati lokalni ekstremum, a da derivacija u tački toga ekstremuma ne mora ni postojati.

▷ Posmatrajmo sljedeću funkciju kao primjer: $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $D_f = [-1, +1]$.

Budući da je funkcija parna, onda je G_f simetričan u odnosu na $y-$ osu (v. sliku (c)).



Slika c

Prema tome za bilo koje $h \in V(0)$, vrijednost funkcije je $f(0+h) = \sqrt[3]{h^2} > 0$; $f(0) = 0$. Dakle,

$$f(0+h) - f(0) = \sqrt[3]{h^2} > 0, (\forall h \in V(0)),$$

pa funkcija f ima lokalni minimum u nuli.

Sa druge strane,

$$\lim_{R^+ h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{R^+ h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} = \lim_{R^+ h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = +\infty.$$

Međutim, pošto je

$$\lim_{R^- h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{R^- h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h^2}}{h}=\lim_{R^- h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{h}}=-\infty,$$

$f'(0)$ ne postoji, što je trebalo i pokazati. ◁

Teorem 5.6 (Rolle)**.** *Neka je funkcija f definirana na $D_f=[a,b]$ i neka ispunjava sljedeće uslove:*

(i) $f\in C_{[a,b]}$;

(ii) postoji derivacija $f'(x)$ u svakoj tački $x\in(a,b)$;

(iii) $f(a)=f(b)$.

Tada funkcija f ima stacionarnu tačku koja pripada (a,b).

Primjer. Pokazati da je egzistencija derivacije u svakoj tački intervala (a,b) bitna pretpostavka Rolleovog teorema.

▷ Funkcija iz gornjeg primjera je očito neprekidna na $[-1,+1]$ i vrijedi $f(-1)=f(1)$. Prema tome uslovi (i) i (iii) teorema 8 su ispunjeni, međutim uslov (ii), kao što smo pokazali u primjeru, ne. Dakle Rolleov teorem ne vrijedi za $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, što se vidi i iz same derivacije funkcije

$$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\neq 0,(x\in[-1,+1])\,.◁$$

Teorem 5.7 (Lagrange)**.** *Ako je funkcija f definirana na $D_f=[a,b]$ i ispunjava sljedeće uslove:*

(i) $f\in C_{[a,b]}$;

(ii) postoji derivacija $f'(x)$ u svakoj tački $x\in(a,b)$.

Tada postoji $c\in(a,b)$, tako da vijedi

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c). \tag{10}$$

Teorem 5.8. *Ako je funkcija $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ diferencijabilna na (a,b) te ako je svako $x\in(a,b)$ stacionarna tačka funkcije, tj. $f'(x)=0$, tada je f konstanta na $[a,b]$.*

Dokaz. Funkcija f zadovoljava uslove Lagrangeovog teorema na $[a,x]$, gdje je x bilo koja tačka iz (a,b). Iz (10) dobijamo

$$f(x)-f(a)=f'(c)(x-a).$$

Budući da je $c\in(a,x)$ stacionarna tačka funkcije, to iz poslednje relacije dobijamo da je $f(x)=f(a)$ za svako x, pa je f konstanta na $[a,b]$, što je i trebalo dokazati. □

Teorem 5.9. *Neka je funkcija* $f \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ i $f \in \mathcal{D}^1_{(a,b)}$.

Ako postoji $\lim\limits_{x \to a+0} f'(x) \quad \left(\lim\limits_{x \to b-0} f'(x)\right)$*, tada postoji i* $f'_d(a) \quad (\ f'_l(b) \ )$ *i vrijedi*

$$\lim_{x \to a+0} f'(x) = f'_d(a) \left(\lim_{x \to b-0} f'(x) = f'_l(b)\right).$$

Teorem 5.10 (Darboux)**.** *Ako je* $f \in \mathcal{D}^1_{[a,b]}$ *onda za proizvoljan realan broj* λ *između vrijednosti* $f'(a)$ *i* $f'(b)$*, postoji* $c \in (a,b)$ *takav da je* $\lambda = f'(c)$.

Teorem 5.11 (Cauchy)**.** *Ako* $f, g \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ *i* $f, g \in \mathcal{D}^1_{(a,b)}$*, pri čemu f nema stacionarnih tačaka na* (a,b)*, onda postoji* $c \in (a,b)$ *tako da vrijedi*

$$\frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{g'(c)}{f'(c)}. \tag{11}$$

Cauchyev teorem vrijedi i na $[x, x+h] \subset [a,b]$, tj. važi formula

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{f(x+h) - f(x)} = \frac{g'(x+\theta h)}{f'(x+\theta h)}, (0 < \theta < 1). \tag{12}$$

Vidjeli smo da, diferencijabilna funkcija u nekoj tački, negativne derivacije u okolini (koja je dio domena funkcije) te tačke, je opadajuća na tome skupu. Analogno, funkcija čija je derivacija pozitivna je rastuća. Ovdje ćemo pokazati da vrijedi i obrat.

Teorem 5.12. *Ako je diferencijabilna funkcija* $f(x)$ *rastuća (opadajuća) na intervalu* (a,b)*, tada je* $f'(x) \geq 0 \ \ (f'(x) \leq 0)$ *za* $x \in (a,b)$.

Prije toga, razmotrimo ponovo funkciju $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ iz ranijeg primjera, na skupu $D = [-1,1]$. Pokazali smo da je $f(0)$ lokalni minimum funkcije, ali da je u isto vrijeme $f'(0)$ ne postoji. Osim toga, uočavamo da je

$f'(x) < 0,$ za $x \in [-1,0)$ i $f'(x) > 0,$ za $x \in (0,1]$,

tj., prva derivacija mijenja znak u tački $a = 0$ u kojoj funkcija f ima lokalni ekstremum. Da to nije slučajno, pokazuje

Teorem 5.13 (Prvo pravilo)**.** *Pretpostavimo da je* $U(a)$ *okolina tačke* a *i da je* f *neprekidna na njoj. Ako je* $f(x)$ *diferencijabilna na skupu* $U(a) \setminus \{a\}$*, tada je u tački* a *lokalni ekstremum funkcije* $f(x)$ *ako funkcija* $f'(x)$ *mijenja znak u tački* a.

Pri tome

1. *ako je* $f'(x) < 0, x \in U \cap (-\infty, a)$ *i* $f'(x) > 0, x \in U \cap (a, \infty)$*, tada je u tački* a *lokalni minimum;*
2. *ako je* $f'(x) > 0, x \in U \cap (-\infty, a)$ *i* $f'(x) < 0, x \in U \cap (a, \infty)$*, u tački* a *je lokalni maksimum.*

Primjer. Funkcija $\varphi(t) = |2t-1|$ ima derivaciju

$$\varphi'(t) = \begin{cases} 2, \text{ za} & t > \frac{1}{2} \\ -2, \text{ za} & t < \frac{1}{2} \end{cases},$$

pa je jasno da u tački $t = \frac{1}{2}$ postoji lokalni minimum, koji iznosi $\varphi(\frac{1}{2}) = 0$.

Teorem 5.14 (Drugo pravilo)**.** *Neka je $f''(x)$ definirana u stacionarnoj tački c funkcije $f(x)$. Tada ako je $f''(c) > 0\,(f''(c) < 0)$, funkcija $f(x)$ u stacionarnoj tački c ima lokalni minimum (maksimum).*

Primjer. Funkcija $f(x) = x \ln x$ ima u tački $x = e^{-1}$ lokalni minimum $f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$.

$\triangleright$ Zaista, jednačina $f'(x) = \ln x + 1 = 0$, anulira se u tački $x = e^{-1}$. Dakle funkcija f ima stacionarnu tačku e^{-1}. Osim toga, druga derivacija $f''(x) = \frac{1}{x}$, u stacionarnoj tački, ima vrijednost $f''(e^{-1}) = e > 0$. $\triangleleft$

Razmotrićemo opšti slučaj, tj. slučaj kada u stacionarnoj tački c, n prvih derivacija funkcije f imaju svojstvo

$$f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0,\ f^{(n)}(c) \neq 0. \tag{13}$$

Ako je $n = 2k-1$, tj. ako je n neparan broj, funkcija nema lokalnog ekstremuma u stacionarnoj tački c.

Sa druge strane, ako je $n = 2k$, tj. n je parno i ako je $f^{(n)}(c) > 0$ funkcija f ima lokalni minimum u c. Jednako tako, ako je $f^{(n)}(c) < 0$ funkcija f ima lokalni maksimum u c.

5.2 Konveksnost i konkavnost

Konveksnost i konkavnost

Definicija 5.15. Za funkciju $f : D_f \to \mathbb{R}$ kažemo da je konveksna na $(a,b) \subseteq D_f$ ako za proizvoljno izabrane $x, y \in (a,b)$ i$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, \alpha + \beta = 1$, vrijedi

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y). \tag{14}$$

Funkcija je konkavna na $(a,b) \subseteq D_f$,tj. ima drugi tip konveksnosti, ako u (14) vrijedi obrnuta nejednakost.

Funkciju koja je jednovremeno konveksna i konkavna, tj. ima svojstvo oba tipa konveksnosti na nekome intervalu, nazivamo afinom funkcijom.

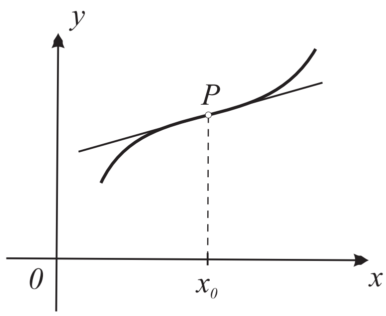
Teorem 5.16. *Neka je $f \in \mathcal{D}^{(1)}_{(a,b)}$. Da bi f bila konveksna na (a,b) potrebno je i dovoljno da funkcija f' raste na (a,b) .*

Neposredna posljedica prethodnog teorema je

Teorem 5.17. *Neka funkcija $f : D_f \to \mathbb{R}$ ima drugu derivaciju u svakoj tački $(a, b) \subseteq D_f$. Da bi f bila konveksna (konkavna) na (a, b), potrebno je i dovoljno da bude $f''(x) \geq 0\,(f''(x) \leq 0)$, za svako $x \in (a, b)$.*

Definicija 5.18. Neka je funkcija $f(x)$ definirana u nekoj okolini $U(x_0)$ tačke x_0 i diferencijabilna na $U(x_0)\setminus\{x_0\}$. Tačka $P\,(x_0, f(x_0))$ naziva se prevojna tačka krive G_f ako funkcija $f(x)$ na skupovima $(-\infty, x_0)\cap U(x_0) i U(x_0)\cap(x_0, +\infty)$ ima različit tip konveksnosti; slika a

Potreban uslov da kriva G_f funkcije $y = f(x), f'' \in C_{U(x_0)}$ ima prevojnu tačku $(x_0, f(x_0))$ u x_0, čija je $U(x_0)$ dovoljno mala okolina, jeste anuliranje druge derivacije, tj. $f''(x_0) = 0$.



Slika a

Teorem 5.19. *Neka je $f \in \mathcal{D}^{(1)}_{U(x_0)}$ i ima konačnu drugu derivaciju u svim tačkama okoline $U(x_0)$ tačke x_0, osim možda same tačke x_0.*

Ako funkcija $f''(x)$ mijenja znak pri prolazu argumenta kroz tačku x_0, tada je $(x_0, f(x_0))$ prevojna tačka krive $y = f(x)$.

Teorem 5.20. *Neka je $f''(x_0) = 0$, a $f'''(x_0) \neq 0$. Tada je $(x_0, f(x_0))$ prevojna tačka krive $y = f(x)$.*

Primjer. Funkcija $\varphi(t) = t^2 \ln t, D_\varphi = (0, \infty)$ mijenja konveksnost na D_φ.

$\triangleright$ Budući da je $\varphi'(t) = 2t \ln t + t; \varphi''(t) = 2 \ln t + 3$, to je $\varphi''(t) = 0$ za $t = e^{-\frac{3}{2}}$. Osim toga, $\varphi''(t) > 0$ za svako $t \in \left(e^{-\frac{3}{2}}, \infty\right)$, pa je na tome intervalu funkcija φ konveksna, a zbog $\varphi''(t) < 0$ na $\left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right)$ ona je konkavna na tome dijelu skupa D_φ. Prevoj funkcije φ je, dakle, na osnovu teorema 22, tačka $P\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2}e^{-3}\right)$. $\triangleleft$

5.3 Ispitivanje funkcije i crtanje grafika

Ispitivanje funkcije i crtanje grafika

Ovdje ćemo, na izvjestan način, sumirati glavne rezultate koje smo u ovoj glavi dokazali i iste iskoristiti u procesu ispitivanja elementarne funkcije f i skiciranja njenog grafika G_f .

U dosadašnjoj analizi funkcija, pokazala se veoma korisnom skica grafika funkcije, zbog očiglednosti prilikom sagledavanja osobina te funkcije.

U cilju određivanja slike skupa G_f (koja može poslužiti u mnogim prilikama), elementarne funkcije $y = f(x)$ koja je zadata analitičkim izrazom, uobičajeno je koristi sljedeću shemu:

I korak. Odrediti oblast definiranosti D_f funkcije f .

II korak. Ispitati specijalna svojstva funkcije (parnost, periodičnost i sl.).

III korak. Ispitati kako se funkcija ponaša na rubovima domena; odrediti sve njene asimptote.

IV korak. Odrediti nule (tačno ili približno) i znak funkcije.

V korak. Odrediti prvu i drugu derivaciju funkcije.

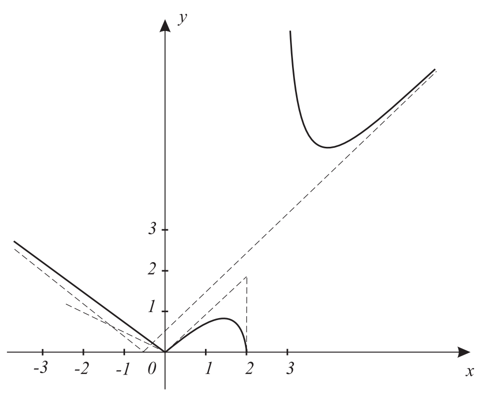
VI korak. Odrediti intervale monotonosti funkcije i njene ekstremne vrijednosti.

VII korak. Odrediti tip konveksnosti funkcije i prevojne tačke.

VIII korak. Ispitati i sve ostale specifičnosti grafika G_f date funkcije f (položaj grafika prema asimptotama, presjek sa njima ako postoji i sl.). **Primjer 24.** Grafik dat

na slici, predstavlja grafik funkcije

$$y(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 2x^2}{x - 3}}. \tag{15}$$



Slika 5.13

$\triangleright$ Najprije funkciju dovedimo na oblik $y(x) = |x|\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}$, što je očito prikladnija forma za početna ispitivanja.

Funkcija (15) je definirana za svako $x \in \mathbb{R}$, za koje je

$$\frac{x-2}{x-3} \geq 0 \wedge x \neq 3,$$

odnosno za $x \leq 2$ ili $x > 3$. Prema tome, $D_y = (-\infty, 2] \cup (3, +\infty)$. Funkcija je pozitivna za $x \neq 0$ i $x \neq 2, y(0) = y(2) = 0$. Budući da je $\lim\limits_{x\to 3+0} y(x) = \lim\limits_{x\to 3+0} |x|\sqrt{\frac{x-2}{x-3}} = +\infty$, to je $x = 3$ vertikalna asimptota krive. Kada $x \to \infty$, imamo

$$y(x) = |x|\left(\frac{x-2}{x-3}\right)^{\frac{1}{2}} = |x|\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= |x|\left(1-\frac{1}{x}+o(\tfrac{1}{x})\right)\left(1+\frac{3}{2x}+o(\tfrac{1}{x})\right) = |x|\left(1+\frac{1}{2x}+o(\tfrac{1}{x})\right);$$

odakle, kada $x \to +\infty$ dobijamo

$y(x) = x + \frac{1}{2} + o(1)$, a ako $x \to -\infty : y(x) = -x - \frac{1}{2} + o(1)$.

Prema tome je $y = x + \frac{1}{2}$, kosa asimptota kada $x \to +\infty$, a $y = -x - \frac{1}{2}$ kada $x \to -\infty$.

Funkcija je očito dva puta diferencijabilna svuda na domenu, osim u $x = 0$ i $x = 2$. Nije teško naći derivacije

$$y'(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x-3}}\frac{2x^2-11x+12}{2(x-2)(x-3)} \cdot sign(x),$$

$$y''(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x-3}}\frac{11x-24}{4(x-2)^2(x-3)^2} \cdot sign(x).$$

Budući da je $y'(x) = 0$ za $x = \frac{3}{2}$, a $y"(\frac{3}{2}) < 0$, funkcija ima lokalni maksimum u toj tački, $y(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; isto tako, u $x = 4$, funkcija ima lokalni minimum $y(4) = 4\sqrt{2}$.

Primijetimo, ako $x \to 2-0$, tangenta na G_y je vertikalna, jer vrijedi $\lim\limits_{x\to 2-0} y'(x) = +\infty$. Lako je vidjeti da vrijedi

$$\lim_{x\to -0} y'(x) = -\sqrt{2/3}, \quad \lim_{x\to +0} y'(x) = \sqrt{2/3},$$

što predstavlja korisnu informaciju o funkciji, svejedno što ona, dakle, nije diferencijabilna u $x = 0$.

O konveksnosti zadate funkcije zaključujemo iz znaka druge derivacije. Funkcija je konveksna na intervalima $x < 0$ i $x > 3$. Iz te informacije možemo, takođe, zaključiti da se kriva primiče kosoj asimptoti sa gornje strane kada $x \to -\infty$ i kada $x \to +\infty$. Kriva je, na intervalu $0 < x < 2$ konkavna, jer je na njemu $y''(x) < 0$.

5.4 Taylorova formula

Taylorova formula

Neka je dat polinom $p(x)$, $n-$ toga stepena

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n. \quad (16)$$

Derivacijom polinoma $p(x)$ dovoljan broj puta, mogu se koeficijenti a_k polinoma $p(x)$ napisati u obliku

$$a_k = \tfrac{p^{(k)}(0)}{k!}, (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Dakle, polinom (16) možemo napisati sa novim koeficijentima uz stepene po x, pomoću formule

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \frac{p'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n. \quad (17)$$

Umjesto razlaganja polinoma (16) po stepenima x oblika (17), možemo to razlaganje napraviti po stepenima $x - x_0$, gdje je x_0 jedna od vrijednosti argumenta x, pa poopštavamo (17)

$$p(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + A_3(x - x_0)^3 + \cdots + A_n(x - x_0)^n. \quad (18)$$

Stavimo li u (18) $x - x_0 = \xi, p(x) = p(x_0 + \xi) = P(\xi)$, onda za koeficijente polinoma $P(\xi) = A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2 + A_3\xi^3 + \cdots + A_n\xi^n$, tj. polinoma (18), prema već dokazanom, imamo

$$A_k = \tfrac{P^{(k)}(0)}{k!}, (k = 0, 1, \ldots, n).$$

No sa druge strane je

$$P(\xi) = p(x_0 + \xi), P'(\xi) = p'(x_0 + \xi), P''(\xi) = p''(x_0 + \xi), \ldots$$

pa je $P(0) = p(x_0), P'(0) = p'(x_0), P''(0) = p''(x_0), \ldots$, odnosno

$$A_k = \tfrac{p^{(k)}(x_0)}{k!}, (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Zamjenom dobijenih koeficijenata u (18), dolazimo do

$$p(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$

$$+ \frac{p'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (19)$$

Poslednju formu polinoma (16) zovemo Taylorovom formulom za polinom, dok je forma oblika (17) poznatija po imenu Maclaurinova formula za polinom.

Ako se polinom predstavi u formi

$$p(x) = c_0 + \frac{c_1}{1!}(x - x_0) + \frac{c_2}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{c_3}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{c_n}{n!}(x - x_0)^n$$

tada je očito $c_k = p^{(k)}(x_0), (k = 0, 1, \ldots, n)$. Da li možemo predstaviti proizvoljnu funkciju $f(x)$ formulom oblika (19)?

Najprije, prirodno je pretpostaviti da funkcija f ima derivacije redom

$$f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x),$$

u svim tačkama segmenta $[a, b]$ koji sadrži tačku x_0, a $n-$ tu derivaciju $f^{(n)}(x_0)$ ima u samoj tački x_0. Tada po obrascu (19) i za funkciju $f(x)$ možemo formirati polinom

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad (20)$$

koji očito, kao i sve njegove derivacije do $n-$toga reda u tački x_0, imaju iste vrijednosti kao i funkcija $f(x)$ odnosno i sve njene derivacije.

Međutim, bitno je naglasiti, ukoliko funkcija $f(x)$ nije polinom $n-$ toga stepena, ne može se napisati $p(x) = f(x)$. Polinom (20), samo daje neki oblik približenja funkciji $f(x)$. Zato je osobito važno izpitati razliku

$$r(x) = f(x) - p(x). \quad (21)$$

Na osnovu osobina polinoma $p(x)$, (20), očito za funkciju $r(x)$, vrijedi

$$r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = \cdots = r^{(n)}(x_0) = 0. \quad (22)$$

Lema 5.21. *Ako funkcija $r(x)$ ima sve derivacije u tački x_0 do n- toga reda, koje zadovoljavaju uslov*

$$r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = \cdots = r^{(n)}(x_0) = 0,$$

tada vrijedi

$$r(x) = h_n(x)(x - x_0)^n,$$

gdje je

$$\lim_{x \to x_0} h_n(x) = 0.$$

Stoga vrijedi formula

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + h_n(x)(x - x_0)^n. \quad (23)$$

Ovo se naziva Taylorovom formulom sa ostatkom u Peanovoj formi. Taylorovom formulom (23) funkciju $f(x)$ predstavljamo polinomom $n-$oga stepena, ali sa tačnošću do jedne beskonačno male, reda većeg od n.

Nije teško pokazati da je predstavljanje funkcije $f(x)$ u obliku (23) jedinstveno!

Ako se u formuli (23) stavi $x_0 = 0$, dobija se Maclaurinova formula za funkciju $f(x)$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + h_n(x)x^n, \quad (24)$$

gdje je $h_n(x) \to 0$ kad $x \to 0$.

Primjer. Napisati Maclaurinove formule za funkcije:

$$f(x) = e^x; \quad f(x) = \sin x \quad f(x) = \ln(1+x).$$

Budući da je $f^{(k)}(x) = e^x$, za $k = 1, 2, 3, \dots$ i bilo koje $x \in \mathbb{R}$, to je u ovom slučaju $f(0) = f^{(k)}(0) = 1$, pa formula (24) za funkciju $f(x) = e^x$ daje

$$e^x = 1 + \tfrac{x}{1!} + \tfrac{x^2}{2!} + \cdots + \tfrac{x^n}{n!} + h_n(x)x^n.$$

Za sinus imamo:

$$\sin x = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\tfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + h(x)x^{2n-1}. \tag{25}$$

Prema već urađenom primjeru za funkciju $f(x) = \ln(1+x)$, imamo

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, n \in \mathbb{N},$$

odnosno $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$, pa imamo da je

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + h_n(x)x^n.$$

Primjena Taylorovog polinoma

Formula sa ostatkom u Peanovom obliku, ima značajnu ulogu i primjene u analizi. No formula je očigledno "lokalnog" karaktera, tj. vrijedi samo za tačku x_0 ili, u najboljem slučaju, za tačke dovoljno bliske toj tački x_0.

Postojala je potreba da se pokuša iskoristiti polinom $p(x)$ kao aproksimacija funkcije $f(x)$, pomoću kojega se vrijednosti funkcije mogu izračunati sa dovoljnom tačnošću za svaku tačku x.

Za takvu ulogu polinoma $p(x)$, morali bismo biti u stanju procijeniti razliku (21) za bilo koje dato x. Budući da Peano ostatak daje samo informaciju da $r(x) \to 0$, kada $x \to x_0$, to je očito da forma (23) ne može obezbjediti polinomu $p(x)$ tu ulogu. Zato ćemo izvesti drugu formu dodatnog člana $r(x)$, za koju ćemo istaći njegovu ovisnost od n. Radi određenosti, pretpostavit ćemo da je $x \in [x_0, x_0 + h]$.

Na kraju, Taylorova formula za funkciju $f(x)$ sa *Lagrangeovim ostatkom* ima oblik

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \tfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \tfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots \\ &+ \tfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \tfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, x_0 < c < x. \end{aligned} \tag{T}$$

Formula (T) je najprikladnija za primjenu, a njena se opštost ne umanjuje što je izvedena samo za slučaj $x_0 < x$; jasno je da ona vrijedi i ako je $x < c < x_0$.

Ako u formuli (T) uvrstimo $x_0 = 0$, dobijamo Maclaurinovu formulu za funkciju $f(x)$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \text{ (M)}$$

gdje je $0 < \theta < 1$. Ako se u formulama (T) i (M) naprosto izostavi ostatatak, tada se dobijene formule nazivaju približne formule, a ako je $f^{(n+1)}(x)$, po apsolutnoj vrijednosti, ograničen nekim brojem $\Lambda > 0$ na razmaku (x_0, x) (odnosno na $(0, x)$), tada se dobija sljedeća aproksimacija ostatka

$$|r_n(x)| \leq M\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Poslednja procijena ostatka je ujedno i procjena greške koja se čini pri prelazu sa vrijednosti funkcije (u tački x) na vrijednost njene približne formule u toj istoj tački. Prema tome, ako stavimo $x = 1$ u gornjem primjeru, u približnoj formuli za funkciju e^x, dobićemo

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Učinjena greška će biti

$$r_n(1) = \frac{e^\theta}{(n+1)!} \leq \frac{e^1}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!},$$

jer je $\theta < 1$. Još više, iz poslednje procjene možemo odrediti koliko sabiraka trebamo uzeti na desnoj strani u

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

pa da greška ne bude veća od nekog unaprijed zadatog broja. Ako je taj broj npr., 10^{-2}, onda iz

$$r_n(1) \leq \frac{3}{(n+1)!} \leq \frac{1}{10^2}$$

slijedi da je $(n+1)! \geq 300$. Odavde, jednostavnom provjerom, dolazimo do $n = 5$.

To znači, ako stavimo $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2,715$ onda su prve dvije decimale u decimalnom razlomku broja $e = 2,715$ tačne.