Univerzitet u Tuzli
Prirodno – matematički fakultet
Odsjek matematika

Finalni ispit iz predmeta Diferencijalni račun funkcija jedne promjenljive

12. januar 2015.

1. Za bilo koji broj $t \in \mathbb{R}$, kako definišemo $\cos t$ i $\sin t$? Navesti osobine obje funkcije i skicirati grafove funkcija.

2. Definisati te obajasniti kako u matematici kreiramo *inverznu* funckiju realne funkcije jedne promjenljive, navesti njene osobine, neophodne uslove za postojanje, te definisati i opisati funkciju $\arcsin x$. Dokazati da je

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

3. Koja su to tri klasična problema koji su doveli do razvoja pojmova limesa, te diferencijalnog i integralnog računa? Opisati ih i pojasniti!

4. Odrediti da li su slijedeće funkcije neprekidne u tački $x = 0$, navodeći *precizno* zašto jesu ili nisu::

$$f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1}, \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1}, & x \neq 0 \\ -2, & x = 0 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

5. Neka je data realna funkcija $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Definisati prvi izvod funkcije f u tački $x \in (a, b)$, navesti osobine prvog izvoda i dati geometrijsku interpretaciju izvoda.

6. Vrijedi li tvrđenje:

   Funkcija jedne promjenljive $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ je diferencijabilna u tački $x = x_0$ ako i samo ako je neprekidna u x_0

   Ukoliko vrijedi, dokazati, ukoliko ne vrijedi, dati kontraprimjer.

7. Kako određujemo prvi izvod funkcije $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ oblika $F(x) = f(x)^{\phi(x)}$? Izračunati prvi izvod funkcije $F(x) = (\cos x^2)^{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}$.

8. Pojasniti primjenu diferencijalnog računa u određivanju intervala konveksnosti (konkavnosti) funkcije $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Odrediti intervale konveksnosti funkcije $f(x) = xe^{-x^2}$.

Ime i prezime:. . . . . Broj indexa: . . . .