MATEMATIKA

Nermin Okičić
Vedad Pašić

Diferencijalne jednačine

2016

MATEMATIKA

Sadržaj

Poglavlje 1

Diferencijalne jednačine

Tipovi diferencijalnih jednačina čija se rješenja mogu izraziti pomoću konačnog broja elementarnih funkcija i njihovih integrala su veoma malobrojni. To posebno vrijedi za jednačine drugog i višeg reda, gdje postoje samo posebni slučajevi koji se mogu riješiti elementarno u gore navedenom smislu. Istorijski gledano, njihov značaj je veliki jer su prva saznanja o diferencijalnim jednačinama i stečena proučavanjem takvih tipova jednačina, počevši od Newtona i Leibnitza. Kako je osnovni momenat njihovog rješavanja uvijek bila integracija kao postupak inverzan izvodu, takvi tipovi jednačina se nazivaju integrabilnim, postupak rješavanja nazivamo integracija, a samo rješenje se zove *integral diferencijalne jednačine.*

1.1 Diferencijalne jednačine prvog reda

U prvom dijelu posmatrat ćemo jednačine prvog reda tojest, rješavat ćemo problem

$$y' = f(x, y) \ , \tag{1.1.1}$$

sa početnim (inicijalnim) uslovom

$$y(x_0) = y_0 \ .$$

Dati problem se naziva Cauchyjev problem ili problem sa početnim uslovom.

1.1.1 Jednačina sa razdvojenim promjenljivima

To je jednačina kod koje se u (1.1.1) desna strana može napisati kao proizvod dviju funkcija od kojih jedna zavisi samo od x, a druga samo od y, tj. jednačina koja ima formu

$$y' = f(x)g(y) \ . \tag{1.1.2}$$

Sljedećim teoremom dati su uslovi za postojanje i jedinstvenost rješenja jednačine (1.1.2).

Teorem 1.1.1

Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu (a, b) i neka je funkcija $g(y)$ neprekidna i različita od nule na intervalu (c, d). Tada postoji jedinstveno rješenje jednačine (1.1.2) koje zadovoljava polazni uslov $y(x_0) = y_0$ $(x_0 \in (a, b) \ , \ y_0 \in (c, d))$ i definisano je u nekoj okolini tačke x_0.

Primjer 1.1. Riješiti jednačinu: $xy' = \dfrac{y}{y+1}$.
Kao prvo, jednačinu dovodimo u oblik

$$y' = \frac{y}{x(y+1)} \ ,$$

iz koga uočavamo da je data jednačina sa razdvojenim promenljivima, gdje su $f(x) = \dfrac{1}{x}$ i $g(y) = \dfrac{y}{y+1}$. Razdvajamo promjenljive koristeći jednakost $y' = \frac{dy}{dx}$,

$$\frac{(y+1)dy}{y} = \frac{dx}{x} \ .$$

Sada integralimo posljednju jednačinu i rješavanjem integrala na lijevoj i desnoj strani dobijamo rješenje diferencijalne jednačine,

$$y + \ln|y| = \ln|x| + C \ .$$

$\diamondsuit$

Primjer 1.2. Odrediti ono rješenje diferencijalne jednačine $y' = 6y^2x$ koje zadovoljava uslov $y(1) = \frac{1}{25}$.

Data diferencijalna jednačina je jednačina sa razdvojenim promjenljivima. Zato prvo razdvojimo promjenljive

$$y' = \frac{dy}{dx} = 6y^2x \iff \frac{dy}{y^2} = 6xdx \; .$$

Nakon integriranja posljednje jednakosti

$$\int y^{-2}dy = 6\int xdx \; ,$$

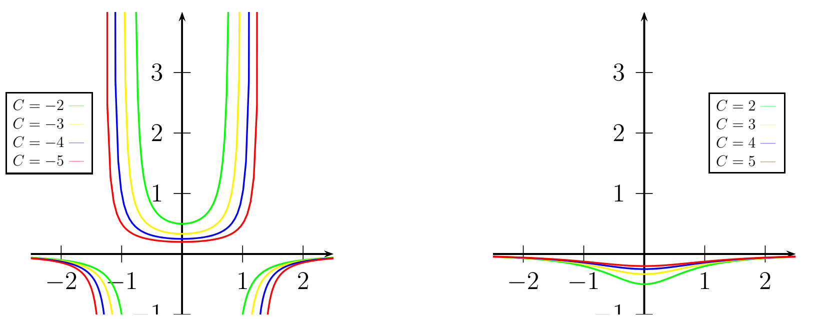
dobijamo $-\dfrac{1}{y} = 3x^2 + C$,
odnosno, rješenje diferencijalne jednačine je

$$y(x) = -\frac{1}{3x^2 + C} \; ,$$

gdje je C proizvoljna realna konstanta. Za razne C imamo različite funkcije rješenja, što je prikazano na Slici 1.1. Naći ono rješenje koje zadovoljava uslov $y(1) = \frac{1}{25}$, znači od svih funkcija izabrati onu za koju je C određen ovim uslovom, tj.

$$\frac{1}{25} = -\frac{1}{3 + C} \; ,$$

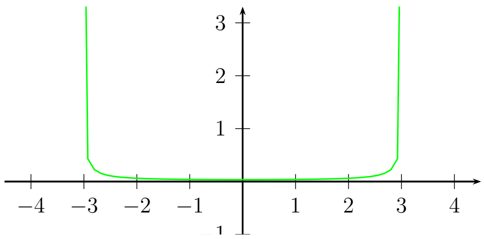
odakle nakon kraćeg računa dobijamo $C = -28$, čiji je graf dat na Slici 1.2.



(a) Grafici rješenja za $C < 0$ (b) Grafici rješenja za $C > 0$

Slika 1.1: Grafici funkcije $y(x) = -\frac{1}{3x^2+C}$.

$\diamondsuit$



Slika 1.2: Graf funkcije $y(x) = -\frac{1}{3x^2-28}$

1.1.2 Homogena jednačina

To je jednačina oblika

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \ , \tag{1.1.3}$$

gdje je f neprekidna funkcija u nekom intervalu (a, b). Datu jednačinu rješavamo smjenom

$$u(x) = \frac{y(x)}{x} \ ,$$

odakle se nalaženjem izvoda po x ima

$$y'(x) = u'(x)x + u(x) \ .$$

Ubacujući posljednje dvije jednakosti u jednačinu (1.1.3), dobijamo jednačinu

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

koja predstavlja jednačinu sa razdvojnim promjenljivima.

Primjer 1.3. Riješiti diferencijalnu jednačinu: $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

Prvo uočimo da desnu stranu date jednačine možemo transformisati, tj.

$$y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}} \ ,$$

odakle je očigledno da je data jednačina homogena. Sada uvodimo smjenu

$$u = \frac{y}{x} \quad , \quad y' = u'x + u \ .$$

Polazna jednačina sada dobija oblik

$$u'x + u = \frac{1+u}{1-u} \ ,$$

odnosno

$$u' = \frac{2u}{x(1-u)} \ .$$

Posljednja jednačina je jednačina sa razdvojenim promjenljivima, čijim rješavanjem prema ranije izloženom postupku dobijamo

$$\frac{1}{2}(\ln|u| - u) = \ln|x| + C \ ,$$

odnosno, vraćajući smjenu

$$\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{y}{x}\right| - \frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C \ .$$

♢

Primjer 1.4. Odrediti ono rješenje diferencijalne jednačine

$$y' = \frac{2x}{y} + \frac{y}{x} \ ,$$

koje zadovoljava uslov $y(1) = 2$.

Nakon smjene $u = \frac{y}{x}$, odakle je $y' = u'x + u$, dobijamo diferencijalnu jednačinu po u

$$u'x = \frac{2}{u} \ ,$$

a to je jednačina sa razdvojenim promjenljivima

$$udu = \frac{2dx}{x} \ .$$

Integraleći ovu jednačinu dobijamo

$$\frac{u^2}{2} = 2(\ln|x| + C) \ ,$$

odnosno, rješenje po u je

$$u(x) = \pm 2\sqrt{\ln|x| + C} \ .$$

Vraćajući se na polaznu funkciju y, imamo

$$y(x) = \pm 2x\sqrt{\ln|x| + C} \ .$$

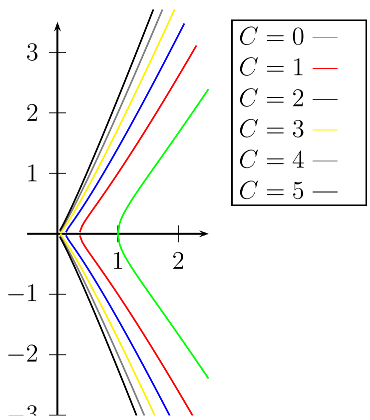
Koristeći uslov $y(1) = 2$, jasno je da od gornja dva rješenja koristimo ono sa znakom $+$, a onda dobijamo jednačinu po C

$$2\sqrt{C} = 2 \ ,$$

odakle je $C = 1$. Dakle rješenje zadatka je funkcija

$$y(x) = \pm 2x\sqrt{\ln|x| + 1} \ .$$

♢



Slika 1.3: Grafik funkcije $y(x) = \pm 2x\sqrt{\ln|x| + C}$

Ideju rješavanja iz prvog primjera primjenjujemo generalno na rješavanje diferencijalnih jednačina oblika

$$y' = \frac{ax + by}{cx + dy} \ . \tag{1.1.4}$$

Međutim, ako imamo jednačinu oblika

$$y' = \frac{ax + by + c}{dx + ey + f} \ , \tag{1.1.5}$$

jasno je da gornja ideja nije primjenljiva. Ali i ovakve jednačine rješavamo na sličan način, prvo ih transformišući sljedećim smjenama.

$$x = u + \alpha \quad , \quad y = v + \beta \ ,$$

gdje su α i β proizvoljni realni brojevi. Uvrštavajući ove smjene u jednačinu (1.1.5), pri čemu je $dy = dv$ i $dx = du$, dobijamo

$$\frac{dv}{du} = v' = \frac{au + bv + a\alpha + b\beta + c}{du + ev + d\alpha + e\beta + f} \ . \tag{1.1.6}$$

Povoljnim izborom za α i β, birajući ih tako da bude zadovoljen sistem

$$\begin{aligned} a\alpha + b\beta + c &= 0 \\ d\alpha + e\beta + f &= 0 \ , \end{aligned}$$

jednačina (1.1.5) prelazi u poznati nam oblik jednačine (1.1.4). Naravno, sistem iz koga određujemo vrijednosti za α i β će imati rješenje ako je njegova determinanta različita od nule, tj. ako vrijedi uslov $ae - bd \neq 0$.

Primjer 1.5. Rješiti diferencijalnu jednačinu

$$y' = \frac{x+y+2}{x-y-3} .$$

Uvodimo smjene

$$x = u + \alpha \quad , \quad y = v + \beta ,$$

te se polazna jednačina transformiše u jednačinu

$$v' = \frac{u+v+\alpha+\beta+2}{u-v+\alpha-\beta-3} .$$

Sada rješavamo sistem

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 2 = 0 \\ \alpha - \beta - 3 = 0 \end{aligned}$$

čija su rješenja $\alpha = \frac{1}{2}$ i $\beta = -\frac{5}{2}$. Dakle, stvarne smjene su

$$x = u + \frac{1}{2} \quad , \quad y = v - \frac{5}{2} ,$$

koje polaznu jednačinu prevode u diferencijalnu jednačinu

$$v' = \frac{u+v}{u-v} .$$

Analogno prethodnom primjeru, rješenje ove jednačine je

$$\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{v}{u}\right| - \frac{v}{u}\right) = \ln|u| + C .$$

Vraćajući se na polazne promjenljive dobijamo rješenje polazne jednačine,

$$\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{y+\frac{5}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right| - \frac{y+\frac{5}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right) = \ln\left|x - \frac{1}{2}\right| + C ,$$

što je ekvivalentno sa

$$\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{2y+5}{2x-1}\right| - \frac{2y+5}{2x-1}\right) = \ln|x - \frac{1}{2}| + C .$$

$\diamondsuit$

1.1.3 Linearna jednačina

Diferencijalnu jednačina oblika

$$y' + f(x)y = g(x) \ , \tag{1.1.7}$$

gdje su f i g proizvoljne neprekidne funkcije, nazivamo *linearna diferencijalna jednačina*.

Posmatrajmo sljedeću tehniku nalaženja rješenja jednačine (1.1.7), neočekivana ali jako korisna. Pomnožimo nekom funkcijom $\mu(x)$ jednačinu (1.1.7) dakle,

$$\mu(x)y' + \mu(x)f(x)y = \mu(x)g(x) \ . \tag{1.1.8}$$

Neočekivanu ulogu ove funkcije $\mu(x)$, kakva god ona bila, pojačajmo i zahtjevom

$$\mu(x)f(x) = \mu'(x) \ . \tag{1.1.9}$$

Stavljajući (1.1.9) u (1.1.8), dobijamo

$$\mu(x)y' + \mu'(x)y = \mu(x)g(x) \ , \tag{1.1.10}$$

i primjećujemo da je tada izraz na lijevoj strani izvod proizvoda, tj.

$$\mu(x)y' + \mu'(x)y = (\mu(x)y)' \ , \tag{1.1.11}$$

te stavljajući (1.1.11) u (1.1.10), dobijamo

$$(\mu(x)y)' = \mu(x)g(x) \ . \tag{1.1.12}$$

Integrirajmo sada jednačinu (1.1.12), imamo

$$\int (\mu(x)y)'dx = \int \mu(x)g(x)dx \ ,$$

odnosno, primjenjujući poznato pravilo za neodređeni integral, slijedi

$$\mu(x)y + C = \int \mu(x)g(x)dx \ . \tag{1.1.13}$$

Kako nam je cilj naći funkciju $y(x)$, onda iz (1.1.13) lagano računamo

$$y(x) = \frac{\int \mu(x)g(x)dx + C}{\mu(x)} \ , \tag{1.1.14}$$

pri čemu smo iskoristili činjenicu da je konstanta integracije C nepoznata, pa smo njen zapis na desnoj strani, jednostavnosti radi, zapisali sa $+C$, a ne kako bi račun dao sa $-C$. Posljednom jednačinom mi smo dobili rješenje jednačine (1.1.7). Ostaje "samo" da se odgonetne, a šta je ona neočekivana funkcija $\mu(x)$.

Iz jednačine (1.1.9) imamo

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = f(x) \iff (\ln \mu(x))' = f(x) \ .$$

Opet, integrirajući posljednju jednakost, dobijamo

$$\ln \mu(x) + D = \int f(x)dx \ ,$$

pa po istom principu kao malo prije, možemo pisati

$$\ln \mu(x) = \int f(x)dx + D \ .$$

Eksponencirajući obje strane posljednje jednakosti, i koristeći pravila stepenovanja, imamo

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx + D} = e^D e^{\int f(x)dx} \ .$$

Kako je i e^D konstanta, ne gubeći na opštosti, konačno imamo

$$\mu(x) = De^{\int f(x)dx} \ , \tag{1.1.15}$$

i uobičejeno se ovakve funkcije sa ovakvom ulogom nazivaju *integracioni faktor*. Stavljajući (1.1.15) u (1.1.14), slijedi

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{\int De^{\int f(x)dx} g(x)dx + C}{De^{\int f(x)dx}} \\ &= e^{-\int f(x)dx} \left(\int e^{\int f(x)dx} g(x)dx + \frac{C}{D} \right) \ , \end{aligned}$$

pa konačno uzimajući da je $\frac{C}{D}$ nova konstanta C, dobijamo krajnji oblik rješenja jednačine (1.1.7)

$$y(x) = e^{-\int f(x)dx} \left(\int e^{\int f(x)dx} g(x)dx + C \right) \ . \tag{1.1.16}$$

Pod pretpostavkom o neprekidnosti funkcija $f(x)$ i $g(x)$ na intervalu (a, b), imamo postojanje i jedinstvenost rješenje jednačine (1.1.7) koje zadovoljava polazni uslov $y(x_0) = y_0$ ($x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$) i definisano je u (a, b). To rješenje je dato sa (1.1.16).

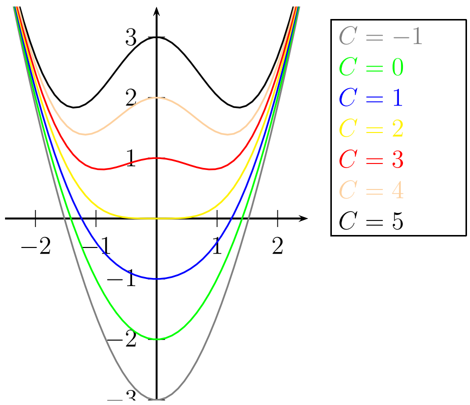
Primjer 1.6. Riješiti diferencijalnu jednačinu: $y' + xy - x^3 = 0$ i odrediti ono rješenje koje zadovoljava uslov $y(0) = 1$.

Dovedimo jednačinu na zahtijevani oblik

$$y' + xy = x^3 .$$

To je linearna jednačina kod koje je $f(x) = x$ i $g(x) = x^3$. Sada je rješenje dato sa

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int xdx}\left(C + \int x^3 e^{\int xdx} dx\right) \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}}\left(C + \int x^3 e^{\frac{x^2}{2}} dx\right) \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}}\left(C + (x^2-2)e^{\frac{x^2}{2}}\right) \end{aligned}$$



Slika 1.4: Grafik funkcije $y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(C + (x^2-2)e^{\frac{x^2}{2}}\right)$

Postavljeni uslov daje nam jednačinu po C

$$1 = 1 \cdot (C + (0-2) \cdot 1) ,$$

iz koje dobijamo $C = 3$, a to je graf obojen crvenom bojom na Slici 1.4.

$\diamondsuit$

1.1.4 Bernoullijeva jednačina

To je jednačina oblika

$$y' + f(x)y = g(x)y^\alpha , \tag{1.1.17}$$

gdje je α proizvoljan realan broj različit od 0 i od 1 (u oba ova slučaja jednačina (1.1.17) bi se svela na linearnu jednačinu).

Jednačinu (1.1.17) riješavamo smjenom

$$z(x) = (y(x))^{1-\alpha} ,$$

odakle se dobija

$$z'(x) = (1-\alpha)(y(x))^{-\alpha} y'(x) .$$

Iz posljednje dvije jednakosti lahko se dobija

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad , \quad y' = \frac{1}{1-\alpha} z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} z'$$

čijim uvrštavanjem u (1.1.17) i elementarnim računom imamo

$$z' + (1-\alpha) f(x) z = (1-\alpha) g(x) ,$$

tj. linearna jednačina po z.

Primjer 1.7. Riješiti diferencijalnu jednačinu: $y' - y = xy^2$.

Data jednačina je Bernoullijeva jednačina sa $\alpha = 2$, pa uvodimo smjenu

$$z = y^{1-2} = y^{-1} .$$

Sada računamo potrebne zamjene

$$y = z^{-1} \quad , \quad y' = -z^{-2} z'$$

čijim uvrštavanjem u polaznu jednačinu dobijamo

$$-z^{-2} z' - z^{-1} = x z^{-2} .$$

Množenjem posljednje jednakosti sa $-z^2$ imamo

$$z' + z = -x ,$$

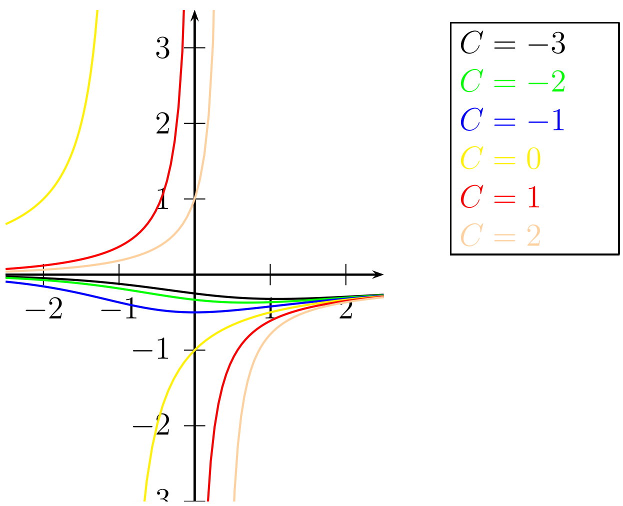
a to je linearna jednačina čije je rješenje

$$z = e^{-x}(C - (x+1)e^x) ,$$

odakle vraćajući se na polaznu funkciju y imamo

$$y(x) = \frac{1}{e^{-x}(C - (x+1)e^x)} .$$

♢



Slika 1.5: Graf funkcije $y(x) = \frac{1}{e^{-x}(C-(x+1)e^{x})}$

1.1.5 Jednačina totalnog diferencijala

Opšta jednačina prvog reda u normalnom obliku

$$y' = f(x, y)$$

koristeći jednakost $y' = \frac{dy}{dx}$, može se pisati u obliku

$$dy - f(x, y)dx = 0 \ ,$$

što predstavlja specijalan slučaj jednačine

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \ . \tag{1.1.18}$$

Ako postoji funkcija $F(x, y)$ takva da je lijeva strana u (1.1.18) totalni diferencijal te funkcije u nekoj oblasti, tj. da važi

$$dF(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \ ,$$

pri čemu je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y) \text{ i } \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y) \ ,$$

onda jednačinu (1.1.18) nazivamo *jednačina totalnog diferencijala.*

Ako postoji funkcija $F(x, y)$ sa navedeim osobinama, onda zbog (1.1.18), tj. $dF(x, y) = 0$, vrijedi

$$F(x, y) = c \quad , \quad c \text{ konstanta} \ . \tag{1.1.19}$$

Jednakošću (1.1.19) je implicitno definisana funkcija $y = g(x)$ na nekom intervalu, i na tom intervalu je ta funkcija rješenje jednačine (1.1.18). Napomenimo, da bi funkcija (1.1.19) definisala diferencijabilnu funkciju $y = g(x)$, funkcija F, tj. funkcije P i Q moraju zadovoljavati uslove teorema o implicitnoj funkciji.

Ostaje nam još odgovoriti na dva pitanja. Prvo, kako ustanoviti da lijeva strana u (1.1.18) jeste totalni diferencijal neke funkcije, i drugo, ako znamo da lijeva strana jeste totalni diferencijal neke funkcije, kako odrediti tu funkciju. Odgovor na oba pitanja daje sljedeći teorem.

Teorem 1.1.2

Neka su $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ i $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ neprekidne funkcije u jednostruko povezanoj oblasti D. Da bi jednačina (1.1.18) bila jednačina totalnog diferencijala neophodno je i dovoljno da za svako $(x,y) \in D$ vrijedi

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \ . \tag{1.1.20}$$

Pri tome, funkcija $F(x,y)$ čiji je to totalni diferencijal, data je sa

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt \ ,$$

gdje je (x_0, y_0) proizvoljna tačka oblasti D.

Dokaz : $(\Longrightarrow)$ Neka izraz $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ predstavlja totalni diferencijal neke funkcije. To znači da postoji funkcija $F(x,y)$, takva da je $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P$ i $\dfrac{\partial F}{\partial y} = Q$. Nalaženjem drugih parcijalnih izvoda onda imamo

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} \ , \ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} \ .$$

Iz jednakosti mješovitih parcijalnih izvoda dobijamo uslov (1.1.20).

$(\Longleftarrow)$ Neka je sada zadovoljen uslov (1.1.20). Nađimo funkciju $F(x,y)$ takvu da je $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P$ i $\dfrac{\partial F}{\partial y} = Q$. Iz uslova $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P$, integracijom po x imamo

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \varphi(y) \ . \tag{1.1.21}$$

Nalaženjem parcijalnog izvoda po y gornje funkcije, koristeći uslov (1.1.20) i osnovne osobine integrala, dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y} &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y} dx + \varphi'(y) \\ &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \varphi'(y) \\ &= Q(x,y) - Q(x_0,y) + \varphi'(y) \ ,\end{aligned}$$

gdje je $\varphi(y)$ nepoznata funkcija. Iz uslova $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$ sada imamo

$$Q(x,y) - Q(x_0,y) + \varphi'(y) = Q(x,y) \ ,$$

što nam opet daje uslov za izračunavanje funkcije φ,

$$\varphi'(y) = Q(x_0,y) \ ,$$

iz kojeg je onda

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C \ .$$

Ubacujući ovo u jednačinu (1.1.21), konačno dobijamo izraz za traženu funkciju

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C \ .$$

♣

Gornji dokaz nam daje i tehniku rješavanja jednačine totalnog diferencijala.

Primjer 1.8. Riješiti jednačinu $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^2)dy = 0$.
U datoj jednačini je $P(x,y) = 3x^2 + 6xy^2$ i $Q(x,y) = 6x^2y + 4y^2$. Nalaženjem parcijalnih izvoda imamo

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy = \frac{\partial Q}{\partial x} \ ,$$

pa polazana jednačina predstavlja jednačinu totalnog diferencijala. Sada na osnovu tehnike izložene u dokazu gornje teoreme imamo,

$$F(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y) = \int (3x^2 + 6xy^2)dx + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y) \ . \tag{1.1.22}$$

Kako mora biti $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$, imamo

$$6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^2 \ ,$$

iz čega dobijamo uslov $\varphi'(y) = 4y^2$. Nakon integracije ovog izraza je

$$\varphi(y) = \frac{4y^3}{3} + C \ ,$$

što zajedno sa (1.1.22) daje

$$F(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + \frac{4}{3}y^3 + C \ .$$

Kako je totalni diferencijal ove funkcije jednak 0, po uslovu zadatka, zaključujemo da je rješenje polazne diferencijalne jednačine

$$x^3 + 3x^2y^2 + \frac{4}{3}y^3 = C \ .$$

$\diamondsuit$

Postavlja se pitanje šta učiniti ako uslov (1.1.20) nije ispunjen pa jednačina (1.1.18) nije jednačina totalnog diferencijala? Jedan od načina da se prevaziđe taj problem jeste pronaći eventualno funkciju $h(x,y)$, različitu od nule, takvu da jednačina

$$h(x,y)P(x,y)dx + h(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

bude jednačina totalnog diferencijala. Funkcija $h(x,y)$, ukoliko postoji, naziva se *integracioni množitelj*. Potreban i dovoljan uslov za njeno postojanje imamo na osnovu iskazanog teorema, tj. mora vrijediti

$$\frac{\partial(hP)}{\partial y} = \frac{\partial(hQ)}{\partial x} \ ,$$

odnosno, nakon izračunavanja ovih parcijalnih izvoda

$$\frac{1}{h}\left(P\frac{\partial h}{\partial y} - Q\frac{\partial h}{\partial x}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \ . \tag{1.1.23}$$

Nalaženje integracionog množitelja predstavlja težak problem, čak složeniji i od samog polaznog problema i u opštem slučaju je nerješiv, jer bi u protivnom svaku jednačinu prvog reda $y' = f(x,y)$ mogli riješiti elementarno.

Ovdje ćemo dati dva specijalna slučaja kada se integracioni množitelj ipak može eksplicitno izračunati. Ti slučajevi su okarakterisani specijalnim oblikom funkcije h koju tražimo i oni su

1. h je funkcija ovisna samo o promjenljivoj x

2. h je funkcija ovisna samo o promjenljivoj y.

U prvom slučaju, uslov (1.1.23) se svodi na jednačinu

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} \ .$$

Ova jednačina ima smisla samo ako je desna strana funkcija samo promjenljive x. Ukoliko je to slučaj, tj.

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = u(x) \ ,$$

tada je

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = u(x) \quad \text{pa je} \quad h(x) = Ce^{\int u(x)dx} \ .$$

Dakle zbog pojavljivanja konstante C, integracionih množitelja ima beskonačno mnogo, ali u konkretnim situacijama se uzima najprostiji, tj $C = 1$.

Identična je situacija za slučaj 2.. Tada, ako je

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = v(y) \ ,$$

onda integracioni množitelj ovisi samo o y i dat je sa

$$h(y) = Ce^{\int v(y)dy} \ .$$

Primjer 1.9. Riješiti jednačinu: $dy - (ytgx + \cos x)dx = 0$.

Provjerom uslova $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ lahko utvrđujemo da polazna jednačina nije jednačina totalnog diferencijala. Ostaje pokušati naći integracioni množitelj. Kako je

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = -tgx \ ,$$

zaključujemo da integracioni množitelj postoji i da je on funkcija promjenljive x. Prema navedenoj formuli za ovaj slučaj, imamo

$$h(x) = Ce^{-\int tgxdx} = \cos x \ .$$

Sada je jednačina

$$\cos xdy - \cos x(ytgx + \cos x)dx = 0$$

jednačina totalnog diferencijala, i njeno je rješenje je dato sa

$$F(x,y) = -\int_{x_0}^{x} (ytgt + \cos t)\cos tdt + \int_{y_0}^{y} \cos xdt \ ,$$

tj.

$$F(x,y) = \frac{y\cos x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}(\sin 2x - \sin 2x_0) + 2y_0 \cos x_0}{2\cos x}$$

♢

1.2 Linearne jednačine višeg reda sa konstantnim koeficijentima

Opšti oblik linearne jednačine n-tog reda je

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x) \ ,$$

gdje za funkcije $f(x)$ i $a_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ pretpostavljamo da su neprekidne funkcije na nekom segmentu I.

Mi ćemo se ovdje baviti isključivo linearnim jednačinama višeg reda kod kojih su funkcije $a_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ konstantne funkcije (realne konstante), tj. razmatraćemo linearne jednačine n-tog reda sa konstantnim koeficijentima

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny = f(x) \ .$$

1.2.1 Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

Kao prvo riješit ćemo homogenu jednačinu, tj. jednačinu

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny = 0 \ . \tag{1.2.1}$$

Tražeći rješenje u obliku

$$y(x) = e^{rx} \ ,$$

gdje je $r \in \mathbb{R}$, polazna jednačina postaje

$$(a_0r^n + a_1r^{n-1} + ... + a_n)e^{rx} = 0 \ .$$

Kako je $e^{rx} \neq 0$, iz posljednje jednačine dobijamo jednačinu

$$a_0r^n + a_1r^{n-1} + ... + a_n = 0 \tag{1.2.2}$$

koju nazivamo *karakteristična jednačina* polazne homogene jednačine. Karakteristična jednačina je polinom stepena n, pa ona ima n rješenja r_i $(i = 1, 2, ..., n)$.

Teorem 1.2.1

Neka su $r_1, r_2, ..., r_s$ različita rješenja karakteristične jednačine (1.2.2), višestrukosti $m_1, m_2, ..., m_s$, pri čemu je $m_1 + m_2 + ... + m_s = n$. Tada su funkcije

$$e^{r_i x}, xe^{r_i x}, x^2 e^{r_i x}, ..., x^{m_i - 1} e^{r_i x} \ , \ i = 1, 2, ..., s \tag{1.2.3}$$

rješenja jednačine (1.2.1) i pri tome su ta rješenja linearno nezavisna.

Primjetimo da pojedina rješenja mogu biti i kompleksni brojevi. Kako nas zanimaju samo realna to će nam trebati sljedeća tvrdnja koja se lahko dokazuje.

Teorem 1.2.2

Ako je $y(x) = u(x) + iv(x)$ rješenje jednačine (1.2.1) tada su njen realni i njen imaginarni dio takođe rješenja te jednačine.

Pod ovim imamo u vidu sljedeće: Ako je $r_k = \alpha + i\beta$, tada je

$$y(x) = e^{r_k x} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) \ ,$$

pa ako je $y(x)$ rješenje polazne homogene jednačine, tada su to i $e^{\alpha x} \cos \beta x$ i $e^{\alpha x} \sin \beta x$. Treba jos naglasiti da ako je jedno od rješenja komleksan broj $\alpha + i\beta$, tada postoji i rješenje karakteristične jednačine koje je oblika $\alpha - i\beta$. Pri tome, na osnovu gore rečenog, tom rješenju odgovara rješenje polazne jednačine koje se do na znak razlikuje od rješenja koje dobijemo pomoću rješenja $\alpha + i\beta$ karakteristične jednačine. Ovo znači da ćemo paru konjugovano-kompleksnih rješenja $\alpha \pm i\beta$ karakteristične jednačine, dodjeljivati jedan par rješenja polazne jednačine, $e^{\alpha x} \cos \beta x$ i $e^{\alpha x} \sin \beta x$.

Sa gornje dvije teoreme smo načelno opisali sva rješenja jednačine (1.2.1). Sljedećom teoremom dajemo i konačni oblik rješenja ove jednačine.

Teorem 1.2.3

Neka su $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ linearno nezavisna rješenja (rješenja dobijena na osnovu Teoreme 1.2.2 i Teoreme 1.2.1) jednačine (1.2.1). Tada je funkcija

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) \ ,$$

opšte rješenje jednačine (1.2.1).

Primjer 1.10. Rješiti diferencijalnu jednačinu: $y''' - 3y' + 2y = 0$.

Rješenja tražimo u obliku $y = e^{rx}$ pa je karakteristična jednačina data sa

$$r^3 - 3r + 2 = (r-1)^2(r+2) = 0 \ .$$

Različita rješenja ove jednačine su $r_1 = 1$, višestrukosti $m_1 = 2$ i $r_2 = -2$, višestrukosti $m_2 = 1$, dakle ukupno imamo $m_1 + m_2 = 3$ rješenja karakteristične jednačine.

Rješenju $r_1 = 1$ odgovaraju funkcije e^x i xe^x (zbog višestrukosti 2), a rješenju $r_2 = -2$ odgovara funkcija e^{-2x}. Sada je rješenje polazne homogene jednačine dato sa

$$y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-2x} \ .$$

♢

Primjer 1.11. Rješiti diferencijalnu jednačinu:

$$y^{(6)} - 2y^{(5)} + 4y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 2y' + 2y = 0 \ .$$

Odgovarajuća karakteristična jednačina je

$$r^6 - 2r^5 + 4r^4 - 4r^3 + 5r^2 - 2r + 2 = (r^2+1)^2(r^2 - 2r + 2) = 0 \ .$$

Rješenja karakteristične jednačine su $r_{1/2} = \pm i$, višestrukosti $m_{1/2} = 2$ i $r_{3/4} = 1 \pm i$, višestrukosti $m_{3/4} = 1$. Funkcije koje odgovaraju paru $r_{1/2}$ konjugovano-kompleksnih rješenja su

$$\cos x \ , \ \sin x \ , x\cos x \ , x\sin x \ ,$$

a funkcije koje odgovaraju drugom paru su

$$e^x\cos x \text{ i } e^x \sin x \ .$$

Rješenje polazne jednačine je dato sa

$$y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + x(C_3\cos x + C_4\sin x) + e^x(C_5\cos x + C_6\sin x) \ .$$

♢

Primjer 1.12. Riješiti diferencijalnu jednačinu

$$y''' - 5y'' - 22y' + 56y = 0 \ ,$$

a zatim odrediti ono rješenje koje zadovoljava uslov

$$y(0) = 1 \ , \ y'(0) = -2 \ , \ y''(0) = -4 \ .$$

Karakteristična jednačina zadate diferencijalne jednačine glasi

$$r^3 - 5r^2 - 22r + 56 = (r+4)(r-2)(r-7) = 0 \ ,$$

i njena rješenja su

$$r_1 = -4 \ , \ r_2 = 2 \ , \ r_3 = 7 \ .$$

Rješenja su realna i različita (višestrukosti 1), pa je rješenje jednačine

$$y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{7x} \ .$$

Nalazeći prvi i drugi izvod rješenja $y(x)$, postavljeni uslovi nam daju sljedeći sistem jednačina po nepoznatim konstantama C_1, C_2 i C_3,

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 + C_3 = 1 \\ y'(0) &= -4C_1 + 2C_2 + 7C_3 = -2 \\ y''(0) &= 16C_1 + 4C_2 + 49C_3 = -4 \ . \end{aligned}$$

Rješenje ovog sistema je

$$C_1 = \frac{14}{33} \ , \ C_2 = \frac{13}{15} \ , \ C_3 = -\frac{16}{55} \ ,$$

te je traženo rješenje

$$y(x) = \frac{14}{33} e^{-4x} + \frac{13}{15} e^{2x} - \frac{16}{55} e^{7x} \ .$$

♢

1.2.2 Nehomogena jednačina sa konstantnim koeficijentima. Metod jednakih koeficijenata

Sada ćemo razmatrati nehomogenu jednačinu n-tog reda sa konstantnim koeficijentima

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x) \ .$$

Rješavanje ove jednačine se odvija u dva korak.
Prvi korak: rješavamo odgovarajuću homogenu jednačinu na način izložen u prethodnoj sekciji. Pri tome dobijamo odgovarajuće rješenje $y_h(x)$.

Drugi korak: nalazimo bar jedno *partikularno rješenje* nehomogene jednačine, $y_p(x)$.
Rješenje polazne nehomogene jednačine je tada dato sa

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \ .$$

Za neke specijalne oblike funkcije $f(x)$, jedno *partikularno rješenje* polazne jednačine možemo odrediti jednostavnom metodom koju nazivamo *metod jednakih koeficijenata.*

1. Neka je $f(x) = e^{\alpha x}$.

   Ukoliko α nije rješenje karakteristične jednačine, partikularno rješenje tražimo u obliku

   $$y_p(x) = Ae^{\alpha x} \ ,$$

   gdje je $A \in \mathbb{R}$ konstanta koju treba odrediti.

   Primjer 1.13. Rješiti jednačinu: $y'' - y = e^{2x}$.

   Karakteristična jednačina je $r^2 - 1 = 0$ i njena su rješenja $r_1 = 1$ i $r_2 = -1$ pa je $y_h = C_1e^x + C_2e^{-x}$.

   U ovom slučaju je $\alpha = 2$ i vidimo nije rješenje karakteristične jednačine te partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p = Ae^{2x}$. Nalazeći odgovarajuće izvode ove funkcije i ubacujući u polazu jednačinu, dobijamo

   $$4Ae^{2x} - Ae^{2x} = e^{2x} \ ,$$

   odnosno

   $$3A = 1 \ .$$

   Dakle, $A = \frac{1}{3}$, a odgovarajuće partikularno rješenje je $y_p = \frac{1}{3}e^{2x}$.

   Konačno, rješenje polazne jednačine je

   $$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x} \ .$$

   $\diamondsuit$

   Ukoliko α jeste rješenje karakteristične jednačine i to višestrukosti m, onda partikularno rješenje tražimo u obliku

   $$y_p(x) = Ax^m e^{\alpha x} \ .$$

Primjer 1.14. Rješiti jednačinu: $y'' - y = e^x$.

Karakteristična jednačina je $r^2 - 1 = 0$ i rješenja su $r_1 = 1$, $r_2 = -1$. $y_h = C_1e^x + C_2e^{-x}$.

Sada je $\alpha = r_1 = 1$ (višestrukosti 1) pa partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p = Axe^x$. Kako je $y_p'' = 2Ae^x + Axe^x$, ubacujući ove podatke u polaznu jednačinu imamo

$$2Ae^x + Axe^x - Axe^x = e^x \ ,$$

odakle sređivanjem dobijamo $A = \frac{1}{2}$, odnosno $y_p = \frac{1}{2}xe^x$, pa je rješenje polazne jednačine

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x \ .$$

$\diamondsuit$

2. Neka je $f(x) = P_k(x)$ (polinom stepena k).

   Opet razlikujemo dva slučaja:
   Ako su sva rješenja karakteristične jednačine različita od nule, onda partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p(x) = Q_k(x)$, tj. u obliku polinoma k-tog stepena čije koeficijente treba odrediti.

Primjer 1.15. Riješiti jednačinu: $y'' - 3y' + 2y = x + 1$.

Karakteristična jednačina je $r^2 - 3r + 2 = 0$ i njena rješenja su $r_1 = 1$ ($m_1 = 1$) i $r_2 = 2$ ($m_2 = 1$), te je $y_h(x) = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Kako nula nije korijen karakteristične jednačine, a desna strana je polinom prvog stepena, partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p(x) = Ax + B$. Sada su $y_p' = A$ i $y_p'' = 0$, pa ubacujući to u polaznu jednačinu imamo,

$$-3A + 2Ax + 2B = x + 1 \text{ tj. } 2Ax + (-3A + 2B) = x + 1 \ ,$$

odakle izjednačavajući odgovarajuće koeficijente dobijamo sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2A &= 1 \\ -3A + 2B &= 1 \ . \end{aligned}$$

Rješavanjem ovog sistema dobijamo tražene koeficijente, $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{5}{4}$, pa je partikularno rješenje dato sa $y_p(x) = x + 4$, a rješenje polazne jednačine je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{x}{2} + \frac{5}{4} \ .$$

$\diamondsuit$

Ako je 0 rješenje karakteristične jednačine višestrukosti m, onda partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p(x) = x^m Q_k(x)$.

Primjer 1.16. Riješiti jednačinu: $y''' + 2y' = x - 1$.

Karakteristična jednačina je $r^3 + 2r = 0$ i njena rješenja su $r_1 = 0$ $(m_1 = 1)$, $r_{2/3} = \pm i\sqrt{2}$ $(m_{2/3} = 1)$. Rješenje homogene jednačine je $y_h(x) = C_1 + C_2 \cos\sqrt{2}x + C_3 \sin\sqrt{2}x$.

Kako je $0(= r_1)$ korijen karakteristične jednačine, partikularno rješenje ne tražimo u obliku polinoma prvog stepena, nego kao $y_p(x) = x(Ax + B)$. Sad su $y_p' = 2Ax + B$, $y_p'' = 2A$ i $y_p''' = 0$, pa stavljajući sve ovo u polaznu jednačinu imamo

$$4Ax + 2B = x - 1 \ .$$

Izjednačavajući odgovarajuće koeficijente dobijamo $A = \frac{1}{4}$ i $B = -\frac{1}{2}$, tj. $y_p(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$. Konačno rješenje je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 + C_2 \cos\sqrt{2}x + C_3 \sin\sqrt{2}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x \ .$$

$\diamondsuit$

3. Neka je $f(x) = P_k(x)e^{\alpha x}$.

Ukoliko α nije rješenje karakteristične jednačine, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = Q_k(x)e^{\alpha x} \ .$$

Ukoliko α jeste rješenje karakteristične jednačine i to višestrukosti m, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = x^m Q_k(x)e^{\alpha x} \ .$$

Primjer 1.17. Riješiti jednačinu: $y'' - 2y' + y = xe^{-x}$.

Karakteristična jednačina je $r^2 - 2r + 1 = 0$ i njeno rješenje je $r_1 = 1$ $(m_1 = 2)$. Rješenje homogene jednačine je $y_h(x) = e^x(C_1 + C_2x)$.

Kako $\alpha = -1$ nije korijen karakteristične jednačine, partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p(x) = (Ax + B)e^{-x}$. Sad su $y_p' = (-Ax + A - B)e^{-x}$ i $y_p'' = (Ax - 2A + B)e^{-x}$, pa stavljajući sve ovo u polaznu jednačinu imamo

$$(4Ax - 4A + 4B)e^{-x} = xe^{-x} \ .$$

Izjednačavajući odgovarajuće koeficijente dobijamo $4A = 1$ i $-4A + 4B = 0$, tj. $A = \frac{1}{4}, B = \frac{1}{4}$, tj. $y_p(x) = \frac{1}{4}e^{-x}(x+1)$. Konačno rješenje je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^x(C_1 + C_2x) + \frac{1}{4}e^{-x}(x+1) \ .$$

$\diamondsuit$

Primjer 1.18. Riješiti jednačinu: $y'' - 2y' + y = xe^x$.

Karakteristična jednačina je $r^2 - 2r + 1 = 0$ i njeno rješenje je $r_1 = 1$ ($m_1 = 2$). Rješenje homogene jednačine je $y_h(x) = e^x(C_1 + C_2x)$.

Kako $\alpha = 1$ korijen karakteristične jednačine i to višestrukosti dva, partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p(x) = x^2(Ax + B)e^{-x}$. Sad su $y_p' = [B(2+x) + Ax(3+x)]xe^{-x}$ i $y_p'' = ((2+4x+x^2)B + Ax(6+6x+x^2))e^{-x}$, pa stavljajući sve ovo u polaznu jednačinu imamo

$$(6Ax + 2B)e^x = xe^x \ .$$

Izjednačavajući odgovarajuće koeficijente dobijamo $6A = 1$ i $2B = 0$, tj. $A = \frac{1}{6}, B = 0$, tj. $y_p(x) = \frac{1}{6}x^3e^x$. Konačno rješenje je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^x(C_1 + C_2x) + \frac{1}{6}x^3e^x \ .$$

$\diamondsuit$

4. Neka je $f(x) = e^{\alpha x}(a\sin\beta x + b\cos\beta x)$.

   Ukoliko ne postoji rješenje karakteristične jednačine oblika $r = \alpha \pm i\beta$, partikularno rješenje tražimo u obliku

   $$y_p(x) = e^{\alpha x}(A\sin\beta x + B\cos\beta x) \ ,$$

   gdje su $A, B \in \mathbb{R}$ koeficijenti koje treba odrediti.

   Ako postoji rješenje karakteristične jednačine oblika $r = \alpha \pm i\beta$, višestrukosti m, partikularno rješenje tražimo u obliku

   $$y_p(x) = x^m e^{\alpha x}(A\sin\beta x + B\cos\beta x) \ .$$

   Primjer 1.19. Riješiti jednačinu: $y'' - y = e^x(\sin x + 2\cos x)$.

   Karakteristična jednačina je $r^2 - 1 = 0$ i njena rješenje su $r_1 = 1$ ($m_1 = 1$) i $r_2 = -1$ ($m_2 = 1$) Rješenje homogene jednačine je $y_h(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}$.

Kako $1+i$ nije korijen karakteristične jednačine, partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p(x) = e^x(A\sin x + B\cos x)$. Sad su $y_p' = e^x[(A-B)\sin x + (A+B)\cos x]$ i $y_p'' = e^x(-2B\sin x + +2A\sin x)$, pa stavljajući sve ovo u polaznu jednačinu imamo

$$e^x((-A-2B)\sin x + (2A-B)\cos x) = e^x(\sin x + 2\cos x)\ .$$

Izjednačavajući odgovarajuće koeficijente dobijamo $(-A-2B) = 1$ i $(2A-B) = 2$, tj. $A = \frac{3}{5}, B = -\frac{4}{5}$, tj. $y_p(x) = e^x(\frac{3}{5}\sin x - \frac{4}{5}\cos x)$. Konačno rješenje je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}) + e^x\left(\frac{3}{5}\sin x - \frac{4}{5}\cos x\right)\ .$$

$\diamondsuit$

Primjer 1.20. Riješiti jednačinu: $y'' - 2y' + 2y = e^x(\sin x + 2\cos x)$.

Karakteristična jednačina je $r^2 - 2r + 2 = 0$ i njena rješenje su $r_{1/2} = 1 \pm i$ $(m_1 = 1)$. Rješenje homogene jednačine je $y_h(x) = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$.

Kako je $1+i$ korijen karakteristične jednačine višestrukosti jedan, partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p(x) = xe^x(A\sin x + B\cos x)$. Sad su $y_p' = e^x[(Ax - Bx + A)\sin x + (Ax + Bx + B)\cos x]$ i $y_p'' = e^x[(2Ax + 2A + 2B)\sin x + (-2Bx + 2A - 2B)\cos x]$, pa stavljajući sve ovo u polaznu jednačinu imamo

$$e^x(-2B\sin x + 2A\cos x) = e^x(\sin x + 2\cos x)\ .$$

Izjednačavajući odgovarajuće koeficijente dobijamo $-2B = 1$ i $2A = 2$, tj. $A = 1, B = -\frac{1}{2}$, tj. $y_p(x) = xe^x(\sin x - \frac{1}{2}\cos x)$. Konačno rješenje je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) + xe^x\left(\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right)\ .$$

$\diamondsuit$

5. Neka je $f(x) = P_k(x)e^{\alpha x}(a\sin\beta x + b\cos\beta x)$.

   Ukoliko ne postoji rješenje karakteristične jednačine oblika $r = \alpha \pm i\beta$, partikularno rješenje tražimo u obliku

   $$y_p(x) = e^{\alpha x}(Q_k^1(x)\sin\beta x + Q_k^2(x)\cos\beta x)\ ,$$

   gdje su Q_k^1 i Q_k^2 polinomi istog stepena kao polinom P_k, čije koeficijente treba odrediti.

Ako postoji rješenje karakteristične jednačine oblika $r = \alpha \pm i\beta$, višestrukosti m, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = x^m e^{\alpha x}(Q_k^1(x)\sin\beta x + Q_k^2(x)\cos\beta x) \ .$$

Ukoliko je funkcija na desnoj strani jednačine zbir više funkcija koje su nekog oblika od gore spomenutih, tj.

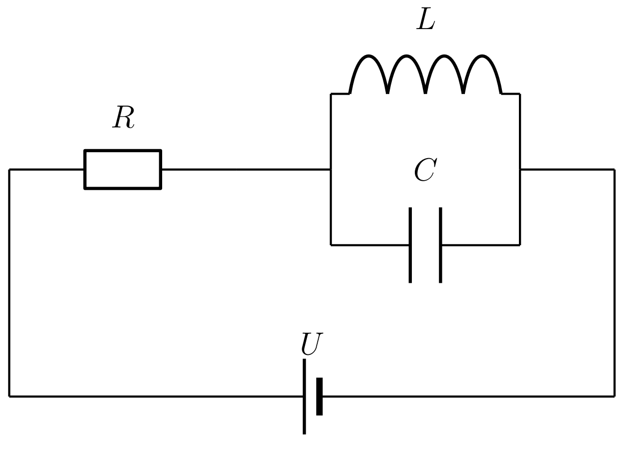
$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_l(x) \ , \tag{1.2.4}$$

tada se služimo sljedećim rasuđivanjem:
neka je $y_{p1}(x)$ partikularno rješenje kada bi desna strana bila samo funkcija f_1, $y_{p2}(x)$ partikularno rješenje ako je desna strana samo funkcija f_2 i tako za svaku funkciju koja je sabirak na desnoj strani, tada partikularno rješenje nehomogene jednačine čija desna strana ima oblik (1.2.4), tražimo u obliku

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + ... + y_{pl}(x) \ .$$

1.3 Jedna primjena

Neka je zadato RLC kolo kao na slici i neka su poznate veličine $R(t), L(t), C(t)$ i $U(t)$, sve u opštem slučaju zavisne o vremenskoj promjenljivoj t. Neka treba izračunati napon u_R na otporniku $R(t)$.



Slika 1.6: RLC kolo

Kako su u opštem slučaju sve veličine (struje (i), naponi (u) i dr.) vremenski ovisne, jednostavnosti radi izostavljaćemo zapise varijable (npr. $i = i(t)$). Jednačine kola su

$$i_R = i_L + i_C \tag{1.3.1}$$

$$u_R = i_r R \tag{1.3.2}$$

$$i_C = C u_C' \tag{1.3.3}$$

$$u_L = L i_L' \tag{1.3.4}$$

$$u_L = u_C \tag{1.3.5}$$

$$u_L + u_R = U \tag{1.3.6}$$

Iz jednačine (1.3.1), nalaženjem izvoda, imamo

$$i_r' = i_L' + i_c' \ .$$

Koristeći jednačinu (1.3.4), izvod jednačine (1.3.2) i izvod jednačine (1.3.3), gornja jednakost postaje

$$\left(\frac{u_R}{R}\right)' = \frac{u_L}{L} + (Cu_C)' \ .$$

Napone u_L i u_C možemo izraziti preko jednačina (1.3.5) i (1.3.6), pa posljednja jednakost postaje

$$\left(\frac{u_R}{R}\right)' = \frac{U - u_R}{L} + (C(U - u_R)')' \ .$$

Nalaženjem odgovarajućih izvoda, dobijamo

$$\frac{u_r' R - u_R R'}{R^2} = \frac{U - u_R}{L} + C'(U - u_R) + C(U'' - u_R'') \ .$$

Sređivanjem posljednje jednačine po izvodima funkcije u_R, konačno dobijamo jednačinu

$$Cu_R'' + \left(\frac{1}{R} + C'\right) u_R' + \left(\frac{1}{L} - \frac{R'}{R^2}\right) u_R = \frac{U}{L} + C'U' + CU'' \ ,$$

koja predstavlja nehomogenu linearnu jednačinu drugog reda.

Ako pretpostavimo da su veličine otpora, induktivnosti i kapaciteta konstantne, a da je napon promjenljiv, npr. $U(t) = \sin t$, gornja diferencijalna jednačina postaje nehomogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

$$Cu_R'' + \frac{1}{R} u_R' + \frac{1}{L} u_R = \frac{U}{L} - C \sin t \ .$$