MATEMATIKA

Nermin Okičić
Vedad Pašić

Funkcije više promjenljivih : Diferencijabilnost i ekstremi

2016

MATEMATIKA

Sadržaj

Poglavlje 1

Diferencijabilnost funkcije n varijabli

U ovoj glavi govorit ćemo o drugoj važnoj osobini proizvoljnog preslikavanja, o diferencijabilnosti. Ovdje ćemo pretpostavljati uvijek ako drugačije nije naglašeno, da svaka tačka domena D_f posmatranog preslikavanja, pripada tom skupu zajedno sa nekom svojom okolinom, tj. pretpostavljat ćemo da je skup D_f otvoren. U nekim razmatranjima bit će neophodna i osobina povezanosti (koneksnosti) tog skupa. Za takav skup (otvoren i povezan) reći ćemo da je *oblast* u prostoru $\mathbb{R}^n$.

1.1 Izvod u pravcu

Za funkciju $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, izvod u tački $x_0 \in D_\phi$ definisali smo sa

$$\phi'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\phi(x_0+h) - \phi(x_0)}{h} , \tag{1.1.1}$$

i geometrijski, predstavljao je nagib tangente (tj. najbolju linearnu aproksimaciju) na krivu ϕ u tački $(x_0, \phi(x_0))$ ili trenutnu mjeru promjene funkcije

$\phi(x)$ u odnosu na varijablu x, kada je $x = x_0$. Kao uvod za nalaženje ovakve "najbolje linearne aproksimacije" za funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pokušat ćemo iskoristiti, tj. generalizovati (1.1.1) da bi realizovali ideju "nagiba" i "mjere promjene" za ovakvo preslikavanje.

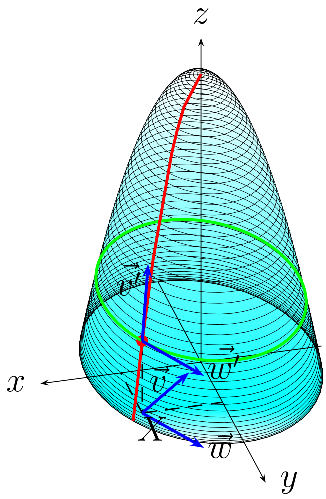
Posmatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definisanu sa

$$f(x, y) = 4 - 2x^2 - y^2 \ ,$$

čiji je graf prikazan na slici (1.1). Ukoliko želimo da vizualiziramo kretanje po ovom grafu (površi), nagib puta po kome se krećemo ovisi od polazne tačke ali i od pravca našeg kretanja. Naprimjer, neka je startna tačka $P(1, 1, 1)$ na površi i neka je pravac kretanja određen vektorom $\vec{v'} = (-1, -1, 3)$. Ovo će uzrokovati kretanje direktno ka vrhu grafa i jasno je da je "mjera promjene" rastuća. Međutim, ako se iz iste tačke krećemo u pravcu vektora $-\vec{v'}$, onda "silazimo niz graf", tj. "mjera promjene" je opadajuća. Obje ove mogućnosti naznačene su na slici crvenom bojom.
Ako iz iste tačke krenemo u pravcu vektora $\vec{w'} = (-1, 2, 0)$, vidimo da je putanja kretanja po elipsi

$$2x^2 + y^2 = 3 \ ,$$

tj. "obilazimo" oko grafa, pa je "nagib" bez promjene, a time i "mjera promjene" je 0. Ova mogućnost kretanja je na slici prikazana zelenom bojom. Dakle, govoriti o "nagibu" na graf funkcije f u tački, zahtijeva specificirati pravac kretanja.



Slika 1.1: Izvod u pravcu

Kretanju na grafu iz tačke $P(1, 1, 1)$, u pravcu vektora $\vec{v'}$, odgovara kretanje u domenu funkcije, iz tačke X u pravcu vektora $\vec{v} = (-1, -1)$. Analogno, kretanju u pravcu vektora $\vec{w'}$, odgovara kretanje iz X u pravcu $\vec{w}=(-1,2)$. Dakle, ukoliko se krećemo iz tačke $X(1,1)$ u pravcu vektora

$$\vec{u}=\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\ ,$$

(normiranje vektora vršimo iz prostog razloga što se time pravac i smjer vektora ne mijenjaju, pa ćemo "veličinu" pomjeranja u pravcu takvog vektora diktirati sa veličinom h) tada izraz

$$\frac{f(X+h\vec{u})-f(X)}{h}\ ,$$

za proizvoljno h, će predstavljati aproksimaciju nagiba na graf funkcije f u tački X, u pravcu $\vec{u}$. Uradimo malo računa.

$$\begin{aligned}
f(X+h\vec{u})-f(X) &= f\left(1-\frac{h}{\sqrt{2}},1-\frac{h}{\sqrt{2}}\right)-f(1,1)\\
&= 4-2\left(1-\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(1-\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2-1\\
&= 3-3\left(1-\sqrt{2}h+\frac{h^2}{2}\right)\\
&= 3\sqrt{2}h-\frac{3h^2}{2}=h\left(3\sqrt{2}-\frac{3h}{2}\right)\ .
\end{aligned}$$

Kao što smo to radili sa funkcijama jedne varijable, puštajući sada da h teži ka 0, dobili bi smo egzaktan nagib na graf, u tački A, u pravcu $\vec{u}$. Iz gornjeg onda imamo

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(X+h\vec{u})-f(X)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(3\sqrt{2}-\frac{3h}{2}\right)=3\sqrt{2}\ .$$

Dakle, naš graf ima nagib od $3\sqrt{2}$ (naravno da ova veličina izražava tangens ugla pod kojim se krećemo) ukoliko startujemo iz tačke $X(1,1)$, u pravcu vektora $\vec{u}$. Sličnim računom bi dobili da je u pravcu $-\vec{u}$ nagib $-3\sqrt{2}$, odnosno u pravcu vektora

$$\frac{\vec{w}}{||\vec{w}||}=\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)\ ,$$

nagib je 0.

Definicija 1.1.1

Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definisana u nekoj otvorenoj kugli oko tačke X. Za dati vektor $\vec{u}$, izraz

$$D_u f(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(X + h\vec{u}) - f(X)}{h} \ , \tag{1.1.2}$$

ukoliko limes postoji, nazivamo izvod u pravcu, funkcije f, u pravcu vektora $\vec{u}$, u tački X.

Primjer 1.1. Prema gornjem razmatranju, za funkciju $f(x,y) = 4 - 2x^2 - y^2$ je

$$D_u f(1,1) = 3\sqrt{2} \ , \ D_{-u} f(1,1) = -3\sqrt{2} \ , \ D_w f(1,1) = 0 \ .$$

$\diamondsuit$

1.2 Parcijalni izvod i parcijalni diferencijal

Kao što smo vidjeli iz gornjeg, za funkciju više varijabli ne možemo jednostavno govoriti o izvodu te funkcije, tj. možemo govoriti o izvodu ali pri tome moramo znati pravac kretanja, i tada ustvari govorimo o izvodu u pravcu. Pravac u kome nalazimo izvod funkcije više varijabli može biti proizvoljan, ali pravci određeni baznim vektorima prostora domena su od posebne važnosti. Neka su $e_1, e_2, ..., e_n$ standardni vektori baze prostora $\mathbb{R}^n$,

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0) \ , \ e_2 = (0, 1, 0, ..., 0) \ \cdots \ e_n = (0, 0, 0, ..., 1) \ .$$

Posmatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \ ,$$

koja je definisana u nekoj okolini U_A tačke $A(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$. Razmotrimo za trenutak funkciju $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uvedenu na sljedeći način

$$g(t) = f(t, x_2, x_3, ..., x_n) \ ,$$

tj. definišemo je preko funkcije f, tako što počev od druge, sve varijable držimo fiksnim (ne mjenjamo ih), a samo prvu shvatimo kao varijablu. Dakle, tada je g funkcija jedne varijable pa na nju možemo primjeniti jednakost (1.1.1),

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \ .$$

Ali tada imamo

$$\begin{aligned} g'(x_1) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x_1+h)-g(x_1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1+h,x_2,...,x_n)-f(x_1,x_2,...,x_n)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f((x_1,x_2,...,x_n)+(h,0,...,0))-f(x_1,x_2,...,x_n)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(X+he_1)-f(X)}{h} = D_{e_1}f(X)\ . \end{aligned}$$

Vidimo da je izvod funkcije g u tački x_1 u stvari izvod u pravcu, funkcije f u tački X, u pravcu vektora e_1.
Na isti način smo mogli fiksirati proizvoljnu k-tu promjenljivu ($k = 1, 2, ..., n$) funkcije f, tj. staviti da je $g(t) = f(x_1, x_2, ..., x_{k-1}, t, x_{k+1}, ..., x_n)$ i zaključiti da bi vrijedilo

$$g'(x_k) = D_{e_k}f(X)\ .$$

Definicija 1.2.1

Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definisana u nekoj okolini tačke A i neka je e_k ($k \in \{1, 2, ..., n\}$) k-ti vektor standardne baze u $\mathbb{R}^n$. Ukoliko postoji, izvod u pravcu $D_{e_k}f(A)$ nazivamo parcijalni izvod funkcije f po promjenljivoj x_k, u tački A.

Naravno da smo pojam parcijalnog izvoda mogli uvesti i na mnogo formalniji način, uvodeći pojmove priraštaja.

Definicija 1.2.2

Neka je $U_A \subseteq \mathbb{R}^n$ okolina tačke $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ i $X(x_1, x_2, ..., x_n) \in U_A$ proizvoljna. Razliku

$$\triangle x_k = x_k - a_k \quad ; \quad k = 1, 2, ..., n$$

nazivamo priraštajem varijable x_k, a razliku

$$\triangle_{x_k} f(X) = f(x_1, ..., x_k + \triangle x_k, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)$$

nazivamo parcijalnim priraštajem funkcije f po promjenljivoj x_k, u tački X.

Na isti način možemo definisati parcijalni priraštaj funkcije u proizvoljnoj tački $A(a_1, ..., a_n)$:

$$\triangle_{x_k} f(A) = f(a_1, ..., a_k + \triangle x_k, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n) \ .$$

Primjećujemo da parcijalni priraštaj funkcije n promjenljivih dobijamo tako što vršimo promjenu samo jedne varijable dok ostale varijable držimo fiksnim.

Definicija 1.2.3

Granična vrijednost

$$\lim_{\triangle x_k \to 0} \frac{\triangle_{x_k} f(A)}{\triangle x_k} = \lim_{x_k \to a_k} \frac{f(a_1, ..., x_k, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{x_k - a_k} \ ,$$

naziva se parcijalnim izvodom funkcije f po promjenljivoj x_k u tački A.

Na analogan način definišemo parcijalni izvod u proizvoljnoj tački

$$\lim_{\triangle x_k \to 0} \frac{\triangle_{x_k} f(X)}{\triangle x_k} = \lim_{\triangle x_k \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_k + \triangle x_k, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{\triangle x_k} \ .$$

U različitim knjigama matematičke analize nalazimo razne oznake za parcijalne izvode, kao npr.

$$f'_{x_k} \ ; \ f_{x_k} \ ; \ \frac{\partial f}{\partial x_k} \ \text{ i sl. } .$$

Mi ćemo najčešće koristiti oznaku $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, zato primjetimo da ovdje nismo koristili označavanje koje smo imali kod funkcije jedne promjenljive, tj. oznaku $\frac{df}{dx}$. Razlog za to je činjenica da izraz $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ ni u kom slučaju ne možemo shvatiti kao dijeljenje (∂f sa ∂x) što je bio slučaj sa $\frac{df}{dx}$ ($df = f'(x)dx$).

Tehnika određivanja parcijalnog izvoda se ni u čemu ne razlikuje od tehnike izračunavanja izvoda funkcije jedne promjenljive. Pri nalaženju parcijalnog izvoda po promjenljivoj x_k, sve ostale promjenljive shvatamo kao konstante, a nalazimo izvod po x_k, koristeći pravila i tablicu izvoda funkcija jedne promjenljive.

Primjer 1.2. Za funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, zadatu sa $f(x, y) = xy$, parcijalni izvodi su

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)y - xy}{\Delta x} = y \ .$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x(y + \Delta y) - xy}{\Delta y} = x \ .$$

$\diamondsuit$

Primjer 1.3. $f(x,y) = \sin(xy-y)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\sin(xy-y) \\
&= \cos(xy-y)\frac{\partial}{\partial x}(xy-y) \\
&= \cos(xy-y)\left(\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial x}y\right) \\
&= y\cos(xy-y)\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\sin(xy-y) \\
&= \cos(xy-y)\frac{\partial}{\partial y}(xy-y) \\
&= \cos(xy-y)\left(\frac{\partial}{\partial y}(xy) - \frac{\partial}{\partial y}y\right) \\
&= (x-1)\cos(xy-y)\ .
\end{aligned}$$

♢

Primjer 1.4. Posmatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \ln(x+yz)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\ln(x+zy) = \frac{1}{x+zy}\frac{\partial}{\partial x}(x+zy) = \frac{1}{x+yz}\ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\ln(x+yz) = \frac{1}{x+yz}\frac{\partial}{\partial y}(x+yz) = \frac{z}{x+yz}\ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\ln(x+yz) = \frac{1}{x+yz}\frac{\partial}{\partial z}(x+yz) = \frac{y}{x+yz}\ .$$

Parcijalni izvodi u konkretnoj tački, npr. $A(1,1,2)$ bili bi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,2) = \frac{1}{3}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,2) = \frac{2}{3}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,2) = \frac{1}{3}\ .$$

♢

Primjer 1.5. $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y\frac{\partial}{\partial x}x - x\frac{\partial}{\partial x}y}{y^2} = \frac{y-0}{y^2} = \frac{1}{y}\ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y\frac{\partial}{\partial y}x - x\frac{\partial}{\partial y}y}{y^2} = \frac{0-x}{y^2} = -\frac{x}{y^2}\ .$$

♢

Kod funkcije jedne varijable $y = f(x)$, ako je $x = g(t)$, imali smo pravilo izvoda složene funkcije (*pravilo kompozicije*ili *lančano pravilo*) $y = f(g(t))$, koje glasi

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} .$$

Pravilo kompozicije moramo takođe imati i kod funkcija više varijabli. Pokazaćemo to pravilo za funkciju dvije varijable, a ono se lako prenosi na funkcije sa n varijabli. Kao prvo razmotrimo slučaj kada je f funkcija dviju varijabli i g funkcija jedne varijable, tojest posmatrajmo slučaj kompozicije $z = g(f(x, y))$. z je ovisna o dvije varijable pa njene parcijalne izvode računamo po pravilu:

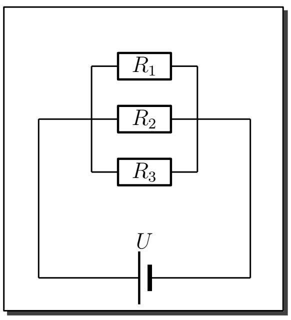
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dg}{df} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dg}{df} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} .$$

Primjer 1.6. Neka je $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ona je kompozicija polinomijalne funkcije $(x^2 + y^2)$ i korijene funkcije (funkcija jedne varijable).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} .$$

♢

Primjer 1.7. Pravilo kompozicije možemo primjenjivati i u drugim situacijama. Npr. posmatrajmo šemu otpornika u paralelnoj vezi.



Ukupan otpor kola dat je sa

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} . \quad (1.2.1)$$

Dakle, ukupan otpor je funkcija tri varijable, $R = R(R_1, R_2, R_3)$. Ako sada želimo naći parcijalne izvode po R_i $(i = 1, 2, 3)$, onda to možemo uraditi izračunavajući otpor R eksplicitno iz formule (1.2.1)

$$R = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} .$$

Međutim, ako lijevu stranu u (1.2.1) shvatimo kao kompoziciju racionalne funkcije $(\frac{1}{R})$ i naše funkcije R, onda direktno imamo

$$\frac{d\frac{1}{R}}{dR}\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{\partial \frac{1}{R_1}}{\partial R_1} + \frac{\partial \frac{1}{R_2}}{\partial R_1} + \frac{\partial \frac{1}{R_3}}{\partial R_1} ,$$

odakle je

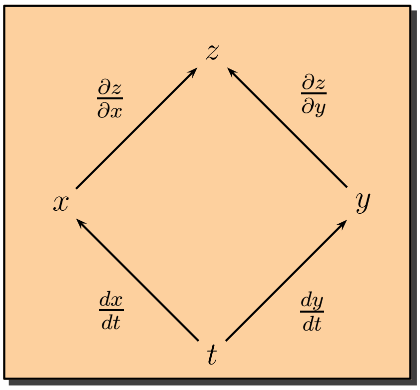
$$-\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial R_1} = -\frac{1}{R_1^2} \ ,$$

tj.

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R^2}{R_1^2} \ .$$

Analogno nalazimo parcijalne izvode po ostalim promjenljivima. ♢

Neka je $z = f(x, y)$ i neka su i x i y funkcije nekog parametra t, tj. $x = x(t)$ i $y = y(t)$. Tada je funkcija $z = f(x(t), y(t))$, ustvari funkcija jedne varijable (t) i pri tome imamo: Ako su funkcije $x(t)$ i $y(t)$ diferencijabilne u t i ako je funkcija f diferencijabilna u tački $(x(t), y(t))$, tada vrijedi



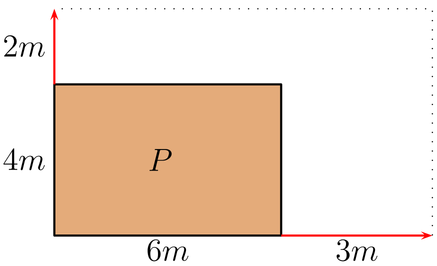
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \ .$$

Primjer 1.8. Neka je $f(x, y) = \sin x + \cos(xy)$ i neka su $x = t^2$ i $y = t^3$. Tada prema pravilu kompozicije imamo

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\
&= (\cos x - \sin(xy)y)2t + (-\sin(xy)x)3t^2 \\
&= (\cos t^2 - t^3 \sin t^5)2t - 3t^4 \sin t^5 \ .
\end{aligned}$$

♢

Primjer 1.9. Pravougaonik ima dužinu 6 m i širinu 4 m. U svakoj sekundi dužina se poveća za 3 m, a širina za 2 m. Odrediti promjenu površine pravougaonika u jednoj sekundi.



x - dužina pravougaonika
y - širina pravougaonika
P - površina pravougaonika
t - vrijeme

Dužina i širina pravougaonika su funkcije vremena, $x = x(t)$ i $y = y(t)$. Promjena dužine u jedinici vremena je $\frac{dx}{dt} = 3$, a promjena širine u jedinici vremena je $\frac{dy}{dt} = 2$.
Površina pravougaonika je $P(x, y) = x \cdot y$, a zbog zavisnosti dužine i širine od vremena imamo $P(x(t), y(t)) = x(t) \cdot y(t)$. Izračunajmo zavisnost površine o vremenu.

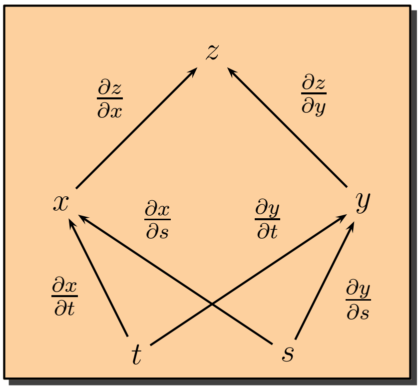
$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{dy}{dt} = y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt} \ .$$

Stepen promjene površine u datom momentu je

$$\frac{dP}{dt}(6, 4) = 4 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 24 \ \frac{m^2}{s} \ .$$

♢

Ukoliko su x i y zavisne od dvije varijable, tj. $x = x(t, s)$ i $y = y(t, s)$, tada pravilo kompozicije glasi:
Ako funkcije x i y imaju parcijalne izvode prvog reda u tački (t, s) i ako je funkcija $z = f(x, y)$ diferencijabilna u tački $(x(t, s), y(t, s))$, tada vrijedi



$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \ ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \ .$$

Primjer 1.10. Zadata je funkcija $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ i pri tome je $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$. Odrediti parcijalne izvode funkcije f po promjenljivima ρ i ϕ.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \rho} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \rho} = 2x\cos\phi + 2y\sin\phi \\ &= 2\rho(\cos^2\phi - \sin^2\phi) = 2\rho\cos 2\phi \ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \phi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \phi} = 2x(-\rho\sin\phi) + 2y\rho\cos\phi \\ &= -2\rho^2\cos\phi\sin\phi = -\rho sin2\phi \ .\end{aligned}$$

♢

1.3 Gradijent

Mnoge fizikalne veličine imaju različite vrijednosti u različitim tačkama prostora. Na primjer, temperatura u nekoj prostoriji nije jednaka u svim tačkama: zimi je visoka kraj izvora toplote, a niska pored otvorenog prozora. Električno polje oko tačkastog naboja veliko je pored naboja i smanjuje se kako se udaljavamo od naboja. Slično, gravitacijska sila koja djeluje na neki satelit zavisi od udaljenosti satelita od Zemlje. Brzina toka vode u nekom potoku velika je u uskim kanalima, a mala tamo gdje je potok širok.
U svim ovim primjerima postoji neko područje prostora koje nam je posebno zanimljivo za problem koji rješavamo; u svakoj tački prostora neka fizikalna veličina ima svoju vrijednost. Izraz polje znači često i područje i vrijednost fizikalne veličine u tom području (npr. elektično polje, gravitacijsko polje). Ako je fizikalna veličina koju promatramo skalar (npr. temperatura), tada govorimo o skalarnom polju. Ako je fizikalna veličina vektor (npr. električno polje, brzina, sila) tada govorimo o vektorskom polju.
Jedna od veličina koja karakteriše termin polja jeste pojam gradijenta.

Definicija 1.3.1

Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definisana u okolini U_A tačke A i neka postoje $\frac{\partial f}{\partial x_k}(A)$ za sve $k = 1, 2, ..., n$. Vektor

$$\nabla f(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \frac{\partial f}{\partial x_2}(A), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \right) ,$$

nazivamo gradijent funkcije f u tački A.

U gornjoj definiciji posmatramo funkciju čije su vrijednosti skalari, za koju u primjenama kažemo da je skalarno polje, a definisana veličina bi onda imala naziv gradijent skalarnog polja. Korisno je primjetiti to da za funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, njen gradijent je funkcija $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tj. gradijent je funkcija čiji je ulaz n-dimenzionalna veličina (vektor), a izlazna je takođe n-dimenzionalni vektor. Ovakve funkcije uobičajeno nazivamo *vektorsko polje*, a sa čime ćemo se susresti u narednim matematičkim izučavanjima.

Vektorski operator ∇ (nabla) se u dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu (3D) definiše sa

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} .$$

Kažemo da je to vektorski operator jer on funkciji f dodjeljuje veličinu ∇f, po principu

$$\nabla f = \overrightarrow{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \overrightarrow{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \overrightarrow{k}\frac{\partial f}{\partial z} \ .$$

Primjer 1.11. Na osnovu Primjera 1.2, gradijent funkcije $f(x,y) = xy$ je

$$\nabla f(x,y) = (y,x) \ ,$$

odnosno u konkretnoj tački je, npr. $\nabla f(-2,7) = (7,-2) = -2\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{j}$. $\diamondsuit$

Primjer 1.12. Iz Primjera 1.4 imamo

$$\nabla f(1,1,2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{i} + \frac{2}{3}\overrightarrow{j} + \frac{1}{3}\overrightarrow{k} \ .$$

$\diamondsuit$

Primjer 1.13. Za funkciju $f(x,y) = 4-2x^2-y^2$ imamo $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -4x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$, pa je gradijent dat sa

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (-4x, 2y) \ .$$

Konkretno u tački $O(0,0)$ je $\nabla f(0,0) = (0,0)$. $\diamondsuit$

Nije teško pokazati da za gradijent vrijede sljedeća pravila:

1. $\nabla(kf) = k\nabla f$, $(k = const.)$.
2. $\nabla(f \pm g) = \nabla f \pm \nabla g$.
3. $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.
4. $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$.

Gradijent skalarnog polja iznimno je važan u fizici gdje izražava vezu između polja i potencijala (gravitacijska polja), odnosno sile i potencijalne energije (električna polja). Ako se neko polje E može u cijelosti opisati konkretnom funkcijom $f(X)$ tako da je $E = -\nabla f(X)$, odnosno simbolički,

$$\text{polje} = -\nabla(\text{potencijal}) \ ,$$

tada skalarnu funkciju f nazivamo njegovim potencijalom. Specijalno, ako se neka sila F može napisati kao negativni gradijent neke funkcije V, tada skalarnu funkciju V nazivamo potencijalnom energijom.

1.4 Diferencijabilnost funkcija više promjenljivih

Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definisana u nekoj okolini U_A tačke $A(a_1, a_2, ..., a_n)$. Samo postojanje parcijalnih izvoda ne obezbjeđuje neke bitne osobine posmatrane funkcije, što vidimo iz sljedećeg primjera.

Primjer 1.14. Posmatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, zadatu sa

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ; \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Nije teško pokazati da je f prekidna funkcija u tački $(0,0)$. S druge strane ona ima oba parcijalna izvoda u tački $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \ ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0 \ .$$

Dakle, parcijalni izvodi postoje u tački $(0,0)$. a funkcija ima prekid u toj tački. $\diamondsuit$

Jasno je dakle, da za razliku od funkcija jedne promjenljive gdje je postojanje izvoda značilo neprekidnost funkcije, postojanje parcijalnih izvoda kod funkcije više varijabli ne može garantovati određene "lijepe" osobine funkcije, nego moramo posmatrati neka svojstva koja uzimaju u obzir ponašanje funkcije u čitavoj okolini posmatrane tačke.

Definicija 1.4.1

Razlika

$$\triangle f(A) = f(X) - f(A) \ ; \ (X \in U_A) \ ,$$

naziva se totalni priraštaj funkcije f u tački A.

Totalni priraštaj funkcije u tački $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ izražavamo preko priraštaja nezavisnih promjenljivih, tj.

$$\triangle f(A) = f(A + \triangle X) - f(A) = f(a_1 + \triangle x_1, ..., a_n + \triangle x_n) - f(a_1, ..., a_n) \ ,$$

ili za proizvoljnu tačku $X(x_1, x_2, ..., x_n)$ sa

$$\triangle f(X) = f(x_1 + \triangle x_1, ..., x_n + \triangle x_n) - f(x_1, ..., x_n) \ .$$

Za razliku od parcijalnog priraštaja gdje jednu varijablu mijenjamo, a sve druge "držimo" fiksnim, kod totalnog priraštaja sve varijable istovremeno "doživljavaju" neku promjenu.

Definicija 1.4.2

Za funkciju $f(X) = f(x_1, ..., x_n)$ definisanu u okolini tačke $A \in \mathbb{R}^n$, kažemo da je diferencijabilna u toj tački ako vrijedi

$$\triangle f(A) = L(X) + \omega(X)d(X,A) \ , \tag{1.4.1}$$

gdje je

$$L(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k(x_k - a_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k \triangle x_k \ , \tag{1.4.2}$$

linearna funkcija priraštaja nezavisnih promjenljivih, p_k $(k = 1, 2, ..., n)$ su realni koeficijenti, $\omega(X)$ neprekidna funkcija u tački A takva da je

$$\lim_{X \to A} \omega(X) = \omega(A) = 0$$

i

$$d(X,A) = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ ,$$

rastojanje tačke X od tačke A.

Definicija 1.4.3

Linearnu funkciju $L(X)$ iz (1.4.2) nazivamo totalni diferencijal funkcije $f(X)$ u tački A i označavamo ga sa

$$L(X) = df(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k \triangle x_k = \sum_{k=1}^{n} p_k dx_k \ .$$

S obzirom na uvedeno u gornjim definicijama, ako je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u tački $A \in D_f$, priraštaj funkcije u tački A zbog (1.4.1) je oblika

$$\triangle f(A) = f(X) - f(A) = df(X) + \omega(X)d(X,A) \ .$$

Ako se tačka X "približava" sve više tački A, zbog $\lim\limits_{X \to A} \omega(X) = 0$, vidimo da je priraštaj funkcije $\triangle f$ sve bolje aproksimiran diferencijalom funkcije df, tojest u blizini tačke A vrijedi $\triangle f(A) \approx df(A)$, a to onda znači da se vrijednost funkcije u tački koja je blizu tačke A može aproksimativno izračunati sa

$$f(X) \approx f(A) + df(A) \ ,$$

što nazivamo lokalnom aproksimacijom funkcije u tački.

Primjer 1.15. Koristeći lokalnu aproksimaciju izračunati vrijednost funkcije $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ u tački $X_0(3.04, 3.98)$.

Za zadatu funkciju njeni parcijalni izvodi su

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \ .$$

Iz činjenice da je $\triangle f(X_0)\approx df(X_0)$ i $\triangle f(X_0)=f(X)-f(X_0)$ za tačku X blizu tački X_0 imamo

$$\sqrt{x^2+y^2}\approx\sqrt{x_0^2+y_0^2}+\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}(x-x_0)+\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}(y-y_0) \ .$$

Uzmimo da je tačka $X_0(3,4)$ i da je $X(3.04, 3.98)$. Tada imamo

$$\sqrt{(3.04)^2+(3.98)^2}\approx 5+\frac{3}{5}\cdot 0.04+\frac{4}{5}\cdot(-0.02)=5.008 \ .$$

$\diamondsuit$

Teorem 1.4.1: (Potrebni uslovi diferencijabilnosti)

Neka je funkcija $f(X)$ diferencijabilna u tački A. Tada vrijedi:

1. Postoji parcijalni izvod po svakoj promjenljivoj u tački A.
2. Koeficijenti p_k $(k=1,2,...,n)$ u izrazu za totalni diferencijal su parcijalni izvodi funkcije, tj.

$$p_k=\frac{\partial f}{\partial x_k}(A) \ ; \ k=1,2,...,n \ .$$

Dokaz : Ako je funkcija f diferencijabilna u tački A, tada po Definiciji 1.4.2 vrijedi

$$\triangle f(A)=f(x_1,x_2,...,x_n)-f(a_1,a_2,...,a_n)=\sum_{k=1}^{n}p_k\triangle x_k+\omega(X)d(X,A) \ .$$

Ako fiksiramo $n-1$ promjenljivih

$$x_1=a_1,...,x_{k-1}=a_{k-1},x_{k+1}=a_{k+1},...,x_n=a_n \ ,$$

imamo

$$\triangle f(A)=f(a_1,...,a_{k-1},x_k,a_{k+1},...,a_n)-f(a_1,...,a_k,...,a_n)=p_k\triangle x_k+\omega(X)|x_k-a_k| \ ,$$

odakle je

$$\lim_{x_k \to a_k} \frac{\triangle f(A)}{\triangle x_k} = p_k + sgn(x_k - a_k) \lim_{x_k \to a_k} \omega(a_1, ..., a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, ..., a_n) \ .$$

Odavde vidimo da za proizvoljno $k \in \{1, 2, ..., n\}$ vrijedi

$$p_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}(A) \ ,$$

iz čega opet vidimo da parcijalni izvodi postoje i da su oni upravo koeficijenti p_k $(k = 1, 2, ..., n)$. ♣

Vidimo da totalni diferencijal diferencijabilne funkcije $f(X)$ ima oblik

$$df(X) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(X)dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X)dx_n \ , \tag{1.4.3}$$

ili izraženo vektorski

$$df(X) = \nabla f(X) \cdot dX \ ,$$

gdje je $dX = (dx_1, dx_2, ..., dx_n)$, vektor priraštaja nezavisnih varijabli. Gornja veza nam već pokazuje važnost gradijenta funkcije, tj. diferencijal funkcije se može prikazati kao skalarni produkt gradijenta funkcije i vektora priraštaja argumenata. U analogiji sa funkcijom jedne varijable ($df(x) = f'(x)dx$) vidimo da ulogu izvoda funkcije preuzima gradijent.

Primjer 1.16. Za funkciju $f(x, y) = 4 - 2x^2 - y^2$, totalni diferencijal u proizvoljnoj tački $X(x, y)$ računamo tako što prvo odredimo parcijalne izvode

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -4x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \ ,$$

a zatim iskoristimo (1.4.3)

$$df(X) = \frac{\partial f}{\partial x}(X)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(X)dy = -4xdx - 2ydy \ .$$

U konkretnoj tački $A(-1, 2)$, totalni diferencijal glasi $df(A) = 4dx - 4dy$. ♢

Teorem 1.4.2

Ako je funkcija $f(x_1, ..., x_n)$ diferencijabilna u tački A, ona je i neprekidna u toj tački.

Dokaz : Iz diferencijabilnosti funkcije imamo

$$\triangle f(A) = f(X) - f(A) = L(X) + \omega(X)d(X, A) ,$$

a odavde onda imamo

$$\lim_{X\to A}(f(X) - f(A)) = \lim_{X\to A} L(X) + \lim_{X\to A} \omega(X)d(X, A) = 0$$

(jer je $L(A) = 0$). Ovo ne znači ništa drugo do

$$\lim_{X\to A} f(X) = f(A) ,$$

tj. neprekidnost funkcije f u tački A. ♣

Da neprekidnost ne povlači diferencijabilnost, vidimo iz sljedećeg primjera.

Primjer 1.17. Posmatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, zadatu sa

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & ; \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Data funkcija je neprekidna u tački $(0, 0)$ (što je ostavljeno čitaocu za vježbu) i ima parcijalne izvode $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Međutim, f nije diferencijabilna u tački $(0, 0)$. Zaista, ako bi bila diferencijabilna imali bi smo

$$\Delta f(0, 0) = f(\Delta x, \Delta y)-f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\Delta y+\omega(\Delta x, \Delta y)d(X, O) ,$$

odnosno, odavde je zbog $d(X, O) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$,

$$\omega(\Delta x, \Delta y) = \frac{\Delta x\Delta y^2}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

Zbog osobine funkcije ω, moralo bi biti $\lim\limits_{X\to O} \omega(X) = 0$, tj.

$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0} \frac{\Delta x\Delta y^2}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 ,$$

što nije tačno jer za $\Delta x = \Delta y > 0$ je

$$\frac{\Delta x\Delta y^2}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \nrightarrow 0 \quad , \quad \Delta x, \Delta y \to 0 .$$

♢

Uslov diferencijabilnosti u gornjoj teoremi možemo zamijeniti nešto slabijim uslovima. Naime vrjedi,

Teorem 1.4.3

Ako funkcija $f(X)$ u nekoj oblasti D ima ograničene parcijalne izvode po svakoj promjenljivoj, tada je ona neprekidna u toj oblasti.

Šta više, sa još bližim informacijama o parcijalnim izvodima možemo imati još preciznije informacije o funkciji. Tako specijalno vrijedi

Teorem 1.4.4

Ako funkcija $f(X)$ u oblasti D ima parcijalne izvode po svakoj promjenljivoj jednake nuli, onda je funkcija u toj oblasti konstanta.

Ovo je analogon činjenici za funkciju jedne varijable, da ako je $f'(x) = 0$ za $x \in A$, da je tada f konstantna na A.

Sljedeći teorem je analogon Lagrangeovoj teoremi za funkcije jedne promjenljive (Za diferencijabilnu funkciju na intervalu (a, b), za proizvoljan $[x, y] \subset (a, b)$, postoji $c \in (x, y)$, tako da je $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$).

Teorem 1.4.5: (Lagrangeov teorem)

Ako funkcija $f(X)$ u okolini U_A tačke A ima konačne ili beskonačne parcijalne izvode po svakoj promjenljivoj, tada za proizvoljno $X \in U_A$ postoje tačke $X_1, X_2, ..., X_n \in U_A$, takve da je

$$f(X) - f(A) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(X_k) dx_k \ .$$

Iskažimo sada i dovoljne uslove diferencijabilnosti.

Teorem 1.4.6: (Dovoljni uslovi diferencijabilnosti)

Ako funkcija $f(X)$ ima u okolini tačke A parcijalne izvode po svakoj promjenljivoj i ako su ti parcijalni izvodi neprekidni u tački A, tada je funkcija $f(X)$ diferencijabilna u tački A.

Dokaz : Dokaz ćemo jednostavnosti zapisa radi, dati za funkciju dvije promjenljive i on se lako može prenijeti na funkcije sa n promjenljivih.
Na osnovu Lagrangeovog teorema, priraštaj funkcije $f(x, y)$ ima oblik

$$f(x, y) - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(X_1)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(X_2)(y - b) \ , \tag{1.4.4}$$

gdje su tačke $X(x,y), X_1(\xi_1, b)$ i $X_2(a,\xi_2)$ iz okoline U_A tačke A. Zbog pretpostavljene neprekidnosti parcijalnih izvoda, tj. neprekidnost funkcija $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ u tački $A(a,b)$, iz (1.4.4) imamo da vrijedi

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = f(a,b)\ ,$$

pa važi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) + \varepsilon_1(X)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(X_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(A) + \varepsilon_2(X)\ ,$$

gdje $\varepsilon_1 \to 0$ i $\varepsilon_2 \to 0$, kada $X \to A$.
Ako posljednje dvije jednakosti pomnožimo sa $x-a$ i $y-b$ respektivno, i tako dobijene jednakosti saberemo, dobijamo

$$\begin{aligned} f(x,y) \ &- \ f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(X_1)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(X_2)(y-b) \\ &= \ \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y-b) + \varepsilon_1(X)(x-a) + \varepsilon_2(X)(y-b)\ , \end{aligned}$$

odnosno

$$\triangle f = df + \varepsilon_1(X)(x-a) + \varepsilon_2(X)(y-b)\ ,$$

iz čega se, na osnovu Definicije 1.4.2, vidi da je funkcija f diferencijabilna u tački A. ♣

Za funkciju koja u nekoj tački ima neprekidne parcijalne izvode, reći ćemo da je *neprekidno diferencijabilna* u toj tački. Ako funkcija f zadovoljava taj uslov u svim tačkama nekog skupa D, onda kažemo da je f neprekidno diferencijabilna na D. Skup neprekidno diferencijabilnih funkcija na nekom skupu D označavamo sa $C^1(D)$.

Posmatrajmo sada $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i neka je f neprekidno diferencijabilna funkcija u nekoj okolini U_A tačke $A(a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$. Neka je $u=(u_1,u_2)$ proizvoljan jedinični vektor i nađimo izvod u pravcu $D_u f(A)$. Na osnovu definicije izvoda u pravcu imamo

$$\begin{aligned} D_u f(A) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(A+hu)-f(A)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a_1+hu_1, a_2+hu_2) - f(a_1,a_2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a_1+hu_1,a_2+hu_2) - f(a_1+hu_1,a_2) + f(a_1+hu_1,a_2) - f(a_1,a_2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a_1+hu_1,a_2+hu_2)-f(a_1+hu_1,a_2)}{h} + \frac{f(a_1+hu_1,a_2)-f(a_1,a_2)}{h}\right)\ . \end{aligned}$$

Za fiksno $h \neq 0$, definišimo sada funkciju $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sa

$$\phi(t) = f(a_1 + hu_1, a_2 + t) \ .$$

Pretpostavka o diferencijabilnosti funkcije f daje nam diferencijabilnost funkcije ϕ, te imamo

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \lim_{s\to 0} \frac{\phi(t+s) - \phi(t)}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{f(a_1 + hu_1, a_2 + t + s) - f(a_1 + hu_1, a_2 + t)}{s} \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}(a_1 + hu_1, a_2 + t) \ . \end{aligned}$$

Neka je sada $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definisana sa

$$\alpha(t) = \phi(u_2 t) = f(a_1 + hu_1, a_2 + tu_2) \ . \tag{1.4.5}$$

α je diferencijabilna i na osnovu izvoda složene funkcije imamo

$$\alpha'(t) = u_2 \phi'(tu_2) = u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a_1 + hu_1, a_2 + tu_2) \ . \tag{1.4.6}$$

Na osnovu teorema o srednjoj vrijednosti funkcije jedne varijable, postoji $\xi \in (0, h)$, takav da vrijedi

$$\frac{\alpha(h) - \alpha(0)}{h} = \alpha'(\xi) \ .$$

Stavljajući sada (1.4.5) i (1.4.6) u gornju jednakost, dobijamo

$$\frac{f(a_1 + hu_1, a_2 + hu_2) - f(a_1 + hu_1, a_2)}{h} = u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a_1 + hu_1, a_2 + \xi u_2) \ . \tag{1.4.7}$$

Na isti način, posmatrajući funkciju $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zadatu sa $\beta(t) = f(a_1 + tu_1, a_2)$, imamo da vrijedi

$$\beta'(t) = u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + tu_1, a_2) \ ,$$

i opet koristeći teorem o srdnjoj vrijednosti, zaključili bi da postoji $\eta \in (0, h)$, tako da je

$$\frac{f(a_1 + hu_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{h} = \frac{\beta(h) - \beta(0)}{h} = \beta'(\eta) = u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + \eta u_1, a_2) \ . \tag{1.4.8}$$

Stavljajući sada (1.4.7) i (1.4.8) u izraz za $D_u f(A)$, imamo

$$D_u f(A) = \lim_{h\to 0}\left(u_2\frac{\partial f}{\partial y}(a_1+hu_1, a_2+\xi u_2) + u_1\frac{\partial f}{\partial x}(a_1+\eta u_1, a_2)\right) . \quad (1.4.9)$$

Kako su $\xi, \eta \in (0,h)$, kada $h \to 0$, to onda i $\xi, \eta \to 0$. Iskoristivši definitivno i pretpostavku o neprekidnosti parcijalnih izvoda $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$, računajući limes u (1.4.9), dobijamo

$$D_u f(A) = u_1\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) + u_2\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) . \quad (1.4.10)$$

Generalizaciju tvrdnje iskazane u (1.4.10) iskazujemo za funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sljedećom teoremom.

Teorem 1.4.7

Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilna u nekoj okolini tačke $A \in \mathbb{R}^n$. Tada za proizvoljan jedinični vektor u, postoji $D_u f(A)$ i vrijedi

$$D_u f(A) = \nabla f(A) \cdot u .$$

Primjer 1.18. Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, zadata sa $f(x,y) = 4 - 2x^2 - y^2$.

$\nabla f(x,y) = (-4x, -2y)$, pa za vektor $u = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ imamo

$$D_u f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot u = (-4,-2) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3\sqrt{2} ,$$

što možemo potvrditi sa ranije urađenim primjerom. Sada jednostavno računamo i

$$D_{-u} f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot (-u) = (-4,-2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3\sqrt{2} .$$

Za vektor $v = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ imamo

$$D_v f(1,1) = (-4,-2) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0 .$$

♢

Neka je sada u proizvoljan jedinični vektor, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i neka je $A \in \mathbb{R}^n$. Koristeći Cauchy-Schwarzovu nejednakost, možemo zaključiti sljedeće,

$$|D_u f(A)| = |\nabla f(A) \cdot u| \leq ||\nabla f(A)||\ ||u|| = ||\nabla f(A)|| \ . \tag{1.4.11}$$

Ovo nam govori, bukvalno čitajući, da je apsolutna vrijednost izvoda funkcije u pravcu u u tački A, manja ili jednaka intenzitetu vektora gradijenta funkcije u toj tački. Nešto konkretnije, ovo znači da veličina promjene rasta funkcije u nekoj tački u proizvoljnom pravcu nikad ne prelazi dužinu vektora gradijenta u toj tački. Šta više, znajući osobine Cauchy-Schwarzove nejednakosti, jednakost u (1.4.11) će se postići upravo u slučaju kada je vektor u kolinearan vektoru $\nabla f(A)$. Zaista, ako je $\nabla f(A) \neq 0$, onda za vektor $u = \frac{\nabla f(A)}{||\nabla f(A)||}$ imamo,

$$D_u f(A) = \nabla f(A) \cdot u = \frac{\nabla f(A) \cdot \nabla f(A)}{||\nabla f(A)||} = \frac{||\nabla f(A)||^2}{||\nabla f(A)||} = ||\nabla f(A)|| \ .$$

Šta više, vrijedi $D_{-u} f(A) = -||\nabla f(A)||$. Gornju tvrdnju iskazujemo sa,

Teorem 1.4.8

Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilna funkcija u nekoj otvorenoj kugli koja sadrži tačku A. Tada $D_u f(A)$ ima maksimalnu vrijednost $||\nabla f(A)||$ kada je vektor u ort vektor vektora $\nabla f(A)$, a minimalnu vrijednost, $-||\nabla f(A)||$, kada je vektor u ort vektora $-\nabla f(A)$.

Dakle, gradijentni vektor pokazuje pravac i smjer maksimalne promjene rasta funkcije, odnosno negativni gradijentni vektor pokazuje pravac i smjer maksimalne promjene opadanja funkcije. Šta više, intenzitet gradijentnog vektora nam govori o veličini rasta u smjeru maksimalnog rasta, odnosno njegova negativna vrijednos govori o veličini opadanja funkcije u smjeru maksimalnog opadanja.

Primjer 1.19. Posmatrajmo ponovo funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadatu sa

$$f(x, y) = 4 - 2x^2 - y^2 \ ,$$

za koju je

$$\nabla f(x, y) = (-4x, -2y) \ .$$

Ukoliko se nalazimo u tački $A(1, 1)$ (na grafu u tački $(1, 1, 1)$) i želimo krenuti u smjeru najvećeg rasta funkcije f, na osnovu gornje teoreme, trebamo krenuti u pravcu vektora

$$u = \frac{\nabla f(1,1)}{||\nabla f(1,1)||} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) .$$

Ako tražimo pravac najbržeg opadanja funkcije, onda će to biti u pravcu vektora

$$-u = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) .$$

Šta više, veličina promjene rasta u pravcu tog vektora je

$$D_u f(1,1) = ||\nabla f(1,1)|| = \sqrt{20} ,$$

a veličina opadanja je

$$D_{-u} f(1,1) = -||\nabla f(1,1)|| = -\sqrt{20} .$$

$\diamondsuit$

Razmotrimo još jedan važan fakat vezan za gradijent funkcije. Pokazaćemo ga za funkciju dvije varijable, a isto rezonovanje imamo za proizvoljnu funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Dakle, neka je data funkcija $z = f(x,y)$ čiji je graf površ G u prostoru $\mathbb{R}^3$. Posmatrajmo poizvoljnu tačku $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ na grafu G i neka je l nivo linija na grafu G koja prolazi kroz tačku P. Kako je za tu liniju zadovoljeno $f(x,y) = k$, za neko fiksno $k \in \mathbb{R}$, i kako je ona jednodimenzionalan objekat u prostoru, možemo je parametrizovati, tj. svaku tačku linije l možemo posmatrati kao vektorsku funkciju $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ za $t \in [\alpha, \beta]$. Neka je t_0 ona vrijednost parametra koja odgovara tački P. Kako je nivo linija l na površi G, mora biti zadovoljena jednačina

$$f(x(t), y(t)) = k \ , \text{ za svako } t \in [\alpha, \beta] \ .$$

Diferenciranjem ove jednakosti po t, primjenom pravila kompozicije, imamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0 \ . \tag{1.4.12}$$

Nije teško vidjeti da se jednakost (1.4.12) može zapisati u vektorskoj notaciji,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \nabla f \cdot \dot{\vec{r}} = 0 \ .$$

Gornje će vrijediti u proizvoljnoj tački nivo linije l, tj.

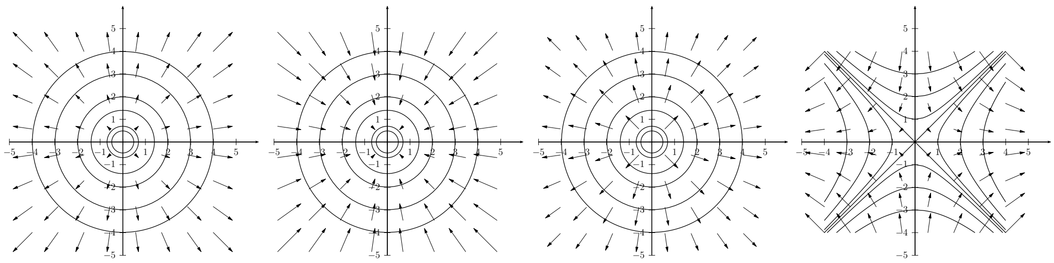
$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \dot{\vec{r}}(t_0) = 0 \ .$$

Dakle, vrijedi vrdnja,

Teorem 1.4.9

Gradijentni vektor funkcije $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ u svakoj tački nivo linije $f(x_1, x_2, ..., x_n) = k$, ortogonalan je na tu liniju.

Na sljedećoj slici prikazano je nekoliko funkcija konturnim grafom (pomoću nivo linija) i odgovarajućim "vektorskim poljem" ("strelice" na slici predstavljaju gradijentne vektore date funkcije u raznim tačkama). "Strelice" su usmjerene u pravcu najbržeg rasta funkcije, a veličina strelica odražava brzinu promjene funkcije u tom pravcu. Takođe uočavamo ortogonalnost gradijentnih vektora na odgovarajuće nivo linije.



$f(x, y) = x^2 + y^2$ $\quad$ $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ $\quad$ $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad$ $f(x, y) = x^2 - y^2$

1.5 Pravila diferenciranja

Kao što smo već mogli primjetiti, pravila nalaženja diferencijala funkcija više varijabli neće se razlikovati od tih pravila kod funkcije jedne varijabe.

Teorem 1.5.1

Neka su funkcije $f, g : D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$ diferencijabilne u tački $A \in D$ i neka su $a, b \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Tada je i funkcija $af + bg$ diferencijabilna u tački A i vrijedi

$$d(af + bg)(A) = adf(A) + bdg(A) \ .$$

Teorem 1.5.2

Neka su funkcije $f, g : D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$ diferencijabilne u tački $A \in D$. Tada su i funkcije $f \cdot g$ i $\dfrac{f}{g}$ (posljednja uz uslov $g(A) \neq 0$) diferencijabilne u tački A i vrijedi

$$d(fg)(A) = g(A)df(A) + f(A)dg(A) \; ,$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(A) = \frac{g(A)df(A) - f(A)dg(A)}{(g(A))^2} \; .$$

1.6 Izvodi višeg reda, Hesseova matrica

Ukoliko funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ima parcijalne izvode koji postoje na nekom otvorenom skupu U, tada za svako $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ je takođe funkcija sama za sebe, tj. $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Parcijalni izvodi funkcije $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, ukoliko postoje, nazivaju se *parcijalni izvodi drugog reda* funkcije f.

Kao i za prve parcijalne izvode i za druge parcijalne izvode postoje razne oznake kao naprimjer: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $f''_{x_i x_j}$, $D_{x_i x_j} f$ ili jednostavno $f_{x_i x_j}$. Mi ćemo se služiti uglavnom prvom navedenom notacijom, ali po potrebi skraćivanja zapisa, često ćemo upotrebljavati i posljednju navedenu notaciju. Tako za funkciju $z = f(x, y)$ imamo sljedeće parcijalne izvode drugog reda, zapisane i sa prvom i sa posljednjom notacijom:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \; ; \; f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \; ; \; f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Tehnika nalaženja parcijalnih izvoda drugog reda sadržana je u simboličkom zapisivanju tih izvoda. Naprimjer, f_{xy} znači da od izvoda f'_x (prvi s lijeva indeks nam govori od koga pravimo parcijalni izvod) nalazimo parcijalni izvod po y (drugi indeks s lijeva nam govori po čemu radimo drugi parcijalni izvod).

Primjer 1.20. Odredimo parcijalne izvode drugog reda funkcije $z = x^2 y$. Prvo odredimo parcijalne izvode prvog reda:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \; .$$

Odredimo sada parcijalne izvode drugog reda, koristeći gornje objašnjenje. Za nalaženje f_{xx}, uzimamo $\frac{\partial z}{\partial x}$ i od njega tražimo parcijalni izvod po x. Tako dobijamo

$$f_{xx} = (2xy)'_x = 2y \; .$$

Analogno, za f_{xy} uzimamo prvi parcijalni izvod po x, pa od njega tražimo izvod po y

$$f_{xy} = (2xy)'_x = 2x \ .$$

Istu logiku koristimo kod nalaženja ostala dva parcijalna izvoda drugog reda,

$$f_{yx} = 2x \ \ ; \ \ f_{yy} = 0 \ .$$

$\diamondsuit$

Primjer 1.21. $z = e^{x^2+y^2}$

$$f_x = 2xe^{x^2+y^2} \ \ ; \ \ f_y = 2ye^{x^2+y^2} \ .$$

$f_{xx} = 2e^{x^2+y^2} + 2x2xe^{x^2+y^2} = 2e^{x^2+y^2}(1+2x^2)$; $f_{xy} = 2x2ye^{x^2+y^2} = 4xye^{x^2+y^2}$;

$f_{yx} = 2y2xe^{x^2+y^2} = 4xye^{x^2+y^2}$; $f_{yy} = 2e^{x^2+y^2} + 2y2ye^{x^2+y^2} = 2e^{x^2+y^2}(1+2y^2)$.

$\diamondsuit$

Za funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, parcijalne izvode $f_{x_ix_j}$ i $f_{x_jx_i}$ $(i \neq j)$, nazivamo *mješoviti parcijalni izvodi* i na osnovu opisanog postupka, jasna nam je razlika istaknuta poretkom indeksa.

U pokazana dva primjera primijećujemo da su mješoviti parcijalni izvodi jednaki, $f_{xy} = f_{yx}$. Postavlja se pitanje da li je to tako u opštem slučaju? Kao što ćemo kasnije vidjeti taj uslov je veoma bitan, a ovdje ćemo dati uslove pod kojima su ti parcijalni izvodi jednaki za funkciju dvije promjenljive. Prije toga, odgovor na postavljeno pitanje nam daje sljedeći primjer.

Primjer 1.22. Posmatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadatu sa

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ; \ (x,y) \neq (0,0) \\ \qquad 0 & ; \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Tada je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \ , \ (x,y) \neq (0,0) \ ; \ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \ .$$

Onda je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = \lim_{h \to 0}\frac{-h}{h} = -1 \ .$$

Na sličan način određujući, imamo da je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1 \ ,$$

pa očigledno u opštem slučaju mješoviti izvodi nisu jednaki. $\diamondsuit$

Definicija 1.6.1

Za funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kažemo da je dva puta neprekidno diferencijabilna na otvorenom skupu $U \subseteq \mathbb{R}^n$, i pišemo $f \in C^2(U)$, ako su funkcije $f_{x_i x_j}$ neprekidne na U, za sve $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Pod određenim uslovima koji su dati u narednoj teoremi, mješoviti izvodi će biti jednaki.

Teorem 1.6.1

Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup koji sadrži tačku A i neka je funkcija $f \in C^2(U)$. Tada vrijedi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A) ,$$

za sve $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Za funkciju dvije varijable, vidjeli smo, postoje četiri parcijalna izvoda drugog reda. Praveći od njih ponovo parcijalne izvode, dobijamo parcijalne izvode trećeg reda, kojih će biti osam. Za funkciju tri varijable, parcijalnih izvoda drugog reda ima devet, a trećeg reda 27.

Funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ima n^2 parcijalnih izvoda drugog reda.

Definicija 1.6.2

Neka svi parcijalni izvodi drugog reda funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ postoje u tački $c \in \mathbb{R}^n$. Matricu reda $n \times n$

$$\mathbf{H}f(c) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(c) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(c) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(c) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(c) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(c) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_3}(c) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_n}(c) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(c) \end{bmatrix} \tag{1.6.1}$$

nazivamo Hesseova matrica ili Hessijan funkcije f u tački c.

Primjetimo da je i-ta kolona Hesseove matrice, gradijent funkcije $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, tj. $\nabla f'_{x_i}(c)$.

Primjer 1.23. Neka je $f(x,y) = x^2y - xy^2$. Tada je

$$\mathbf{H}f(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{yx}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x-2y \\ 2x-2y & -2x \end{bmatrix} .$$

Sada naprimjer, u tački $A(2,1)$, Hessijan glasi

$$\mathbf{H}f(2,1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} .$$

$\diamondsuit$

Neka je sada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dva puta neprekidno diferencijabilna na nekoj otvorenoj kugli $B(A,r) \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je $h = (h_1, h_2)$ vektor, takav da je $||h|| < r$. Definišimo novu funkciju $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, na sljedeći način

$$\varphi(t) = f(A + th) .$$

(Veličinu $A+th$ shvatamo tako da se iz tačke A pomjerimo u pravcu vektora h, za dužinu $t||h||$) Funkcija φ je funkcija jedne varijable i pri tome je npr. $\varphi(0) = f(A)$ i $\varphi(1) = f(A+h)$. Na osnovu Taylorove teoreme za funkciju jedne varijable sada imamo

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(\xi) , \tag{1.6.2}$$

gdje je $\xi \in (0,1)$. Kako je $d\varphi = df$, koristeći pravilo izvoda kompozicije, imamo

$$\varphi'(t) = \nabla f(A+th) \cdot \frac{d}{dt}(A+th) = \nabla f(A+th) \cdot h = f_x(A+th)h_1 + f_y(A+th)h_2 . \tag{1.6.3}$$

(jasno, u izrazu $\nabla f(A+th) \cdot h$ imamo skalarno množenje). Analogno nalazimo i drugi izvod

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= \nabla\left(h_1 f_x(A+th) + h_2 f_y(A+th)\right) \cdot h \\ &= \left(h_1 \nabla f_x(A+th) + h_2 \nabla f_y(A+th)\right) \cdot (h_1, h_2) \\ &= [h_1 \ h_2] \begin{bmatrix} f_{xx}(A+th) & f_{xy}(A+th) \\ f_{yx}(A+th) & f_{yy}(A+th) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

(Zadnji zapis dobijamo nakon jednostavnog matričnog računa). Koristeći sada oznake

$$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

i

$$h^T = [h_1 \ h_2] \ ,$$

posljednje možemo zapisati sa

$$\varphi''(t) = h^T \mathbf{H} f(A + th)h \ . \tag{1.6.4}$$

Stavljajući (1.6.3) i (1.6.4) u izraz (1.6.2), dobijamo sljedeću vezu

$$f(A+h) = \varphi(1) = f(A) + \nabla f(A) \cdot h + \frac{1}{2} h^T \mathbf{H} f(A + \xi h)h \ .$$

Ovaj rezultat predstavlja verziju Taylorove teoreme za funkcije više varijabli, koga generalizujemo sljedećom teoremom

Teorem 1.6.2

Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i neka je $f \in C^2(B(A,r))$ $(r > 0)$. Neka je h vektor, takav da je $||h|| < r$. Tada postoji realan broj $\xi \in (0,1)$, takav da vrijedi

$$f(A+h) = f(A) + \nabla f(A) \cdot h + \frac{1}{2} h^T \mathbf{H} f(A + \xi h)h \ . \tag{1.6.5}$$

Uvedemo li oznake $X = A+h$ i izračunamo li Hessijan u tački A, izraz (1.6.5) predstavlja polinomijalnu aproksimaciju funkcije f.

Definicija 1.6.3

Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dva puta neprekidno diferencijabilna na nekoj otvorenoj kugli oko tačke A. Funkciju

$$P_2(X) = f(A) + \nabla f(A)(X-A) + \frac{1}{2}(X-A)^T \mathbf{H} f(A)(X-A) \ ,$$

nazivamo Taylorov polinom drugog reda, funkcije f u tački A.

Primjer 1.24. Odredimo Taylorov polinom drugog reda za funkciju $f(x,y) = e^{-2x+y}$, u tački $(0,0)$.

Kao prvo, nalazimo

$$\nabla f(x,y) = \left(-2e^{-2x+y}, e^{-2x+y}\right) \ \text{ i } \ \mathbf{H} f(x,y) = \begin{bmatrix} 4e^{-2x+y} & -2e^{-2x+y} \\ -2e^{-2x+y} & e^{-2x+y} \end{bmatrix} \ ,$$

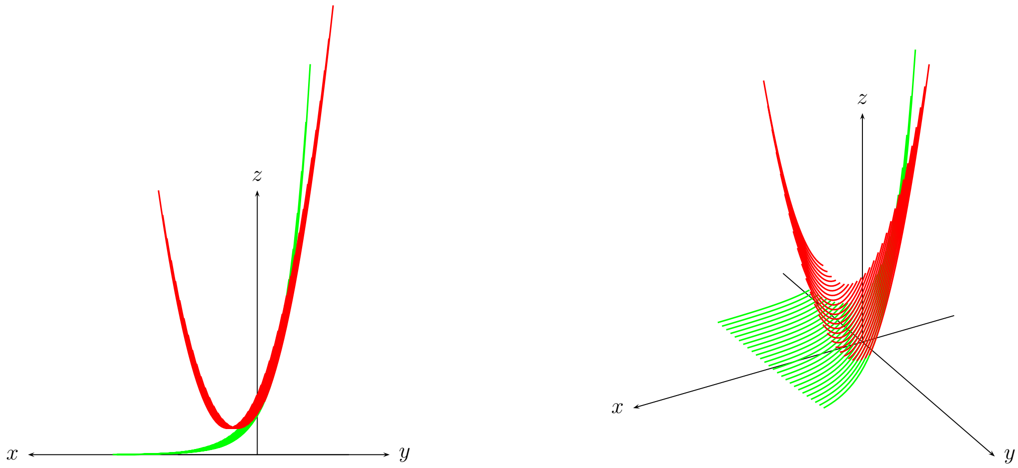
odnosno

$$\nabla f(0,0) = (-2,1)\ ,\ \mathbf{H}f(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\ .$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
P_2(x,y) &= f(0,0) + \nabla f(0,0)\cdot(x,y) + \frac{1}{2}[x\ y]\mathbf{H}f(0,0)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= 1 + (-2,1)\cdot(x,y) + \frac{1}{2}[x\ y]\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= 1 - 2x + y + \frac{1}{2}[x\ y]\begin{bmatrix} 4x-2y \\ -2x+y \end{bmatrix} \\
&= 1 - 2x + y + \frac{1}{2}(4x^2 - 2xy - 2xy + y^2) \\
&= 2x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 2xy - 2x + y + 1\ .
\end{aligned}$$

Svrha Taylorovog polinoma je da se funkcija njime dovoljno dobro aproksimira u okolini neke tačke. Na slici (1.2) dat je prikaz te aproksimacije iz dva ugla posmatranja, da bi se bolje uočila istaknuta aproksimacija u tački (0,0). $\diamondsuit$



Slika 1.2: Aproksimacija funkcije $f(x,y) = e^{-2x+y}$ (zelena) u tački (0,0), Taylorovim polinomom $P_2(x,y) = 2x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 2xy - 2y + y + 1$ (crvena)

U dijelu linearne algebre, koga smo izučavali ranije, upoznali smo pojam *simetrične matrice*, tj. kvadratne matrice $M = [a_{ij}]_{n\times n}$ za koju vrijedi

$$M = M^T\ ,$$

ili za čije elemente vrijedi $a_{ij} = a_{ji}$.

Primjer 1.25. Matrica

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} ,$$

primjer je simetrične matrice, a matrica

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} ,$$

je primjer nesimetrične matrice. $\diamondsuit$

Ako je $f \in C^2$, tada na osnovu Teorema (1.6.1), imamo da su mješoviti izvodi jednaki, tj.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} ,$$

a to će onda na osnovu definicije Hessijana značiti da je za svaku dva puta neprekidno diferencijabilnu funkciju, njen Hessijan simetrična matrica.

Neka je sada M proizvoljna simetrična matrica reda $n \times n$. Za proizvoljnu matricu vrstu x (možemo reći i vektor $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$), definišimo funkciju $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na sljedeći način

$$q(x) = x^T M x \ . \tag{1.6.6}$$

Funkcija q je polinom drugog reda po promjenljivima $x_1, x_2, ..., x_n$ i nazivamo je *kvadratna forma* po promjenljivima $x_1, x_2, ..., x_n$, a matricu M nazivamo *matrica kvadratne forme* q.

Primjer 1.26. Neka je

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

Kvadratnu formu dobijamo iz (1.6.6),

$$q_2(x) = x^T M x = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [x_1+2x_2 \ 2x_1+x_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2+x_2^2+4x_1x_2 \ .$$

Za matricu

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} ,$$

kvadratna forma glasi

$$q_3(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \ .$$

$\diamondsuit$

Definicija 1.6.4

Za kvadratnu formu $q(x) = x^T Mx$ kažemo da je

- pozitivno poludefinitna, ako je za svako $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, zadovoljeno $q(x) \geq 0$.
- pozitivno definitna, ako je za svako $x \neq 0$, zadovoljeno $q(x) > 0$.
- negativno poludefinitna, ako je za svako $x \in \mathbb{R}^n$, zadovoljeno $q(x) \leq 0$.
- negativno definitna, ako je za svako $x \neq 0$, zadovoljeno $q(x) < 0$.
- indefinitna ili promjenljivog znaka, ako postoje $x', x'' \in \mathbb{R}^n$, tako da je $q(x') > 0$ i $q(x'') < 0$.

Ako je $q(x) = 0$, često kažemo da je kvadratna forma nedefinitna u toj tački.

Primjer 1.27. Kvadratnu formu q_2 iz gornjeg primjera gdje je

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} ,$$

možemo zapisati

$$q_2(x) = (x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2 ,$$

pa za $x = (1, 0)$ imamo $q_2(x) = 1 > 0$, a za $x = (1, -1)$ imamo $q_2(x) = -2 < 0$. Na osnovu definicije, kvadratna forma q_2 je indefinitna.

Kvadratnu formu q_3 možemo nakon malo računa zapisati sa

$$q_3(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_1 - 2x_2)^2 + x_3^2 ,$$

pa je očigledno ova kvadratna forma pozitivno definitna (kao suma kvadrata) odnosno, za svako $x = (x_1, x_2, x_3) \neq 0$ je $q_3(x) > 0$. $\diamondsuit$

Kao što ćemo uskoro vidjeti, od velikog je interesa imati način određivanja definitnosti neke kvadratne forme. Najjednostavniji način bio bi obrazovati tu kvadratnu formu, a onda je svesti na neki "pogodan" oblik iz koga "lagano" možemo ocijeniti njenu definitnost (ovo smo primjenili u posljednjem primjeru). Nađimo taj način u za nas važnom slučaju 2×2 matrice. Neka je zadata simetrična matrica

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} .$$

Kvadratna forma određena ovom matricom je

$$q(x,y) = [x\ y]\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2 \ .$$

Ako je $a \neq 0$, poznatim postupkom svođenja trinoma na kanonski oblik dobijamo

$$\begin{aligned} q(x,y) &= a\left(x^2 + \frac{2b}{a}xy + \frac{c}{a}y^2\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 - \frac{b^2}{a^2}y^2 + \frac{c}{a}y^2\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}y^2 \\ &= a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{det(M)}{a}y^2 \ . \end{aligned}$$

Sada imamo diskusiju:

1. Ako je $a > 0$ i $det(M) > 0$, tada je za svako $(x,y) \neq (0,0)$, $q(x,y) > 0$, tj. kvadratna forma je pozitivno definitna.

2. Ako je $a < 0$ i $det(M) > 0$, tada je za svako $(x,y) \neq (0,0)$, $q(x,y) < 0$, tj. kvadratna forma je negativno definitna.

3. Ako je $det(M) < 0$, tada u tačkama $(x,y) = (1,0)$ i $(x,y) = (-\frac{b}{a}, 1)$ imamo različite znakove kvadratne forme, pa je ona indefinitna.

4. Ako je $det(M) = 0$, tada imamo

   $$q(x,y) = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 \ .$$

   Ako je $x = -\frac{b}{a}y$, onda je $q(x,y) = 0$, a u svim ostalim slučajevima ona uzima znak koga ima parametar a. Dakle, $q(x,y)$ je ili pozitivno ili negativno poludefinitna.

Jasno nam je da bi ovakav postupak određivanja definitosti kvadratnih formi, određenih matrica viših dimenzija, bio poprilično težak posao. Zato sljedećim teoremom dajemo veoma jednostavan kriterij za utvrđivanje definitnosti kvadratne forme.

Teorem 1.6.3: Sylvesterov kriterijum

Neka je

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} ,$$

proizvoljna kvadratna matrica koja određuje kvadratnu formu $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Označimo sa A_i $(i = 1, 2, ..., n)$ glavne minore matrice M, tj.

$$A_1 = a_{11} \ , \ A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \ , \ \cdots \ , \ A_n = det(M) \ .$$

Kvadratna forma q je pozitivno definitna ako i samo ako su svi glavni minori pozitivni, tj. ako vrijedi

$$A_1 > 0 \ , \ A_2 > 0 \ , \ \cdots \ , \ A_n > 0 \ .$$

Kvadratna forma je negativno definitna ako i samo ako su glavni minori alternativnih znakova, tako da je $A_1 < 0$, tj. ako vrijedi

$$A_1 < 0 \ , \ A_2 > 0 \ , \ A_3 < 0 \ , \ A_4 > 0 \ , \ \cdots$$

Uobičajeno je i za matricu M reći da je pozitivno definitna, negativno definitna ili indefinitna kad god je takva kvadratna forma koja je njome određena.

Primjer 1.28. Za matricu

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} ,$$

glavni minori su $A_1 = 2 > 0$, $A_2 = 9 > 0$ i $A_3 = det(M) = 9 > 0$, pa je kvadratna forma određena ovom matricom pozitivno definitna.

Za matricu

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} ,$$

glavni minori su $A_1 = -2 < 0$ i $A_2 = det(M) = 7 > 0$, pa je kvadratna forma negativno definitna.

Za matricu

$$M = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} ,$$

glavni minori su $A_1 = -3 < 0$ i $A_2 = det(M) = -7 < 0$, pa je kvadratna forma indefinitna. $\diamondsuit$

1.7 Diferencijali višeg reda

Neka je u oblasti D definisana funkcija $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ koja ima neprekidne parcijalne izvode do n-tog reda. Ranije smo vidjeli da totalni diferencijal ima oblik

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n \ ,$$

gdje su dx_i $(i = 1, 2, ..., n)$ priraštaji, odnosno diferencijali nezavisnih promjenljivih. Totalni diferencijal drugog reda ili kraće diferencijal drugog reda, definiše se kao diferencijal prvog diferencijala, tj. $d^2 f = d(df)$.

$$d^2 f = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\right) \ .$$

Kako je $d(dx_i) = 0$ za svako $i = 1, 2, ..., n$, to sada imamo:

$$d^2 f = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)dx_1 + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)dx_2 + ... + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)dx_n \ ,$$

odakle sada primjenjujući formulu za diferencijal funkcije imamo

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}dx_1^2 + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}dx_n^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1 dx_2 + ... + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}\partial x_n}dx_{n-1}dx_n \ .$$

Ovaj postupak možemo generalizovati na diferencijale proizvoljnog reda, tj. imamo

$$d^{n+1} f = d(d^n f) \ , \ n \in \mathbb{N} \ .$$

Specijalno, za funkciju dvije varijable $f(x, y)$, drugi diferencijal je dat sa

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dxdy \ .$$

Primjer 1.29. Odrediti drugi diferencijal funkcije $f(x, y) = x^3y^2 - x^2y + 2xy - 3x + 4$. Određujemo prve parcijalne izvode:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 - 2xy + 2y - 3 \ , \ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - x^2 + 2x \ .$$

Drugi parcijalni izvodi su:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2 - 2y \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x^2y - 2x + 2 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x^2y - 2x + 2 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3 \ .$$

Konačno, izraz za drugi diferencijal je,

$$d^2f(x,y) = (6xy^2 - 2y)dx^2 + 2(6x^2y - 2x + 2)dxdy + 2x^3dy^2 \ .$$

$\diamondsuit$

Primjer 1.30. Odrediti drugi diferencijal funkcije $g(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z$.

Prvi parcijalni izvodi su:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \cos x \ , \ \frac{\partial g}{\partial y} = \cos y \ , \ \frac{\partial g}{\partial z} = \cos z \ .$$

Drugi parcijalni izvodi su:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\sin x \ , \ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\sin y \ , \ \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = -\sin z$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y} = 0 \ .$$

Dakle, drugi diferencijal je

$$d^2g = -\sin x dx^2 - \sin y dy^2 - \sin z dz^2 \ .$$

$\diamondsuit$

1.8 Ekstremi funkcija više promjenljivih

Sada ćemo naš rad iz prethodnih sekcija primjeniti na problem nalaženja minimalne i maksimalne vrijednosti funkcija više varijabli. Primjetit ćemo da je tehnika određivanja ekstremnih vrijednosti funkcije više varijabli veoma slična tehnici koju smo izučavali kod funkcija jedne varijable.

Definicija 1.8.1

Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definisana na skupu D_f. Kažemo da funkcija f ima maksimalnu vrijednost M u tački X_0, ako je $f(X_0) = M$ i za sve $X \in D_f$ vrijedi $f(X) \leq M$.
Kažemo da funkcija f ima minimalnu vrijednost m u tački X_0, ako je $f(X_0) = m$ i za sve $X \in D_f$, vrijedi $f(X) \geq m$.

Često maksimalnu i minimalnu vrijednost funkcije, uvedene gornjom definicijom, nazivamo *globalni maksimum* i *globalni minimum*, za razliku od pojmova lokalni maksimum i minimum, koje uvodimo sljedećom definicijom.

Definicija 1.8.2

Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definisana na otvorenom skupu U. Kažemo da funkcija f ima lokalnu maksimalnu vrijednost M u tački X_0, ako je $f(X_0) = M$ i za sve $X \in B(X_0, r)$, za neko $r > 0$, vrijedi $f(X) \leq M$. Kažemo da funkcija f ima lokalnu minimalnu vrijednost m u tački X_0, ako je $f(X_0) = m$ i za sve $X \in B(X_0, r)$, za neko $r > 0$, vrijedi $f(X) \geq m$.

Često ćemo upotrebljavati i termin *globalni ekstrem* ili *globalna ekstremna vrijednost*, bilo da govorimo o globalnom maksimumu ili globalnom minimumu, a takođe i lokalni ekstrem ili *lokalna ekstremna vrijednost*, kada govorimo o lokalnom maksimumu ili minimumu.

Teorem 1.8.1: Teorem o ekstremnoj vrijednosti

Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neprekidna na nekom otvorenom skupu U. Ako je D ograničen i zatvoren podskup skupa U, tada funkcija f dostiže maksimalnu i minimalnu vrijednost na skupu D.

Sa gornjom teoremom imamo odličan rezultat koji nam govori o egzistenciji ekstremne vrijednosti funkcije, ali ne i kako locirati tu vrijednost. Naš sljedeći posao je pronaći kriterije za lociranje tačaka koje su kandidati u kojima će se postizati ekstremne vrijednosti, a onda i kriterije za njihovu klasifikaciju, tj. da li se u njima postiže ili ne postiže ekstrem i ako se postiže, koja je vrsta ekstrema, maksimum ili minimum.

Primjer 1.31. Ispitati postojanje i odrediti globalnu ekstremnu vrijednost funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$ na skupu $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + 4y^2 \leq 4\}$.

Kako je skup D ograničen i zatvoren, a funkcija f neprekidna na $\mathbb{R}^2$, na osnovu Teoreme 1.8.1 zaključujemo da funkcija ima i maksimum i minimum na skupu D. $\diamondsuit$

1.8.1 Nalaženje lokalnog ekstrema

Za početak, posmatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ koja je diferencijabilna na otvorenom skupu U i koja ima ekstrem u tački X_0. Neka je u proizvoljan jedinični vektor, tada će očigledno, funkcija $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definisana sa

$$\varphi(t) = f(X_0 + tu) \ ,$$

takođe imati ekstremnu vrijednost i to upravo za $t = 0$. Kako je φ funkcija jedne varijable, to onda mora biti

$$\varphi'(0) = 0 \ . \tag{1.8.1}$$

Ali u sekciji 1.1 smo vidjeli da ovaj izvod nije ništa drugo do izvod funkcije f u pravcu vektora u, tj.

$$\varphi'(0) = D_u f(X_0) \ . \tag{1.8.2}$$

Zaključujemo da vrijedi,

$$\varphi'(0) = D_u f(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot u = 0 \ .$$

Skalarni produkt jednak je nuli ako je jedan od vektora tog produkta nula-vektor ili ako su vektori ortogonalni. Ortogonalnost otpada jer gornje vrijedi za proizvoljan jedinični vektor u. Koristeći proizvoljnost vektora u, uzmimo specijalno vektore baze. Tada imamo

$$\nabla f(X_0) \cdot e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = 0 \ ,$$

za $i = 1, 2, ..., n$. Ovo znači da mora biti $\nabla f(X_0) = 0$. Primjetimo da ovo znači i to da je nagib grafa funkcije f jednak 0 u tački X_0, u pravcima svih baznih vektora. Međutim, to znači mnogo više naime, nagib grafa je 0 u svim pravcima u jer je $D_u f(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot u$. Ovo razmatranje sumiramo teoremom.

Teorem 1.8.2

Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencijabilna na otvorenom skupu U i neka ima lokalnu ekstremnu vrijednost u tački $X_0 \in U$, tada je $\nabla f(X_0) = 0$.

Kako je totalni diferencijal funkcije jednak umnošku gradijenta i diferencijala argumenta, tj.

$$df(X) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(X)dx_2 + \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}(X)dx_n = \nabla f(X) \cdot dX \ ,$$

to onda za diferencijabilnu funkciju koja ima ekstremnu vrijednost u tački X_0, vrijedi

$$df(X_0) = 0 \ ,$$

a takvu situaciju smo imali i kod funkcije jedne varijable jer je neophodan uslov bio $f'(x) = 0$, a vrijedilo je $df(x) = f'(x)dx$. Teorem 1.8.2 nam daje neke od tačaka koje su kandidati za ekstreme, ali ne i sve. Naime, vrijedi.

Teorem 1.8.3

[**Potrebni uslovi za ekstrem**] Ako funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ima ekstrem u tački X_0, tada vrijedi, ili je $\nabla f(X_0) = 0$ ili prvi parcijalni izvodi funkcije u tački X_0 ne postoje.

Dakle, kandidati za ekstremnu vrijednost su sve one tačke u kojima je gradijent jednak 0 i sve one u kojima funkcija nije diferencijabilna. Ovo nas navodi da ove tačke definišemo precizno.

Definicija 1.8.3

Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u tački X_0 i neka je $\nabla f(X_0) = 0$. Tada tačku X_0 nazivamo stacionarnom tačkom funkcije f.
Tačke u kojima funkcija f nije diferencijabilna, nazivamo singularnim tačkama funkcije f.

Često se za obje gore pomenute vrste tačaka kaže da su *kritične tačke* funkcije.

Primjer 1.32. Funkcija $f(x, y) = x^2 + y^2$ je diferencijabilna funkcija na $\mathbb{R}^2$ i $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$. Jedine kandidate za ekstremne vrijednosti dobijamo rješavanjem sistema

$$\begin{aligned} 2x &= 0 \\ 2y &= 0 \end{aligned}$$

Dakle, jedina kritična tačka je stacionarna tačka $X_0(0, 0)$. $\diamondsuit$

Primjer 1.33. Za funkciju $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, gradijent je

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) .$$

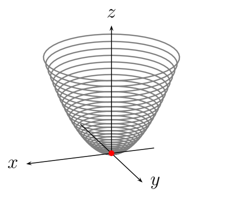
Parcijalni izvodi ne postoje u tački $X_0(0, 0)$ i to je jedina kritična tačka funkcije f, i ona je singularna tačka. $\diamondsuit$

Primjer 1.34. Funkcija $f(x, y) = x^2 - y^2$ ima gradijent $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$, pa je jedina kritična tačka, stacionarna tačka $X_0(0, 0)$. $\diamondsuit$

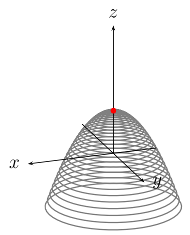
Primjer 1.35. Funkcija $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ je diferencijabilna i $\nabla f(x, y) = (-2x, -2y)$. Rješavanjem sistema

$$\begin{aligned} -2x &= 0 \\ -2y &= 0 \end{aligned}$$

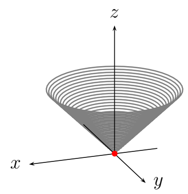
dobijamo stacionarnu tačku $X_0(0,0)$. $\diamondsuit$



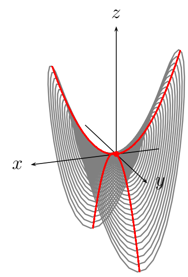
$f(x,y) = x^2 + y^2$
Minimum u (0,0)
$\nabla f(0,0) = (0,0)$



$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$
Maksimum u (0,0)
$\nabla f(0,0) = (0,0)$



$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
Minimum u (0,0)
f_x i f_y ne postoje



$f(x,y) = x^2 - y^2$
Nema ekstrema,
$\nabla f(0,0) = (0,0)$

Sada kada smo u mogućnosti utvrditi postojanje ekstremne vrijednosti funkcije (Teorem 1.8.1) i identifikovati kandidate za te vrijednosti (Teorem 1.8.3) ostaje nam pronaći kriterije za utvrđivanje da li ti kandidati jesu ekstremi i klasificirati ih. Prisjetimo se opet funkcija jedne varijable, da je jedan od kriterija za identifikaciju lokalnih ekstrema bio test drugog izvoda. Naime, ako je c bila stacionarna tačka funkcije $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tada ako je $\varphi''(c) > 0$, funkcija je imala minimum u c, a ako je $\varphi''(c) < 0$, funkcija je imala maksimum u tački c. Taylorov polinom nam na najvidljiviji način pokazuje zašto je to tako. Naprimjer, neka je c stacionarna tačka funkcije φ i neka je $\varphi''(c)$ neprekidna na otvorenom intervalu koji sadrži c, i neka je $\varphi''(c) > 0$. Tada za neko $\varepsilon > 0$, postoji interval $I = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ na kome je $\varphi''(c)$ neprekidna i $\varphi''(t) > 0$, za sve $t \in I$. Na osnovu Taylorove teoreme, za proizvoljno h, takav da je $|h| < \varepsilon$, postoji $s \in (c, c+h)$, takav da je

$$\varphi(c+h) = \varphi(c) + \varphi'(c)h + \frac{1}{2}\varphi''(s)h^2 \ . \tag{1.8.3}$$

Zbog stacionarnosti je $\varphi'(c) = 0$. Takođe smo imali $\varphi''(s) > 0$, pa koristeći to u (1.8.3) dobijamo da je za proizvoljno h, takav da je $|h| < \varepsilon$, zadovoljeno

$$\varphi(c+h) > \varphi(c) \ ,$$

a ovo znači da je u tački c lokalni minimum.

Veoma slično razmatranje sada možemo sprovesti i za funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Na osnovu Teorema 1.6.2 znamo da vrijedi formula

$$f(A+h) = f(A) + \nabla f(A) \cdot h + \frac{1}{2} h^T \mathbf{H} f(A + \xi h) h \ ,$$

gdje je f dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija u nekoj okolini tačke A i $\xi \in (0,1)$. Neka je sada A stacionarna tačka funkcije f i neka je Hesijan

$\mathbf{H}f(X)$ pozitivno definitna matrica u nekoj kugli $B(A,r)$. Tada je $\nabla f(A) = 0$, pa vrijedi

$$f(A+h) = f(A) + \frac{1}{2}h^T\mathbf{H}f(A+\xi h)h \ ,$$

a kako je još $A+\xi h \in B(A,r)$, to je kvadratna forma $h^T\mathbf{H}f(A+\xi h)h > 0$. te imamo

$$f(A+h) > f(A) \ ,$$

za proizvoljno h, tako da je $||h|| < r$. Ali ovo onda upravo znači da funkcija f ima lokalni minimum u tački A.
Istim argumentima bi rezonovali da smo pretpostavili negativnu definitnost Hesijana i naravno, zaključili bi da funkcija ima lokalni maksimum u tački A.
Ako je Hesijan indefinitan, to bi značilo da postoji proizvoljno malen h, tako da je kvadratna forma

$$h^T\mathbf{H}f(A+\xi h)h > 0 \ ,$$

i takođe proizvoljno malen h da je

$$h^T\mathbf{H}f(A+\xi h)h < 0 \ .$$

Ovo bi onda uzrokovalo da za neke proizvoljno malene h vrijedi $f(A+h) > f(A)$, a istovremeno za neke druge proizvoljno malene h je $f(A+h) < f(A)$. U ovom slučaju jasno je da u tački A ne može biti niti lokalni minimum niti lokalni maksimum. Tada bi tačka A predstavljala takozvanu *sedlastu tačku* funkcije f.

Teorem 1.8.4: Test druge derivacije

Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $f \in C^2(U)$, gdje je U otvoren skup. Ako je $A \in U$ stacionarna tačka funkcije f, tada je

1. $f(A)$ lokalni minimum funkcije f, ako je $\mathbf{H}f(A)$ pozitivno definitna matrica.

2. $f(A)$ lokalni maksimum funkcije f, ako je $\mathbf{H}f(A)$ negativno definitna matrica.

3. tačka A sedlasta tačka funkcije f, ako je $\mathbf{H}f(A)$ indefinitna matrica.

Ukoliko je $\mathbf{H}f(A)$ nedefinitna matrica, potrebna su dodatna ispitivanja za klasifikaciju tačke A.

Primjer 1.36. Odrediti lokalne ekstremne vrijednosti funkcije

$$f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}.$$

Nalazimo prvo gradijent

$$\nabla f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(y - 2x^2y, x - 2xy^2) \ .$$

Kako je $e^{-x^2-y^2} > 0$ za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, činjenica da je $\nabla f(x, y) = (0, 0)$, svodi se na sistem

$$\begin{aligned} y(1 - 2x^2) &= 0 \ , \\ x(1 - 2y^2) &= 0 \ . \end{aligned}$$

Prva jednačina će biti tačna ako je $y = 0$ ili $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ili $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ako je $y = 0$, onda iz druge jednačine vidimo da mora biti i $x = 0$, a time smo dobili prvu stacionarnu tačku $M_1(0, 0)$. Ako je $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, onda je druga jednačina zadovoljena ako je $1 - 2y^2 = 0$, odnosno ako je $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ili $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, pa na taj način dobijamo još četiri stacionarne tačke: $M_2(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $M_3(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $M_4(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ i $M_5(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Drugi korak u rješavanju problema ovog tipa je određivanje hesijana funkcije

$$\mathbf{H}f(x, y) = e^{-x^2-y^2} \begin{bmatrix} 4x^3y - 6xy & 4x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 1 \\ 4x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 1 & 4y^3yx - 6xy \end{bmatrix} .$$

Sada nakon kraćeg računa dobijamo

$$\mathbf{H}f(M_2) = \mathbf{H}f(M_5) = e^{-1} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} .$$

Kako je $A_1 = -2e^{-1} < 0$ i

$$A_2 = det \begin{bmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{bmatrix} = 4e^{-1} > 0 \ ,$$

na osnovu testa druge derivacuje zaključujemo da funkcija u tačkama M_2 i M_5 ima lokalni maksimum, i pri tome je $f(M_2) = f(M_5) = f_{\max} = \frac{1}{2}e^{-1}$.

Dalje imamo

$$\mathbf{H}f(M_3) = \mathbf{H}f(M_4) = e^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

Sada je $A_1 = 2e^{-1} > 0$ i

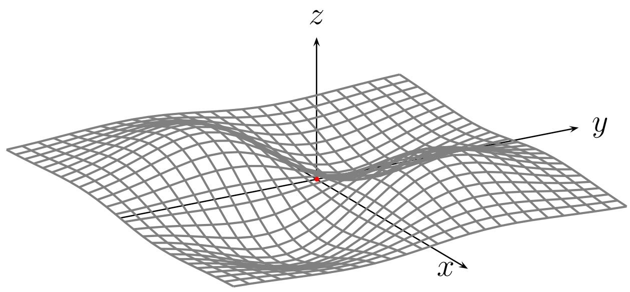
$$A_2 = det \begin{bmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{bmatrix} = 4e^{-1} > 0 ,$$

pa opet na osnovu testa druge derivacije zaključujemo da funkcija u tačkama M_3 i M_4 ima lokalni minimum i pri tome je $f(M_3) = f(M_4) = f_{\min} = -\frac{1}{2}e^{-1}$.

Ostala nam je još taǩa $M_1(0, 0)$ u kojoj je

$$\mathbf{H}f(M_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Sada je $A_1 = 0$ i $A_2 = -1$, pa je Hesijan indefinitan, a to znači da je tačka $M_1(0, 0)$ sedlasta tačka. $\diamondsuit$



Slika 1.3: Graf funkcije $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

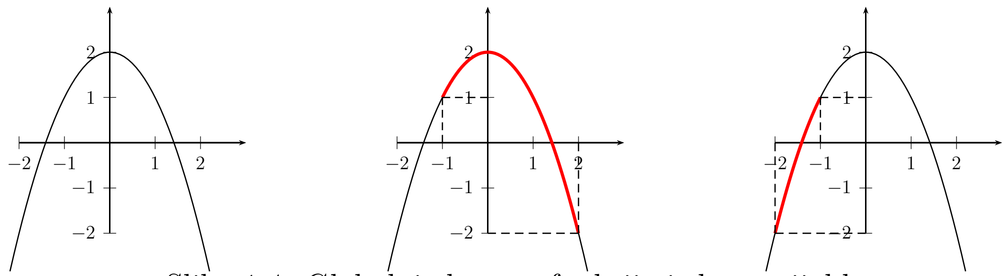
1.8.2 Nalaženje globalnog ekstrema

Posmatrajmo funkciju $f(x) = 2 - x^2$. Posmatramo li je na čitavom $\mathbb{R}$, ona ima lokalni maksimum u tački $x = 0$, koji je i globalni maksimum, a globalnog minimuma nema (slika lijevo). Ako je posmatramo na skupu $[-1, 2]$ i dalje je globalni maksimum u $x = 0$, ali sada je globalni minimum u tački $x = 2$ (slika u sredini). Ako je posmatramo za vrijednosti iz $[-2, -1]$, njen globalni minimum je u $x = -2$, a globalni maksimum je u $x = -1$ (slika desno). Dakle, globalni ekstrem funkcije direktno zavisi od područja na kom tu funkciju posmatramo.

Nešto slično imamo i kod funkcija više promjenljivih.

Primjer 1.37. Odrediti globalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2+y^2$ na skupu

$$D = \Big\{(x, y)|\ x^2 + 4y^2 \leq 4\Big\} .$$



Slika 1.4: Globalni ekstrem funkcije jedne varijable

Skup D je zatvoren i ograničen, pa na osnovu Teoreme 1.8.1, funkcija f dostiže svoju najmanju i najveću vrijednost.
Kako je funkcija diferencijabilna (kao polinomijalna funkcija), njene jedine kritične tačke su stacionarne tačke, koje dobijamo iz uslova

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y) = 0 \ .$$

U tački $(0,0)$ je moguć lokalni ekstrem funkcije ali moramo sada posmatrati šta se događa sa našom funkcijom na rubu oblasti D, tj. na skupu

$$\partial D = \Big\{(x,y)|\ x^2 + 4y^2 = 4\Big\} \ .$$

S obzirom da su na ∂D nezavisne varijable vezane relacijom $x^2 + 4y^2 = 4$, uvodeći polarne koordinate, tj. smjene $x(t) = 2\cos t$ i $y(t) = \sin t$, gje je $t \in [0, 2\pi]$, naša funkcija f postaje funkcija jedne varijable

$$\begin{aligned} g(t) = f(x(t), y(t)) &= f(2\cos t, \sin t) \\ &= 4\cos^2 t + \sin^2 t \\ &= 3\cos^2 t + 1 \ , \end{aligned}$$

gdje je $t \in [0, 2\pi]$. Ekstremne vrijednosti funkcije g će biti i ekstremne vrijednosti funkcije f. Zato posmatrajmo jednačinu

$$g'(t) = -6\cos t \sin t = 0 \ .$$

Stacionarne tačke će biti $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$, $t = \frac{3\pi}{2}$ i $t = 2\pi$. Dakle, pored tačke $(0,0)$ imamo još četiri kandidata za globalni ekstrem, a to su tačke $(2,0)$, $(0,1)$, $(-2,0)$ i $(0,-1)$, određene gornjim vrijednostima za t.
Izračunavajući sada vrijednost funkcije u svakoj od ovih pet tačaka, određujemo globalne ekstreme.

$$f(0,0) = 0 \ , \ f(2,0) = 4 \ , \ f(0,1) = 1 \ , \ f(-2,0) = 4 \ , \ f(0,-1) = 1 \ .$$

Upoređujući gornje vrijednosti, zaključujemo da funkcija f ima globalnu maksimalnu vrijednost 4 u tačkama $(2,0)$ i $(-2,0)$ i globalnu minimalnu vrijednost 0 u tački $(0,0)$. $\diamondsuit$

Kao što nam pokazuje upravo urađeni primjer, za funkciju zadatu na zatvorenoj i ograničenoj oblasti određivanje globalnih ekstrema se svodi na to da pronađemo lokalne ekstreme i ekstreme funkcije na rubu te oblasti, a onda određujemo šta će biti globalne ekstremne vrijednosti. Ako funkciju ne posmatramo na zatvorenoj i ograničenoj oblasti, onda se problem određivanja globalnih ekstrema svodi na to da pronađemo lokalne ekstreme, a onda nekom metodom ispitamo da li su oni ujedno i globalni ekstremi. Posmatrajmo sljedeći primjer.

Primjer 1.38. U nekoj firmi žele da naprave pravougaonu posudu bez krova, zapremine 500 m^3 i da pritome utroše što je manje moguće materijala.

Označimo sa x i y dužine stranica te posude u osnovi i sa z visinu te posude (sve veličine su izražene u metrima), tada u stvari treba pronaći minimalnu vrijednost funkcije

$$M'(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz \ ,$$

pri čemu zapremina mora biti $xyz = 500$. Izražavajući z iz ove jednakosti i uvrštavanjem u funkciju M', dobijamo funkciju

$$M(x,y) = xy + \frac{1000}{y} + \frac{1000}{x} \ ,$$

kojoj treba odrediti minimalnu vrijednost na beskonačnom pravougaoniku

$$R = \{(x,y) |\ x > 0 \ , \ y > 0\} \ .$$

Rješavanjem sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial x} &= y - \frac{1000}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial y} &= x - \frac{1000}{y^2} = 0 \end{aligned}$$

dobijamo jedinu stacionarnu tačku $A(10,10)$.
Hesijan funkcije M glasi

$$\mathbf{H}M(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{2000}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{2000}{y^3} \end{bmatrix} \ ,$$

odnosno

$$\mathbf{H}M(10,10) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \ .$$

Kako je $det(\mathbf{H}M(10,10)) = 3$, zaključujemo da je Hesijan pozitivno definitan, a to znači da funkcija M ima lokalni minimum u tački $A(10,10)$ i pri tome je

$$M_{\min} = M(10,10) = 10 \cdot 10 + \frac{1000}{10} + \frac{1000}{10} = 300 \ .$$

Ostaje nam ispitati da li je ovo i globalni minimum funkcije M?
Ako je bilo koja varijabla manja od jedan, tj. $0 < x < 1$ ili $0 < y < 1$, tada je $\frac{1000}{x} > 1000$, odnosno $\frac{1000}{y} > 1000$, pa je očigledno vrijednost funkcije M veća od 300. Ako je sada $x \geq 400$ i $y \geq 1$, onda je $xy \geq 400$, pa bi opet vrijednosti naše funkcije bile veće od 300 (analogno i slučaj $y \geq 400$ i $x \geq 1$). Dakle, ako posmatramo skup

$$D = \{(x,y) |\ 1 \leq x \leq 400\ ,\ 1 \leq y \leq 400\}\ ,$$

izvan skupa D vrijednosti funkcije M su veće od 300. Na skupu D naša funkcija ima globalni minimum u tački $(10,10)$, pa je to onda očigledno globalni minimum funkcije na čitavom skupu R.

Ostaje samo još zaključiti da je tada

$$z = \frac{500}{10 \cdot 10} = 5\ ,$$

odnosno da posuda treba biti dimenzija $10 \times 10 \times 5$, da bi imala odgovarajuću zapreminu i da bi imali minimalne troškove. $\diamondsuit$

1.8.3 Uslovni ekstrem

Primjer 1.38 ima neke sličnosti sa Primjerom 1.37. Naime, u oba primjera smo nalazili ekstremne vrijednosti funkcije pod restrikcijom na podskup koji je manje dimenzije. U prvom primjeru smo ekstremizirali funkciju $f(x,y) = x^2 + y^2$ sa restrikcijom na jednodimenzionalnoj elipsi $x^2 + 4y^2 = 4$. U drugom primjeru smo ekstremizirali funkciju tri varijable $M'(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$ sa restrikcijom na trodimenzionalnu površ $xyz = 500$.
U prvom smo primjeru problem riješili tako što smo parametrizovali elipsu, a zatim smo ekstremizirali funkciju jedne varijable. U drugom smo izrazili z kao funkciju od x i y, a zatim smo ekstremizirali funkciju dvije varijable. U ovoj sekciji ćemo dati generalni metod za rješavanje oba ova ali i drugih sličnih problema.

U osnovnom slučaju ekstremizacija, zadata je neka (diferencijabilna) funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ za koju želimo naći ekstremne vrijednosti. Taj problem smo rješavali nalaženjem svih kritičnih tačaka funkcije, a onda testom druge derivacije ispitivali karakter tih tačaka. Međutim, kao što smo vidjeli u Primjeru

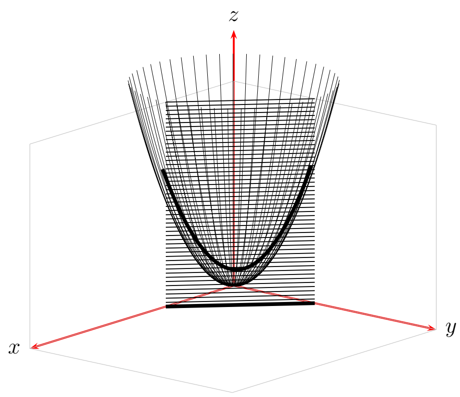
1.38, nekada treba izvršiti ekstremizaciju funkcije, pri čemu su nezavisne varijable te funkcije vezane nekim uslovom, tj. tražimo ekstremnu vrijednost funkcije $f(x_1, x_2, ..., x_n) = y$, pri uslovu $g(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$. Ovakvu vrstu ekstremizacije nazivamo *uslovna ekstremizacija*.

Primjer 1.39. Neka treba odrediti minimum funkcije $z = x^2 + y^2$ pri uslovu $x + y = 1$, tj.

$$x^2 + y^2 \longrightarrow min$$

$$x + y - 1 = 0 \ .$$

Očigledni minimum funkcije, bez uslova , je u tački $(0, 0)$ i vidimo da ta tačka ne zadovoljava uslov $x + y = 1$. Šta geometrijski predstavlja uslov u gornjem problemu?



Slika 1.5: Uslovni ekstrem

Graf funkcije $z = x^2 + y^2$ je paraboloid, a uslov $x + y = 1$ predstavlja jednačinu ravni u $\mathbb{R}^3$. Dakle, mi tražimo minimalnu vrijednost na paraboloidu ali samo u onim tačkama u kojima se sijeku paraboloid (ciljna funkcija) i ravan (uslovna funkcija). Sa slike vidimo da se traži minimum funkcije koja predstavlja parabolu u prostoru $\mathbb{R}^3$. Zaista, koristeći uslovnu funkciju, možemo izraziti jednu varijablu, npr. $y = 1 - x$, pa stavljajući to u izraz ciljne funkcije imamo,

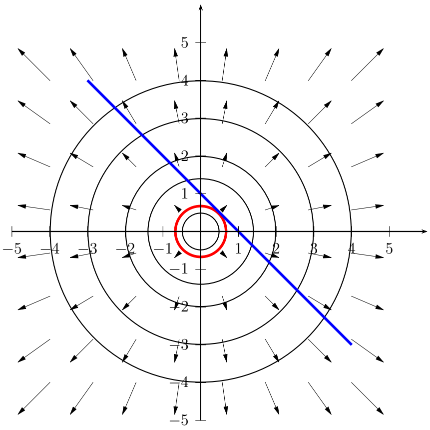
$$z = x^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 - 2x + 1 \ ,$$

a ovo je zaista jednačina parabole. Sada minimum ove funkcije nalazimo kao problem ekstremizacije funkcije jedne vaerijable. $z' = 4x - 2$, pa imamo jednu stacionarnu tačku $x_0 = \frac{1}{2}$. Kako je $z'' = 4$, dakle pozitivan, to u tački x_0 funkcija ima minimum. Izračunavajući $y_0 = 1 - x_0 = \frac{1}{2}$, zaključujemo da funkcija $z = x^2 + y^2$ ima minimum u tački $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, pri uslovu $x + y = 1$. $\diamondsuit$

Gornji primjer nam daje jedan metod za rješavanje problema uslovne ekstremizacije, ali jasno je da će primjena ovog metoda biti kudikamo složenija, za malo složenije uslovne funkcije. Zato nam je u interesu imati i neki drugi metod, a najopštiji od svih je tzv. *Lagrangeov metod*, koga ćemo sada izložiti.

Šta će biti motivacija za ovaj metod? Posmatrajmo ponovo gornji primjer i konturnu sliku grafova ciljne i uslovne funkcije (slika 1.6).

Nivo linije funkcije $z = x^2 + y^2$ predstavljaju koncentrične centralne kružnice ($x^2 + y^2 = k$), a uslovna funkcija zbog svog položaja (ortogonalna na xOy ravan), predstavljena je pravom linijom u xOy ravni. Na slici uočavamo da prava neke od konturnih linija siječe, neke nivo linije neće uopšte sjeći ali da samo jednu nivo liniju dodiruje. Strelice na slici nam pokazuju pravce rasta ciljne funkcije (gradijentni vektor u različitim tačkama), a time je onda određeno da nivo linije paraboloida bliže koordinatnom početku, odgovaraju manjim vrijednostima funkcije (u opštem slučaju ovo nije pravilo). Ovo onda znači da upravo ona nivo linija koja se dodiruje sa uslovnom funkcijom predstavlja bitan momenat. Naime, tačke na onim nivo linijama koje se ne sijeku sa uslovnom funkcijom i ne mogu biti kandidati za uslovne ekstreme, a jasno je da od momenta kada prava presječe jednu od nivo linija, sjeći će i svaku "veću" nivo liniju, pa dakle tu i nemožemo tražiti konačnu ekstremnu vrijednost.



Slika 1.6: Nivo linije funkcije $z = x^2 + y^2$ sa uslovnom funkcijom $x + y = 1$

Naravno, tražiti nivo liniju zadate površi koja će dodirivati uslovnu funkciju ne bi bio lagan posao. Zato se prisjetimo da je ugao između dvije krive koje se sijeku, jednak uglu između njihovih tangenti u presječnoj tački. Dakle, ako se dvije linije dodiruju, onda se njihove tangente u dodirnoj tački poklapaju, ili drugačije iskazano, vektori normala na tim tangentama su paralelni. Kako je gradijentni vektor upravo onaj vektor koji je ortogonalan na nivo liniju u proizvoljnoj tački, a uslov paralelnosti vektora je uslov njihove kolinearnosti, zaključujemo da mi treba da odredimo upravo one tačke $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

u kojima vrijedi

$$\nabla(x^2+y^2)=\lambda\nabla(x+y-1)\ .$$

Zbog paralelnog pomjeranja, takvih vektora bi bilo beskonačno mnogo. Međutim, mi tražimo tačke na uslovnoj krivoj koje to zadovoljavaju, tj. nalazimo tačke (x,y) koje zadovoljavaju

$$\nabla(x^2+y^2)=\lambda\nabla(x+y-1)\ \text{ i}$$

$$x+y-1=0\ .$$

Generalno, ako rješavamo problem

$$f(X)\ \longrightarrow\ ext$$

$$g(X)=0\ ,$$

rješenje će biti u onim tačkama $X(x_1,x_2,...,x_n)$ u kojima su zadovoljeni uslovi

$$\nabla f(X)=\lambda\nabla g(X) \tag{1.8.4}$$

$$g(X)=0\ . \tag{1.8.5}$$

Izloženi metod se naziva *Lagrangeov metod*, a nova varijabla $\lambda\in\mathbb{R}$ koja se pojavljuje u uslovu (1.8.4), naziva se *lagrangeov multiplikator*. Ako uvedemo funkciju

$$\Lambda(X,\lambda)=f(X)-\lambda g(X)\ , \tag{1.8.6}$$

koju nazivamo *Lagrangeova funkcija* ili *lagranžijan*, nije teško uočiti da su uslovi (1.8.4) i (1.8.5), ekvivalentni uslovu

$$\nabla\Lambda(X,\lambda)=0\ . \tag{1.8.7}$$

Zaista, nalazeći parcijalne izvode po promjenljivima x_i $(i=1,2,...,n)$ imamo

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}-\lambda\frac{\partial g}{\partial x_i}\ ,\ i=1,2,...,n\ .$$

Sada zbog (1.8.7), zaključujemo da je

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}-\lambda\frac{\partial g}{\partial x_i}=0\ ,$$

za sve $i\in\{1,2,...,n\}$, tj. vrijedi uslov (1.8.4).

Kako je

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda}=-g(X)\ ,$$

opet zbog (1.8.7) imamo

$$g(X) = 0 \ ,$$

odnosno uslov (1.8.5).

Na ovaj način smo praktično dali i opis postupka rješavanja uslovne ekstremizacije oblika

$$f(X) \ \longrightarrow \ ext$$
$$g(X) = 0 \ .$$

1. Prvo formiramo lagranžijan

$$\Lambda(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, ..., x_n) - \lambda g(x_1, x_2, ..., x_n) \ ,$$

2. Određujemo $\nabla\Lambda(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda)$.

3. Rješavamo jednačinu $\nabla\Lambda(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) = 0$, tj. sistem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Lambda}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda\frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \\
\frac{\partial\Lambda}{\partial x_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda\frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \\
..... & .. .. \\
\frac{\partial\Lambda}{\partial x_n} &= \frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda\frac{\partial g}{\partial x_n} = 0 \\
\frac{\partial\Lambda}{\partial \lambda} &= -g(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \ .
\end{aligned}$$

Rješenja posljednjeg sistema su stacionarne tačke lagranžijana i ostaje nam još samo utvrditi karakter tih tačaka.

Primjetimo odma, da će u pronađenim stacionarnim tačkama X^*, biti

$$\Lambda(X^*, \lambda) = f(X^*) \ ,$$

(jer je $g(X^*) = 0$) tj. ekstremi lagranžijana ujedno su i ekstremi naše ciljne funkcije. Zato za ispitivanje karaktera tih tačaka možemo primjeniti test druge derivacije ili ispitivanjem drugog diferencijala ciljne funkcije. Naime, ako je $d^2f(X^*) > 0$, imamo minimum, a ako je $d^2f(X^*) < 0$ imamo maksimum ciljne funkcije sa zadatim uslovom. Ako je $d^2f(X^*) = 0$, potrebna su dodatna ispitivanja za određivanje karaktera te tačke.

Primjer 1.40. Riješiti problem

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \ \longrightarrow \ ext$$

$$x + y = 1 \ .$$

Kao što smo rekli, formiramo prvo lagranžijan

$$\Lambda(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda(x + y - 1) \ ,$$

gdje je sa $g(x, y) = x + y - 1$ zadata uslovna funkcija.
U drugom koraku računamo gradijent lagranžijana

$$\nabla\Lambda(x, y, \lambda) = \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x}, \frac{\partial\Lambda}{\partial y}, \frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda}\right) = (2x - \lambda, 2y - \lambda, x + y - 1) \ .$$

Sada rješavamo sistem

$$\begin{aligned} 2x - \lambda &= 0 \\ 2y - \lambda &= 0 \\ x + y - 1 &= 0 \ . \end{aligned}$$

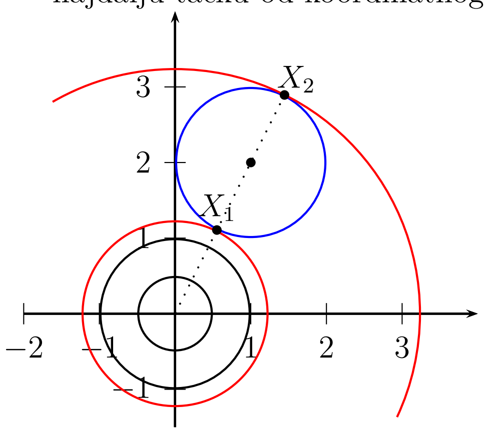
Iz prve dvije jednačine sistema imamo $2x = 2y$, tj. $x = y$, pa uvrštavajući to u treću jednačinu, dobijamo $x = y = \frac{1}{2}$ i za ove vrijednosti je $\lambda = 1$. Dakle, imamo jednu stacioarnu tačku $X_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

Posljedni korak je utvrđivanje karaktera tačke X_0. Računajući druge parcijalne izvode, imamo

$$d^2 f(X_0) = 2dx^2 + 2dy^2 \ ,$$

i vidimo da je $d^2 f(X_0) > 0$ (kao suma kvadrata), te dakle imamo minimum funkcije f, pri uslovu g, u tački $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, i on iznosi $f_{min} = \frac{1}{2}$. $\diamondsuit$

Primjer 1.41. Odrediti na kružnici $k: \ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ najbližu i najdalju tačku od koordinatnog početka.



Problem možemo riješiti jednostavno, povlačeći pravu određenu tačkama $(0, 0)$ i $(1, 2)$, i nalazeći njen presjek sa zadatom kružnicom. Riješimo problem ipak na "teži" način. Razmišljajmo ovako: ako opišemo centralnu kružnicu proizvoljnog poluprečnika r, onda ona na sebi sadrži sve one tačke koje su na istom odstojanju r od koodinatnog početka.

"Naduvajmo" neku malu centralnu kružnicu, sve do momenta njenog dodira sa zadatom kručnicom k. Tačka dodira će upravo biti najbliža tačka koordinatnom početku. Ako nastavimo "naduvavanje", kružnice će sjeći kružnicu k ali tu nemamo tačaka koje su najbliže ili najdalje jer su sve one dalje od prve dodirne tačke, a naduvavanjem dobijamo sve dalje i dalje tačke. Ovo naravno vrijedi do momenta kada ponovo dobijemo kružnicu koja dodirne kružnicu k (velika crvena kružnica).

Cijeli opisani postupak nas navodi da problem postavimo ovako: nađimo minimum i maksimum funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$ (to su centralne kružnice čije poluprečnike tražimo) pri uslovu $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ (na ovoj kružnici tražimo najbližu i najdalju tačku). Dakle, rješavamo

$$x^2 + y^2 \longrightarrow ext$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 \ .$$

Lagranžijan problema je $\Lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda((x-1)^2 + (y-2)^2 - 1)$, a njegov gradijent, $\nabla\Lambda = (2x - 2\lambda(x-1), 2y - 2\lambda(y-1), (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1)$. Rješavamo sistem

$$\begin{aligned} 2x - 2\lambda(x-1) &= 0 \\ 2y - 2\lambda(y-1) &= 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 &= 0 \ . \end{aligned}$$

Stacionarne tačke su $X_1\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}, 2 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ i $X_2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}, 2 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Prostom provjerom zaključujemo da funkcija u ovim tačkama ima najveću i najmanju vrijednost, odnosno da su to najdalja i najbliža tačka koordinatnom početku, na kružnici k.

Vratimo se na opasku "teži" način rješavanja. Postavimo problem da na proizvoljnoj liniji $g(x, y) = 0$ nađemo najbližu ili najdalju tačku od koordinatnog početka. Sada onaj "lakši" način uopšte nemožemo primjeniti, a ovaj "teži" funkcioniše. Dakle, on je univerzalnijeg karaktera i kao takav mnogo bolji način. Npr. naći na grafu funkcije $y = x^2 + x + 1$ tačku najbližu koordinatnom početku. $\diamondsuit$

U prethodna dva primjera vidjeli smo kako funkcioniše Lagrangeov metod, pri čemu smo imali samo jedno oganičenje, a time i jednu dodatnu varijablu problema. Naravno da ograničenja može biti i više, međutim metod se bitno neće mijenjati. Naime, neka je zadat problem sa dva ograničenja.

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \longrightarrow ext$$

$$h(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \ ,$$

$$g(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \ .$$

Formiramo lagranžijan, tako da svakom ograničenju pridružimo po jedan lagrangeov multiplikator,

$$\Lambda(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda, \mu) = f(x_1, x_2, ..., x_n) - \lambda h(x_1, x_2, ..., x_n) - \mu g(x_1, x_2, ..., x_n) \ .$$

Nalaženjem gradijenta lagranžijana, postavljamo sistem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial h}{\partial x_i} = 0 \ , \ i = 1, 2, ..., n \\
\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} &= g(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\
\frac{\partial \Lambda}{\partial \mu} &= h(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \ ,
\end{aligned}$$

čijim rješavanjem dobijamo stacionarne tačke problema. Kao i u slučaju jednog ograničenja, nekim od poznatih postupaka odredimo karakter stacionarnih tačaka.

U opštem slučaju, ako imamo k ograničenja $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, postupak je isti, a lagranžijan je

$$\Lambda(X, \lambda) = f(X) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(X) \ , \ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k) \ .$$

Primjer 1.42. Riješimo problem

$$f(x, y, z) = 4y - 2z \longrightarrow ext$$

$$2x - y - z - 2 = 0 \ ,$$
$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \ .$$

Za egzistenciju rješenja gornjeg problema pozivamo se na Teorem 1.8.1. Zaista, zbog drugog ograničenja, očigledno je da vrijedi $0 \leq x, y \leq 1$, a iz prvog ograničenja onda zaključujemo da je $-3 \leq z \leq 0$, pa je skup na kome tražimo ekstremne vrijednosti funkcije ograničen i zatvoren.

Lagranžijan glasi

$$\Lambda(x, y, z, \lambda, \mu) = 4y - 2z - \lambda(2x - y - z - 2) - \mu(x^2 + y^2 - 1) \ .$$

Nalazimo parcijalne izvode lagranžijana

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Lambda}{\partial x} &= -2\lambda - 2\mu x \\
\frac{\partial \Lambda}{\partial y} &= 4 - \lambda - 2\mu y \\
\frac{\partial \Lambda}{\partial z} &= -2 - \lambda \\
\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} &= -2x + y + z + 2 \\
\frac{\partial \Lambda}{\partial \mu} &= -x^2 - y^2 + 1 \ .
\end{aligned}$$

Sistem koga rješavamo ima pet nepoznatih (x, y, z, λ, μ) i pet jednačina

$$\begin{aligned}
-2\lambda - 2\mu x &= 0 \\
4 + \lambda - 2\mu y &= 0 \\
-2 + \lambda &= 0 \\
-2x + y + z + 2 &= 0 \\
-x^2 - y^2 + 1 &= 0 \ .
\end{aligned}$$

Iz treće jednačine direktno slijedi $\lambda = 2$. Ubacujući to u prvu i drugu jednačinu, dobijamo

$$x = -\frac{2}{\mu} \ , \ y = \frac{3}{\mu} \ .$$

Stavljajući ove rezultate u petu jednačinu, imamo

$$\frac{4}{\mu^2} + \frac{9}{\mu^2} = \frac{13}{\mu^2} = 1 \implies \mu = \pm\sqrt{13} \ .$$

Sada imamo dva slučaja. Za $\mu = \sqrt{13}$, $x = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ i $y = \frac{3}{\sqrt{13}}$. Iskoristimo li i četvrtu jednačinu, dobijamo $z = -2 - \frac{7}{\sqrt{13}}$. Time smo dobili prvu stacionarnu tačku

$$X_1(x, y, z, \lambda, \mu) = X_1(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, -2 - \frac{7}{\sqrt{13}}, 2, \sqrt{13}) \ .$$

Analogno, za slučaj $\mu = -\sqrt{13}$, dobijamo stacionarnu tačku

$$X_2(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, -2 + \frac{7}{\sqrt{13}}, 2, -\sqrt{13}) \ .$$

Lako se sada provjerava da u tački X_1 imamo maksimum

$$f_{max} = f(X_1) = 4 + \frac{26}{\sqrt{13}} \ ,$$

a minimum u tački X_2

$$f_{min} = f(X_2) = 4 - \frac{26}{\sqrt{13}} \ .$$

$\diamondsuit$