MATEMATIKA

Nermin Okičić
Vedad Pašić

# Metrički prostori

2016

MATEMATIKA

# Sadržaj

Poglavlje 1

# Metrički prostori



Iako možda svako od nas ima svoju predstavu o prostoru, svima je iz svakodnevnog života poznato šta znači prostor a šta rastojanje. Prostor uobičajeno shvatamo kao neko mjesto gdje se odigravaju događaji, a pod rastojanjem shvatamo najkraću dužina između dvije tačke. Prirodno u prostor postavljamo i koordinatni sistem, a u okviru njega biramo tačku za koju kažemo da "od nje počinje sve". Takođe je svima dobro poznato da se rastojanje između dvije tačke, u prostoru koji doživljavamo, određuje čuvenom Pitagorinom teoremom:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \ ,$$

gdje je $d$ traženo rastojanje, a $x_i, y_i$ i $z_i$ ($i \in \{1,2\}$), koordinate tačaka između kojih mjerimo rastojanje.
Sve je ovo "jednostavno" i dobro poznato iz svakodnevnog života, ali "jednostavan" je i prostor u kome živimo. To je samo jedan specijalan slučaj opšteg pojma prostora i načina mjerenja rastojanja.

U ovom dijelu ćemo se upoznati sa načinima i mogućnostima uvođenja veličine pomoću koje možemo mjeriti rastojanja između objekata proizvoljnog skupa, kao i pojmovima koji su direktno vezani za to.

## 1.1 Metrika i osobine

**Definicija 1.1.1**

Neka je $X$ proizvoljan neprazan skup. Za funkciju $d : X \times X \to \mathbb{R}$ kažemo da je metrika ili metrička funkcija na $X$ ako zadovoljava sljedeća četiri uslova:

M1. $(\forall x, y \in X)\ d(x, y) \geq 0$,

M2. $d(x, y) = 0$ ako i samo ako $x = y$,

M3. $(\forall x, y \in X)\ d(x, y) = d(y, x)$,

M4. $(\forall x, y, z \in X)\ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Tada kažemo da je skup $X$ snabdjeven metrikom $d$ i nazivamo ga metrički prostor. Elemente skupa $X$ nazivamo tačkama ili vektorima, a realan broj $d(x, y)$ nazivamo rastojanjem između tačaka $x$ i $y$.

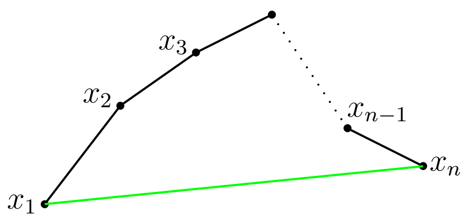
Dakle, metrički prostor je uređeni par $(X, d)$ koga čine skup $X$ i na njemu uvedena metrika $d$. Kratkoće radi, umjesto oznake $(X, d)$ mi ćemo za metrički prostor skoro uvijek koristiti jednostavno oznaku $X$, kad god je jasno o kojoj je metrici riječ.

Uslovi M1.-M4. nazivaju se aksiomi metrike, a pojedinačno to su *pozitivna definitnost* (M1.), *strogost* (M2.), *simetričnost* (M3.) i *nejednakost trougla* (M4.).

Osobina(M4.), tj. nejednakost trougla se može generalizovati pravilom mnogougla.

**Lema 1.** *U svakom metričkom prostoru* $(X, d)$ *vrijedi pravilo mnogougla, tj. za proizvoljne* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ $(n \geq 3)$*, vrijedi*

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)\ .$$




Slika 1.1: Pravilo mnogougla

U ispitivanju da li je neka funkcija, funkcija metrike na datom skupu, često su od velike važnosti sljedeće dvije nejednakosti.

**Teorem 1.1.1**

(Nejednakost Höldera)
Neka su $a_i$ i $b_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ proizvoljni realni ili kompleksni brojevi i neka je za realan broj $p > 1$, broj $q$ definisan sa $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tada za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left( \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} . \tag{1.1.1}$$

Specijalno, ako je $p = q = 2$, gornja nejednakost se naziva Cauchy-Schwarzova nejednakost.

**Teorem 1.1.2**

(Nejednakost Minkowskog)
Neka su $a_i$ i $b_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ proizvoljni realni ili kompleksni brojevi i neka je $p \geq 1$. Tada za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\left( \sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^{n} |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} . \tag{1.1.2}$$

Napomenimo da će i u (1.1.1) i u (1.1.2) vrijediti jednakosti ako su $a_i$ i $b_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ proporcionalni.

*Primjer* 1.1. Neka je $X$ proizvoljan skup i neka je za $x, y \in X$ zadato

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & ; \quad x = y \ , \\ 1 & ; \quad x \neq y \ . \end{cases}$$

Funkcija $d$ jeste metrika i $(X, d)$ nazivamo diskretni metrički prostor. $\diamondsuit$

*Primjer* 1.2. Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ sa rastojanjem

$$d(x, y) = |x - y| \ ,$$

predstavlja dobro nam poznati Euklidov prostor realne prave. $\diamondsuit$

*Primjer* 1.3. Sa $\mathbb{R}^n$ označavamo skup svih uređenih $n$-torki realnih brojeva $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Metriku možemo uvesti sa

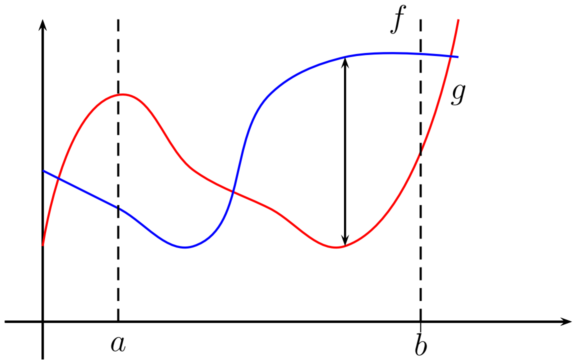
1. $d_p(x, y) = (\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^p)^{\frac{1}{p}}$ $(p \geq 1)$.
2. $d_2(x, y) = (\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$.
3. $d(x, y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$

Ovim primjerom opravdavamo činjenicu da je nekada neophodno koristiti definiciju metričkog prostora kao uređenog para, jer kao što vidimo, na istom skupu se mogu zadati različite metrike. $\diamondsuit$

*Primjer* 1.4. Sa $C[a, b]$ označavamo skup svih neprekidnih realnih funkcija na segmentu $[a, b]$. Ako uvedemo funkciju

$$d(f, g) = \sup_{a\leq t\leq b} |f(t) - g(t)| \ ,$$

za proizvoljne $f, g \in C[a, b]$, dobijamo metrički prostor neprekidnih funkcija, koga kraće uobičajeno pišemo samo sa $C[a, b]$. $\diamondsuit$




Slika 1.2: Metrika na $C[a, b]$

**Definicija 1.1.2**

Za skup $A$, podskup metričkog prostora $(X, d)$, kažemo da je ograničen ili omeđen ako je skup rastojanja među tačkama tog skupa ograničen skup, tj.

$$(\exists C > 0)(\forall x, y \in A)\ 0 \leq d(x, y) \leq C\ .$$

*Primjer* 1.5. Jedinični krug $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ je ograničen skup u $(\mathbb{R}^2, d_2)$. $\diamondsuit$

**Definicija 1.1.3**

Neka je $A$ podskup metričkog prostora $(X, d)$. Nenegativan broj

$$diamA = \sup\{d(x, y)|\ x, y \in A\}\ ,$$

nazivamo dijametrom skupa $A$.

Jasno je da ako vrijedi $diamA = \infty$, da je tada skup neograničen, tj. vrijedi,

**Lema 2.** *Skup je ograničen ako i samo ako mu je dijametar konačan.*

**Lema 3.** *Unija konačno mnogo ograničenih skupova je ograničen skup.*

**Definicija 1.1.4**

Neka je $(X, d)$ metrički prostor. Za proizvoljno $a \in X$ i za proizvoljno $r > 0$ skup

$$B(a, r) = \{x \in X|\ d(a, x) < r\}\ ,$$

nazivamo otvorena kugla u $X$, sa centrom u tački $a$, poluprečnika $r$.

Skup

$$K(x, r) = \{x \in X|\ d(a, x) \leq r\}\ ,$$

nazivamo zatvorena kugla sa centrom u $a$ i poluprečnika $r$, a skup

$$S(x, r) = \{x \in X|\ d(a, x) = r\}\ ,$$

nazivamo sfera sa centrom u $a$, poluprečnika $r$.

Uvođenjem pojma kugle, ograničenost skupa se može okarakterisati i na sljedeći način.

**Lema 4.** *Neka je $(X, d)$ metrički prostor i neka je $A \subseteq X$. Skup $A$ je ograničen ako i samo ako postoje $x \in X$ i $r > 0$, takvi da je $A \subseteq B(x, r)$.*

**Definicija 1.1.5**

Za skup $G$ podskup metričkog prostora $(X, d)$ kažemo da je otvoren ako vrijedi

$$(\forall x \in G)(\exists \varepsilon > 0)\ B(x, \varepsilon) \subseteq G\ .$$

**Definicija 1.1.6**

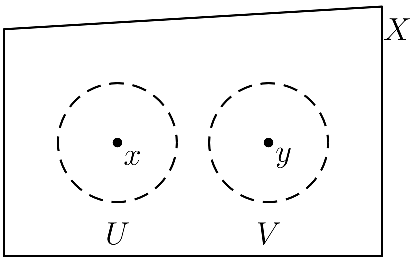
Skup je zatvoren ako je njegov komplement otvoren skup.

**Teorem 1.1.3**

Neka je $(X, d)$ metrički prostor. Kolekcija $\mathcal{T}$ svih otvorenih podskupova od $X$ ima slijedeće osobine.

1. $\varnothing,\ X \in \mathcal{T}$.
2. $U, V \in \mathcal{T}$ onda $U \cap V \in \mathcal{T}$.
3. $(\forall i \in I) O_i \in \mathcal{T} \ \Rightarrow\ \cup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.
4. $(\forall x, y \in X,\ x \neq y)(\exists U, V \in \mathcal{T})(x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \varnothing)$.

Familija $\mathcal{T}$ koja zadovoljava osobine 1., 2. i 3. naziva se topologija na $X$, a ako zadovoljava još i osobinu 4., naziva se Hausdorffova topologija na $X$.




Slika 1.3: U Hausdorffovom prostoru svake dvije tačke se mogu odvojiti otvorenim skupovima.

**Definicija 1.1.7**

Za skup $A$, podskup metričkog prostora $(X, d)$, kažemo da je okolina tačke $x \in X$, ako postoji otvoren skup $O$, takav da je

$$x \in O \subseteq A \ .$$

Uobičajeno u gornjoj definiciji umjesto bilo kog otvorenog skupa, zahtjevamo postojanje neke kugle, tako da je

$$x \in B(x, \varepsilon) \subseteq A \ .$$

Tako na realnoj pravoj, za skup $A$ kažemo da je okolina tačke $x$, ako postoji $\varepsilon > 0$, takav da je

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A \ .$$

*Primjer* 1.6. Skup $[2,4]$ je okolina tačke 3 jer $3 \in (\frac{5}{2}, \frac{7}{2}) \subset [2,4]$, ali nije okolina tačke 4 jer opisujući proizvoljan skup oblika $(4-\varepsilon, 4+\varepsilon)$ oko tačke 4, neće vrijediti $(4-\varepsilon, 4+\varepsilon) \subseteq [2,4]$. $\diamondsuit$

**Definicija 1.1.8**

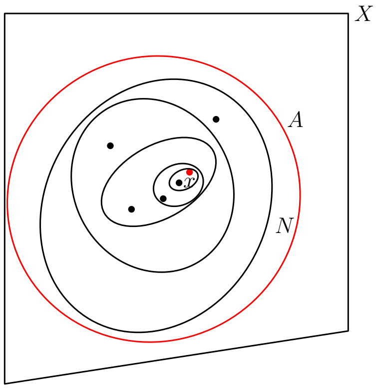
Neka je $(X, d)$ metrički prostor. Tačku $x \in A \subseteq X$ nazivamo izolovanom tačkom skupa $A$, ako postoji okolina tačke $x$ u kojoj osim tačke $x$ nema drugih tačaka iz skupa $A$.

*Primjer* 1.7. U skupu prirodnih brojeva svaka tačka je izolovana tačka. Zaista, za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$, opisujući okolinu $(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ oko tačke $n$, ona u sebi ne sadrži niti jedan drugi prirodan broj osim tačke $n$. $\diamondsuit$

**Definicija 1.1.9**

Tačka $x \in A$ je tačka nagomilavanja skupa $A$, ako se u svakoj okolini tačke $x$ nalazi bar jedna tačka skupa $A$ različita od $x$.
Skup svih tačaka nagomilavanja skupa $A$ nazivamo izvodni skup i označavamo ga sa $A'$.

*Primjer* 1.8. U skupu racionalnih brojeva svaka tačka je tačka nagomilavanja. Neka je $q \in \mathbb{Q}$ proizvoljan i neka je $(q-\varepsilon, q+\varepsilon)$ proizvoljna okolina tačke $q$ ($\varepsilon > 0$). Kako su tada $q$ i $q - \varepsilon$ realni brojevi, a zbog poznatog stava da između svaka dva realna broja se nalazi bar jedan racionalan broj, postoji $q_0 \in \mathbb{Q}$, takav da je $q - \varepsilon < q_0 < q$, tj. $q_0 \in (q-\varepsilon, q+\varepsilon)$. Dakle, u proizvoljnoj okolini racionalnog broja $q$ se nalazi bar jedan racionalan broj $q_0 \neq q$. $\diamondsuit$




Slika 1.4: Presjek proizvoljne okoline sa $A \setminus \{x\}$ je neprazan.

Ako skup sadrži sve svoje tačke nagomilavanja, on je onda zatvoren skup. Inače, ako skupu $A$ "dodamo" sve njegove tačke nagomilavanja, dobijamo novi skup koga nazivamo adherencija ili zatvorenje skupa, a označavamo ga sa $\overline{A}$. Pri tome dakle vrijedi

$$\overline{A} = A \cup A' \ .$$

## 1.2 Konvergencija u metričkim prostorima

**Definicija 1.2.1**

Neka je $(X, d)$ metrički prostor. Za niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ kažemo da konvergira ka $x_0 \in X$, ako vrijedi

$$d(x_n, x_0) \to 0 \ , \ (n \to \infty) \ .$$

Činjenicu da niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka tački $x_0$ uobičajeno zapisujemo sa $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ ili

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \ .$$

Gore definisanu konvergenciju nazivamo *konvergencija po metrici.* Osnovne karakteristike ove vrste konvergencije date su narednim tvrđenjima.

**Teorem 1.2.1**

U metričkom prostoru, konvergentan niz može konvergirati samo jednoj tački.

**Dokaz** : Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ za koga vrijedi $x_n \to x'$ i $x_n \to x''$ $(n \to \infty)$. Na osnovu relacije trougla imamo

$$0 \leq d(x', x'') \leq d(x', x_n) + d(x_n, x'') \ ,$$

za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$. Desna strana teži 0 kada $n \to \infty$, pa očigledno mora vrijediti $d(x', x'') = 0$, odnosno $x' = x''$. ■

**Teorem 1.2.2**

Svaki konvergentan niz je ograničen.

**Dokaz** : Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ i neka $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Uzimajući da je $\varepsilon = 1$, imamo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za svako $n \geq n_0$, vrijedi

$$d(x_n, x_0) < 1 \ .$$

Označimo sa $R' = \max\{d(x_0, x_1), d(x_0, x_2), ..., d(x_0, x_{n_0-1})\}$. Neka je sada $R = R' + 1$. Tada očigledno vrijedi

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \in B(x_0, R) \ ,$$

tj. niz je ograničen. ■

**Definicija 1.2.2**

Neka je $(X, d)$ metrički prostor. Za niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ kažemo da je Cauchyjev niz ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})(n, m \geq n_0 \ \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon) \ .$$

Drugačije rečeno, niz je Cauchyjev ako vrijedi

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0 \ .$$

**Teorem 1.2.3**

Svaki Cauchyjev niz je ograničen.

**Teorem 1.2.4**

Svaki konvergentan niz je Cauchyjev.

**Dokaz** : Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan niz i neka $x_n \to x$ $(n \to \infty)$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Na osnovu definicije konvergencije imamo

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}\right) .$$

Neka su sada $m, n \in \mathbb{N}$ i neka je $m, n \geq n_0$. Tada je

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon ,$$

a ovo znači da je niz Cauchyjev. ■

Da Cauchyjev niz nemora biti konvergentan, dovoljno je posmatrati niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$, gdje je $x_n$ decimalni zapis broja $\sqrt{2}$ na $n$ decimala.
Jasno je da niz nije konvergentan u $\mathbb{Q}$, tj. $x_n \to \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Međutim, očigledno je za $n > m$, $d(x_n, x_m) \leq \frac{1}{10^n} \to 0$ kada $n, m \to \infty$, tj. niz je Cauchyjev.

**Definicija 1.2.3**

Za metrički prostor u kome je svaki Cauchyjev niz konvergentan kažemo da je kompletan ili potpun metrički prostor.

Jednu važnu karakterizaciju kompletnosti dajemo sljedećom teoremom.

**Teorem 1.2.5**

Metrički prostor $(X, d)$ je kompletan ako i samo ako presjek proizvoljnog monotono opadajućeg niza zatvorenih kugli, čiji niz dijametara teži ka 0, sadrži tačno jednu tačku.

## 1.3 Kompaktnost u metričkim prostorima

**Definicija 1.3.1**

Neka je $M$ podskup metričkog prostora $X$. Za skup $M$ kažemo da je relativno kompaktan ako se iz svakog niza u $M$ može izdvojiti konvergentan podniz, tj.

$$(\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M)(\exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}})\ x_{n_k} \to x_0\ ,\ (k \to \infty)\ ,\ x_0 \in X\ .$$

Ako je pri tome $x_0 \in M$, kažemo da je $M$ kompaktan skup.

Jasna je razlika između kompaktnosti i relativne kompaktnosti. U relativnoj kompaktnosti zahtjevamo samo postojanje konvergentnog podniza i nije nam važno gdje se nalazi tačka konvergencije tog podniza, dok kod kompaktnosti ta tačka mora biti u samom skupu. Dakle, relativna kompaktnost i zatvorenost skupa ekvivalentne su kompaktnosti skupa.

**Teorem 1.3.1**

Svaki kompaktan metrički prostor je i kompletan.

**Dokaz** : Neka je $X$ kompaktan metrički prostor i neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan Cauchyjev niz u $X$. Zbog kompaktnosti, postoji podniz $(x_{n_k})$ našeg niza koji je konvergentan, $x_{n_k} \to x_0 \in X$ $(k \to \infty)$. Sada imamo

$$d(x_n, x_0) \le d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0)\ .$$

Prvi sabirak na desnoj strani možemo učiniti proizvoljno malim jer je niz Caucyjev, a drugi takođe, zbog konvergencije podniza. Dakle,

$$d(x_n, x_0) \to 0\ ,\ (n \to \infty)\ ,$$

tj. niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan, pa zbog proizvoljnosti niza, prostor $X$ je kompletan. ■

**Teorem 1.3.2**

Svaki kompaktan skup je zatvoren.

**Dokaz** : Neka je $M$ kompaktan skup i neka je $(x_n) \subset M$, takav da $x_n \to x_0$ kada $n \to \infty$. Zbog kompaktnosti skupa, postoji $(x_{n_k}) \subset (x_n)$, takav da $x_{n_k} \to x'$ $(k \to \infty)$ i pri tome je $x' \in M$. Zbog jedinstvenosti tačke konvergencije, zaključujemo da je $x_0 = x'$, odnosno $x_0 \in M$, pa dakle $M$ sadrži sve svoje tačke nagomilavanje te je kao takav, zatvoren skup. ■

**Teorem 1.3.3**

Svaki relativno kompaktan skup je ograničen.

**Dokaz** : Neka je $M$ relativno kompaktan podskup metričkog prostora $X$. Pretpostavimo da $M$ nije ograničen. $M$ nije prazan, pa postoji $x_0 \in M$. Kako $M$ nije ograničen, to $M$ nije sadržan u kugli $B(x_0, 1)$, te zaključujemo da postoji $x_1 \in M$, takav da $x_1 \notin B(x_0, 1)$ odnosno, $d(x_0, x_1) \geq 1$.
Označimo sa $r = d(x_0, x_1) + 1$, pa opet zbog neograničenosti rezonujemo da $M$ nije sadržan ni u kugli $B(x_0, r)$, tj. postoji $x_2 \in M$ takav da je $d(x_0, x_2) \geq r \geq 1$. Kako je

$$1 + d(x_0, x_1) = r \leq d(x_0, x_2) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) \ ,$$

zaključujemo da je $d(x_1, x_2) \geq 1$. Jasno je da sada ovaj postupak možemo produžiti i na taj način formirati niz $(x_n)$ sa osobino da za proizvoljne $n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi $d(x_n, x_m) \geq 1$. Ovo znači da se iz datog niza ne može izdvojiti niti jedan konvergentan podniz, a to se opet kosi sa pretpostavkom o relativnoj kompaktnosti skupa $M$. Dakle, $M$ mora biti ograničen skup. ■

Na osnovu Teorema 1.3.2 i Teorema 1.3.3, vidimo da u proizvoljnom metričkom prostoru kompaktnost skupa imlicira njegovu ograničenost i zatvorenost. U opštem slučaju, ograničenost i zatvorenost skupa ne dovode do njegove kompaktnosti, ali u nekim specijalnim slučajevima do toga ipak dolazi.

**Teorem 1.3.4**

U svakom konačno dimenzionalnom metričkom prostoru vrijedi, ako je skup ograničen i zatvoren, onda je on kompaktan.

**Definicija 1.3.2**

Neka su $M$ i $N$ podskupovi metričkog prostora $X$. Neka je $\varepsilon > 0$ fiksiran realan broj. Za skup $N$ kažemo da je $\varepsilon$-mreža skupa $M$ ako za svako $x \in M$, postoji $y \in N$, tako da je $d(x, y) < \varepsilon$.
Ako je $N$ kompaktan skup, kažemo da je $N$ kompaktna $\varepsilon$-mreža, a ako je konačan skup, kažemo da je konačna $\varepsilon$-mreža.

**Lema 5.** *Skup $N$ je $\varepsilon$-mreža ($\varepsilon > 0$) skupa $M$ ako i samo ako vrijedi*

$$M \subseteq \bigcup_{x \in N} B(x, \varepsilon) \ .$$

**Teorem 1.3.5**

Potreban uslov za relativnu kompaktnost skupa $M \subseteq X$ jeste da za svako $\varepsilon > 0$, postoji konačna $\varepsilon$-mreža skupa $M$. Ako je metrički prostor $X$ kompletan, gornji uslov je i dovoljan.

## 1.4 Neprekidne funkcije u metričkim prostorima

**Definicija 1.4.1**

Neka su $(X, d_X)$ i $(Y, d_Y)$ metrički prostori. Za preslikavanje $f : X \to Y$ kažemo da je neprekidno u tački $x_0 \in X$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in X)(d_X(x_0, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon) .$$

Preslikavanje je neprekidno na $X$ ako je neprekidno u svakoj tački $x \in X$.

**Teorem 1.4.1**

Neka su $(X, d_X)$ i $(Y, d_Y)$ metrički prostori i $f : X \to Y$. Sljedeća tvrđenja su ekvivalentna.

1. $f$ je neprekidna na $X$.
2. $(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$.
3. Za svaki otvoreni skup $V \subseteq Y$ je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u $X$.

Sljedeći teorem predstavlja važan alat u rješavanju ekstremalnih problema.

**Teorem 1.4.2**

Neprekidna funkcija na kompaktnom skupu je ograničena i dostiže svoju najveću i najmanju vrijednost.

**Dokaz** : Neka je $M$ kompaktan skup i neka je $f \in C(M)$. Ako pretpostavimo da $f$ nije ograničena, to bi značilo da postoji $(x_n) \subset M$, takav da

$$f(x_n) \to +\infty\ ,\ (n \to \infty) \tag{1.4.1}$$

(ili eventualno $f(x_n) \to -\infty$). Kako je $M$ kompaktan, postoji podniz $(x_{n_k})$ takav da $x_{n_k} \to x_0 \in M$ $(k \to \infty)$, a onda zbog neprekidnosti funkcije imamo

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0) < +\infty\ ,\ (k \to \infty)\ .$$

S druge strane, zbog (1.4.1) moralo bi biti

$$f(x_{n_k}) \to +\infty \ , \ (k \to \infty) \ ,$$

a to je očigledna kontradikcija. Dakle, $f$ je ograničena funkcija.

Sada zbog ograničenosti funkcije imamo da je

$$r = \sup_{x \in M} f(x) < +\infty \ .$$

Na osnovu definicije supremuma, postoji niz $(y_n) \subset M$, takav da je

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ f(y_n) > r - \frac{1}{n} \ ,$$

a ovo znači da $f(y_n) \to r$ $(n \to \infty)$. Ponovo zbog kompaktnosti skupa $M$, postoji $(y_{n_k}) \subset (y_n)$, takav da $y_{n_k} \to y_0 \in M$ $(k \to \infty)$. Ali tada bi imali

$$f(y_{n_k}) \to f(y_0) \ , \ (k \to \infty) \ ,$$

odnosno, zaključujemo $f(y_0) = r$. Dakle, funkcija dostiže svoju najveću vrijednost.
Na analogan način se pokazuje da funkcija dostiže i najmanju vrijednost, čime je teorem dokazan. ■

**Teorem 1.4.3**

Neprekidna funkcija na kompaktnom skupu je i uniformno neprekidna.

**Dokaz** : Neka je $M$ kompaktan skup i neka je $f$ neprekidna funkcija definisana na $M$. Pretpostavimo da $f$ nije uniformno neprekidna funkcija. Negacijom definicije uniformne neprekidnosti to bi značilo

$$(\exists \varepsilon_0 > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x'_n, x''_n) \left( d(x'_n, x''_n) < \frac{1}{n} \wedge |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon_0 \right) \ . \tag{1.4.2}$$

Na ovaj način su formirana dva niza $(x'_n)$ i $(x''_n)$ u $M$ iz kojih zbog kompaktnosti možemo izdvojiti konvergentne podnozove, tj. postoji $(x'_{n_k}) \subset (x'_n)$, takav da $x_{n_k} \to x'_0$ $(k \to \infty)$. Kako je

$$d(x'_{n_k}, x''_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \to 0 \ , \ (k \to \infty) \ ,$$

zaključujemo da tada mora vrijediti i $x''_{n_k} \to x'_0$ $(k \to \infty)$. Međutim, to bi zbog neprekidnosti funkcije $f$ značilo

$$|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \to 0 \ , \ (k \to \infty) \ ,$$

što je suprotno pretpostavci (1.4.2). ■

## 1.5 Normirani prostori

**Definicija 1.5.1**

Neka je $X$ linearan vektorski prostor, na kome je definisana funkcija $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, sa sljedećim osobinama

1. $(\forall x \in X)\ \ \|x\| \geq 0$.
2. Ako je $\|x\| = 0$, onda je $x = 0$.
3. $(\forall \lambda \in \Phi)(\forall x \in X)\ \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$.
4. $(\forall x, y \in X)\ \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Tada za funkciju $\|\cdot\|$ kažemo da je norma na $X$, a za $X$ kažemo da je normiran linearan vektorski prostor.

**Lema 6.** *Neka je $X$ normiran linearan vektorski prostor. Tada za proizvoljne $x, y \in X$ vrijedi*

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\| \ .$$

**Dokaz** : Neka su $x, y \in X$ proizvoljni. Iz relacije trougla imamo

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \ ,$$

odnosno,

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \ . \tag{1.5.1}$$

Prostom zamjenom uloga $x$ i $y$, dobijamo

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\| \ ,$$

ili

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \ . \tag{1.5.2}$$

Iz (1.5.1) i (1.5.2) dobijamo traženu nejednakost. ■

Definišimo sada pomoću norme, funkciju $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, na sljedeći način

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad , \quad x, y \in X \ .$$

Nije teško provjeriti da ovako definisana funkcija zadovoljava sve uslove Definicije 1.1.1, pa je na ovaj način uvedena metrika na $X$, za koju kažemo da je inducirana normom u datom prostoru. Samim tim imamo da je svaki normiran linearan vektorski prostor ujedno i metrički prostor, te sve što je rečeno za metričke prostore vrijedi i za normirane prostore.

## 1.6 Euklidovi prostori

Od ranije nam je poznat pojam uređene $n$-torke kao skupa od $n$ elemenata kod koga je redoslijed navođenja elemenata bitan. On nam omogućava definisanje Descartesov proizvod skupova. Neka su $X_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ proizvoljni skupovi. Sa

$$X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) |\ x_i \in X_i,\ i = 1, 2, ..., n\}\ ,$$

označavamo njihov Descartesov ili Cartezijev proizvod. Ako uzmemo da su svi skupovi jednaki tojest, $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$, koristimo oznaku $X^n$, a ako je još specijalno $X_i = \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, ..., n)$, gdje je $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva, koristimo oznaku

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) |\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., n\}\ .$$

Dakle, tačka $X \in \mathbb{R}^n$ predstavlja uređenu $n$-torku realnih brojeva $(x_1, x_2, ..., x_n)$, čije pojedinačne komponente nazivamo koordinatama te tačke. Uobičajeno koristimo notaciju $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ili prostije $X(x_1, x_2, ..., x_n)$. Za dvije tačke $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X(x_1, x_2, ..., x_n)$ i $Y(y_1, y_2, ..., y_n)$, kažemo da su jednake ako su im jednake odgovarajuće koordinate, $x_i = y_i$ za $i = 1, 2, ..., n$, i pišemo $X = Y$. U suprotnom su tačke različite, $X \neq Y$.

Kao što smo to ranije već vidjeli, na skupu $\mathbb{R}^n$ možemo definisati operacije sabiranja i množenja skalarom.

- Za $X(x_1, x_2, ..., x_n), Y(y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$X + Y \stackrel{def}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)\ .$$

- Za $X(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ i $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda \cdot X \stackrel{def}{=} (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)\ .$$

Sa ovako definisanim operacijama skup $\mathbb{R}^n$ postaje *linearan vektorski prostor* nad poljem skalara $\mathbb{R}$, a njegove elemente nazivamo *vektori*.

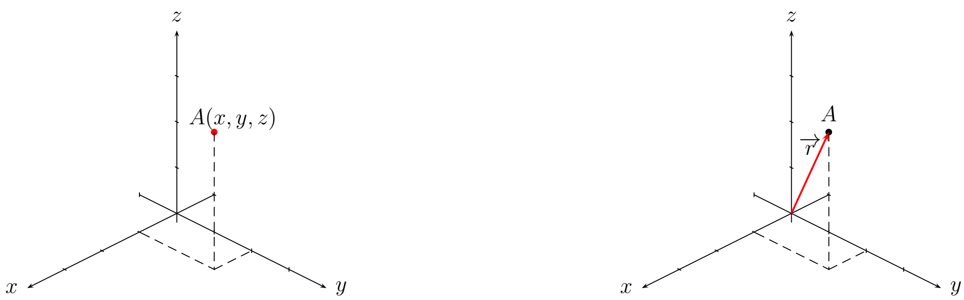
*Primjer* 1.9. Za $n = 2$ imamo linearan vektorski prostor $\mathbb{R}^2$ koji predstavlja dvodimenzionalni linearni vektorski prostor, a koji reprezentuje Cartesijevu ravan. Njegovi elementi su uređene dvojke $A = (x_1, x_2)$ $(x_1, x_2 \in \mathbb{R})$, a koje uobičajeno označavamo sa $A(x, y)$.

Sa uvedenim operacijama sabiranja i množenja skalarom, elemente ovog prostora nazivamo vektorima i uobičajeno ih označavamo sa $\overrightarrow{r} = (x, y)$. Ovakvu vrstu vektora nazivamo ort-vektor tačke $A(x, y)$. $\diamondsuit$


(a) Tačka u $\mathbb{R}^2$ (b) Ort-vektor u $\mathbb{R}^2$

Slika 1.5: Elementi prostora $\mathbb{R}^2$.

*Primjer* 1.10. Za $n = 3$ imamo linearan vektorski prostor $\mathbb{R}^3$ koji predstavlja trodimenzionalni linearni vektorski prostor. Njegovi elementi su uređene trojke $A = (x_1, x_2, x_3)$ $(x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R})$, a koje uobičajeno označavamo sa $A(x, y, z)$. Kao i $\mathbb{R}^2$ prostor i $\mathbb{R}^3$ uobičajeno predstavljamo u pravouglom Descartesovom koordinatnom sistemu i njegove elemente prikazujemo ili kao tačke $A(x, y, z)$ ili kao vektore $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$.




(a) Tačka u $\mathbb{R}^3$ (b) Ort-vektor u $\mathbb{R}^3$

Slika 1.6: Elementi prostora $\mathbb{R}^3$.

$\diamondsuit$

*Primjer* 1.11. Ako posmatramo kretanje nekog objekta u trodimenzionalnom prostoru, njegovu poziciju određuju četiri koordinate, $x$ (dužina), $y$ (širina), $z$ (visina) i $t$ (vrijeme). Dakle, lokaciju takvog objekta određuje tačka $A(x, y, z, t)$ koja se nalazi u $\mathbb{R}^4$ prostoru, a koju onda nažalost nismo u mogućnosti nacrtati. $\diamondsuit$

Kao što je napomenuto, elemente prostora $\mathbb{R}^n$ u kome su uvedene operacije sabiranja i množenja skalarom, nazivamo vektorima. Pri tome, neka su $\overrightarrow{r_1} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\overrightarrow{r_2} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, onda je

$$\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) ,$$

$$\lambda\overrightarrow{r_1} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) .$$

Kako oduzimanje vektora $\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}$ možemo shvatiti i kao $\overrightarrow{r_1} + (-1)\overrightarrow{r_2}$ tojest, kao kombinaciju definisanih operacija sabiranja i množenja skalarom, to onda imamo da je

$$\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, ..., x_n - y_n) \ .$$

*Primjer* 1.12. Neka su $\overrightarrow{r_1} = (1, -2, 3)$, $\overrightarrow{r_2} = (-2, 0, 4)$ vektori $\mathbb{R}^3$ prostora i $\lambda = 5$ skalar. Tada je

$$\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2} = (1 + (-2), -2 + 0, 3 + 4) = (-1, -2, 7) \ ,$$

$$\lambda\overrightarrow{r_1} = 5(1, -2, 3) = (5 \cdot 1, 5 \cdot (-2), 5 \cdot 3) = (5, -10, 15) \ ,$$

$$\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2} = (1 - (-2), -2 - 0, 3 - 4) = (3, -2, -1) \ .$$

$\diamondsuit$

Primjetimo da smo uveli sabiranje i oduzimanje elemenata u $\mathbb{R}^n$, ali nismo definisali množenje tih elemenata. U opštem slučaju ne postoji generalna forma za množenje vektora u bilo kom prostoru koja bi bila korisna za naše potrebe. Množenje vektora je definisano u specijalnom slučaju kada je $n = 1$, kao uobičajeno množenje brojeva. Takođe i u slučaju $n = 2$ ono se može generalizovati tako što tačke posmatramo kao tačke kompleksne ravni, a množenje kompleksnih brojeva smo definisali ranije. Nešto kasnije definisat ćemo množenje vektora u $\mathbb{R}^n$ za $n \geq 3$.

Mnoge veličine kao što su brzina, ubrzanje ili sila, ovise o svojoj "jačini" ali i o pravcu djelovanja. Naprimjer, možemo govoriti o sili koja djeluje na objekat koji se nalazi u koordinatnom početku, ali moramo spomenuti da je jačina sile 10 $N$ i da djeluje na tijelo pod uglom od, recimo 45° u odnosu na horizontanu ravan. Predstaviti ovu veličinu značilo bi nacrtati usmjerenu duž čija dužina bi predstavljala jačinu sile i koja djeluje po tačno određenom pravcu. Takve veličine nazivamo *vektori* ili *vektorske veličine* i razlikujemo ih od veličina koje su okarakterisane samo svojom "jačinom", koje nezivamo *skalarima* ili *skalarne veličine*. O tački $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ u prostoru $\mathbb{R}^n$ možemo razmišljati i kao o vektoru koji "kreće" iz koordinatnog početka, sa dužinom koja predstavlja rastojanje tačke koju taj vektor reprezentuje, od koordinatnog početka. Vidimo da za geometrijsku interpretaciju vektora moramo poznavati rastojanje između objekata datog prostora.

Neka su na $\mathbb{R}^n$ definisane sljedeće funkcije:
za $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ i $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ iz $\mathbb{R}^n$

$$d_2(x, y) = \left( \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ ; \ d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \ .$$

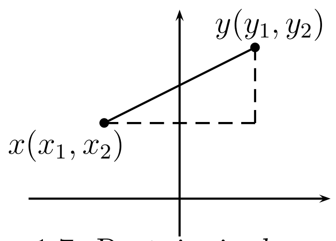
Obje funkcije zadovoljavaju aksiome metrike, te su one metrike na $\mathbb{R}^n$ i tada prostor $\mathbb{R}^n$ sa jednom od tih metrika nazivamo $n$-dimenzionalni euklidski prostor.

Za $n = 1$ imamo jednodimenzionalni euklidski prostor (realna prava) u kome rastojanje između dvije tačke mjerimo sa

$$d(x, y) = |x - y| \ .$$

Za $n = 2$ imamo dvodimenzionalni euklidski prostor koga geometrijski interpretiramo kao realnu ravan, u kome rastojanje računamo sa npr.

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{2}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \ .$$




Slika 1.7: Rastojanje $d_2$ u ralnoj ravni

Za $n = 3$ imamo trodimenzionalni euklidski prostor koga geometrijski interpretiramo kao uobičajeni realni prostor gdje rastojanje mjerimo metrikom $d_2$. Pri tome je za $x = (x_1, y_1, z_1)$ i $y = (x_2, y_2, z_2)$ iz $\mathbb{R}^3$,

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \ .$$

Za realan niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, poznat nam je Cauchyjev kriterij konvergencije, tj. dati niz je konvergentan ako i samo ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon) \ .$$

U kontekstu Definicije 1.2.2, to znači de je dati niz Cauchyjev, a ovo opet znači da je $\mathbb{R}$ kompletan metrički prostor. Šta više, vrijedi

**Teorem 1.6.1**

Svaki konačnodimenzionalan metrički prostor je kompletan.

Definišimo na $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ funkciju $||\cdot||$, koja će svakom elementu iz $\mathbb{R}^n$ pridružiti nenegativan broj, na sljedeći način

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \ , \ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ . \quad (1.6.1)$$

Nije teško provjeriti da ovako uvedena funkcija zadovoljava sve osobine iz Definicije 1.5.1, pa ona predstavlja normu na linearnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$. Jasno, normu na $\mathbb{R}^n$ smo mogli uvesti i na neki drugi način, a zašto smo baš ovako, odgovor leži u sljedećem. Pomoću norme sada možemo definisati rastojanje na $\mathbb{R}^n$, a ono je za ovu normu dato sa

$$d(x,y) = ||x-y|| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \ ,$$

gdje su $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ i $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ iz $\mathbb{R}^n$. Uočimo da je indukovana metrika normom (1.6.1), upravo euklidska metrika $d_2$. (Kako bi izgledala norma koja bi indukovala metriku $d_\infty$?)
Nije teško primjetiti da norma tačke u prostoru $\mathbb{R}^n$, nije ništa drugo do udaljenost te tačke od koordinatnog početka, odnosno to je intenzitet radijus vektora te tačke. U daljem izlaganju uglavnom ćemo elemente iz $\mathbb{R}^n$ zvati tačkama, iako bi pravilnije bilo govoriti o njima kao vektorima ($\mathbb{R}^n$ je prije svega linearan vektorski prostor) i to upravo na gore spomenuti način, kao radijus vektorima.

### 1.6.1 Specijalni skupovi u Euklidskim prostorima

U euklidskim prostorima otvorena kugla je otvoren skup, a zatvorena kugla je zatvoren skup. Šta više, na osnovu Teorema 1.1.3, otvoreni skupovi su i proizvoljnie unije otvorenih kugli i konačni presjeci otvorenih kugli. Tako su na realnoj prevoj, intervali $(a,b)$ $(a,b \in \mathbb{R},\ a < b)$ otvoreni skupovi, a pokazuje se da je skup otvoren ako i samo ako se može prikazati kao unija intervala.

Zbog svega navedenog, od interesa je opisati neke specijalne skupove, a to su otvorene i zatvorene kugle. Definicijom 1.1.4 smo uveli pojmove otvorene i zatvorene kugle kao i sfere, u bilo kom metričkom prostoru. U jednodimenzionalnom euklidskom prostoru, otvorena kugla je simetrični interval

$$B(a,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} |\ a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} \ .$$

Ako u prostoru $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ izaberemo metriku $d_2$, pojmovi kugle i sfere poklapaju se sa uobičajenim shvatanjem tih pojmova. Ako izaberemo metriku


(a) Kugla u $\mathbb{R}^2$ sa metrikom $d_\infty$

(b) Kugla u $\mathbb{R}^2$ sa metrikom $d_2$

Slika 1.8: Kugle u $\mathbb{R}^2$ sa različitim metrikama.

$d_\infty$, onda ulogu kugle i sfere imaju, u običnom govoru korišteni termini za kvadrat i kocku.

U metričkom prostoru $\mathbb{R}^2$ sa metrikom $d_2$, kugle su predstavljene kružnicama (Slika 1.8 (b)), a to znači da će otvorena kugla sa centrom u tački $A(p, q) \in \mathbb{R}^2$ i poluprečnikom $r > 0$ biti skup

$$B(A, r) = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ (x - p)^2 + (y - q)^2 < r\Big\}\ ,$$

a ista takva, ali zatvorena kugla bit će

$$K(A, r) = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ (x - p)^2 + (y - q)^2 \leq r\Big\}\ .$$

Sa metrikom $d_\infty$, kugle su kvadrati sa stranicama paralelnim koordinatnim osama (Slika 1.8 (a)), pa će otvorena kugla centra $A(a, b) \in \mathbb{R}^2$, poluprečnika $r > 0$, biti skup

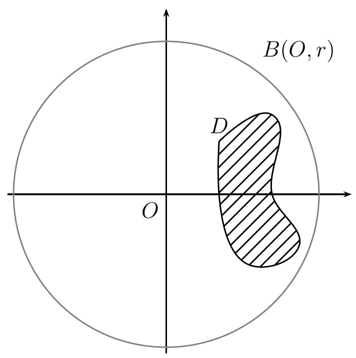
$$B(A, r) = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ |x - a| < r, |y - b| < r\Big\}\ ,$$

a zatvorena kugla je

$$K(A, r) = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ |x - a| \leq r, |y - b| \leq r\Big\}\ .$$

Pod okolinom tačke $X \in \mathbb{R}^n$ podrazumijevamo proizvoljnu otvorenu kuglu u $\mathbb{R}^n$ sa centrom u tački $X$. Sa metrikom $d_2$ za okolinu kažemo da je sferna, a sa metrikom $d_\infty$, za okolinu kažemo da je kubna okolina.

Sada kada znamo šta su kugle u prostoru $\mathbb{R}^n$ možemo precizirati i značenje ograničenog skupa, na osnovu Leme 4 . Dakle, skup $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je ograničen, ako postoji $r > 0$, takav da je $D$ kompletno sadržan u otvorenoj kugli $B(O, r)$, $D \subseteq B(O, r)$. ($O$ je tačka koordinatnog početka)




Slika 1.9: Ograničenost figure u $\mathbb{R}^2$.