MATEMATIKA

Nermin Okičić
Vedad Pašić

Nizovi i redovi

2016

MATEMATIKA

Sadržaj

Poglavlje 1

Numerički nizovi

1.1 Definicija i osnovni pojmovi

Termin "numerički", odnosi se na to da ćemo mi u ovoj glavi posmatrati samo nizove brojeva. Konkretnije, posmatrat ćemo samo nizove ralnih brojeva, pa bi ovdje još precizniji termin bio "realni numerički nizovi".

Definicija 1.1.1

Svako preslikavanje $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, skupa prirodnih brojeva u skup realnih brojeva, nazivamo realnim nizom. Broj koji se ovim preslikava-njem dodjeljuje prirodnom broju n označavamo sa $a(n)$, ili češće sa a_n i nazivamo ga n-ti član niza. Pri tome broj n u oznaci a_n nazivamo indeksom člana niza. Ako je specificirana zavisnost a_n od n, onda se a_n naziva opštim članom niza.
Za niz čiji su članovi $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ koristit ćemo kraću oznaku $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ili kratkoće radi samo (a_n).

Na isti način možemo definisati nizove kompleksnih brojeva, nizove funkcija ili uopšteno nizove elemenata proizvoljnog skupa. U ovom dijelu mi ćemo se ograničiti na posmatranje samo realnih numeričkih nizova.

Primjer 1.1. Niz
$$1, 2, 3, ..., n, n + 1, ...$$
je niz prirodnih brojeva. Niz
$$1, 3, 5, ..., 2n + 1, ...$$
je niz neparnih prirodnih brojeva, a
$$1, 4, 9, 16, 25, ...$$
je niz kvadrata prirodnih brojeva.

Niz je potpuno određen svojim opštim članom. Naprimjer, ako je opšti član niza dat sa $x_n = \frac{n}{n+1}$, niz je u potpunosti određen i njegovi članovi su $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ...$, ili ako želimo odrediti stoti član ovog niza, $x_{100} = \frac{100}{101}$.

Za određivanje niza nije neophodno da postoji formula kojom se eksplicitno određuje opšti član x_n u zavisnosti od n. Naprimjer, ako je x_n n-ti po redu prost broj, niz (x_n) je korektno definisan, iako ne znamo formulu za određivanje n-tog člana tog niza. Isto tako možemo govoriti da je niz (a_n) zadat tako da je a_n n-ta cifra u decimalnom razvoju broja $\sqrt{2}$, mada formulu za n-tu cifru tog razvoja ne znamo eksplicitno.

Znati konačno mnogo prvih članova niza nije dovoljno za jednoznačno određi-vanje niza. Naprimjer, ako je dato prvih pet članova nekog niza
$$0, 7, 26, 63, 124,$$
pravilo po kome su konstruisani ovi članovi može ali i ne mora da važi za šesti, sedmi i dalje članove ovog niza. $\diamondsuit$

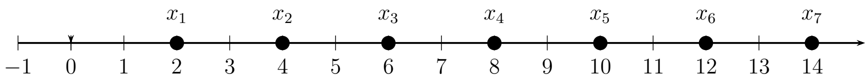
Kako biste vi odgovorili na pitanje koje se stalno pojavljuje u navodnim testovima inteligencije, naime pitanje 'Nastavi niz':

$A : 0, 1, 0, 1, 0, ?$
$B : 3, 5, 7, ?$
$C : 1, 2, 3, 4, ?$

Odgovor na sva pitanja može naprimjer biti 10, ili čak bilo koji drugi broj! Za niz A naprimjer, ako je opći član
$$x_n = \frac{5n^5}{24} - \frac{83n^4}{24} + \frac{521n^3}{24} - \frac{1525n^2}{24} + \frac{1021n}{12} - 40,$$
prvih pet članova niza je $0, 1, 0, 1, 0, 10$. Dakle, bez obzira koliko dugačak konačan niz brojeva imamo, uvijek možemo naći pravilo tako da slijedeći broj niza može biti bilo koji realni broj! U drugom primjeru imamo:
$$x_n = \frac{n^3}{6} - n^2 + \frac{23n}{6}$$

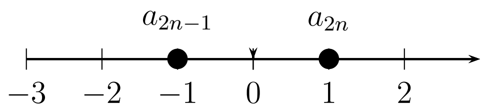
1.1.1 Predstavljanje nizova

Predstavljati nizove možemo na dva načina. Iz samog opisa niza kao liste brojeva dobijamo prvi način, predstavljajući članove niza na realnoj pravoj. Tako bi niz $(2, 4, 6, ..., 14)$, naznačavajući tačkama članove niza, bio predstavljen kao na slici



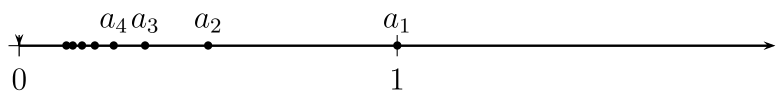
Slika 1.1: Predstavljanje niza na realnoj pravoj.

Predstavljati beskonačne nizove na ovaj način bio bi problem jer bi se često gubila predstava o nizu. Tako za niz $(-1, 1, -1, 1, ...)$ slikom bi bile predstavljene samo dvije tačke, a oznakama a_{2n} i a_{2n-1} bi sugerisali parne i neparne pozicije članova našeg niza.



Slika 1.2: Niz $a_n = (-1)^n$ predstavljen na realnoj pravoj.

Još teže bi bilo predstaviti niz $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$. Označili bi prvih nekoliko članova niza, a dalje članove bi smo samo naznačili tačkama.

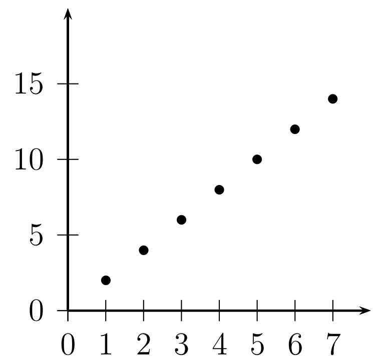


Slika 1.3: Nepraktičnost predstavljanja niza na realnoj pravoj.

Bolja, preglednija varijanta predstavljanja niza proizilazi iz činjenice da niz možemo shvatiti i kao preslikavanje (čak je i definisan tako). Ovdje pod preslikavanjem shvatamo činjenicu da članove niza numerišemo po njihovim pozicijama. Tako niz $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ možemo predstaviti tabelom

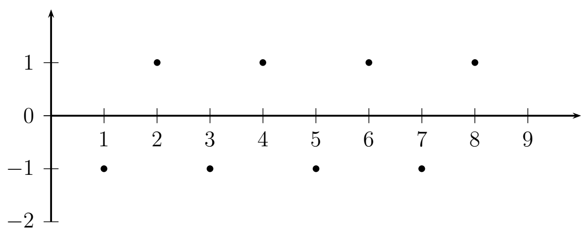
n	1	2	3	...	k	...
x_n	x_1	x_2	x_3	...	x_k	...

Ovo znači da niz možemo posmatrati kao preslikavanje $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, gdje dogovorno koristimo oznaku x_n, a ne uobičajenu oznaku za funkcije $x(n)$. Domen ovog preslikavanja je skup prirodnih brojeva i kad god je domen preslikavanja skup $\mathbb{N}$, takvo preslikavanje nazivamo niz. Sve ovo znači da sada možemo koristiti sve osobine funkcija, ali takođe i pojmove uvedene sa njima. Ovo prije svega znači da niz možemo predstaviti u obliku grafa. Tako bi niz $(2, 4, 6, ..., 14)$, predstavljen grafom izgledao kao na sljedećoj slici

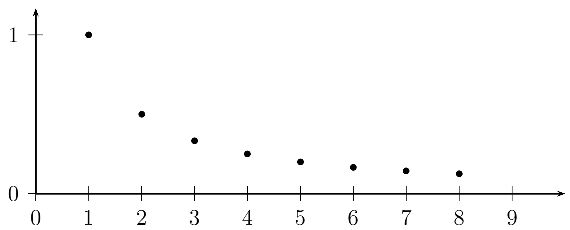


Slika 1.4: Grafički predstavljen niz sa opštim članom $x_n = 2n$.

Ovo je sada puno pogodniji način za predstavljanje beskonačnih nizova. Grafički predstavljen niz $(-1, 1, -1, 1, ...)$ dat je na slici 1.5, a niz $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ predstavljen je slikom 1.6.



Slika 1.5: Niz $x_n = (-1)^n$.



Slika 1.6: Niz $x_n = \frac{1}{n}$.

Primjetimo da sada nemamo potrebu za pisanjem članova niza. Jednostavnim čitanjem sa lijeva u desno imamo članove niza: prvi, drugi, treći itd.

1.1.2 Konvergencija nizova

U matematičkoj analizi proučava se ponašanje članova niza kada njihov indeks neograničeno raste, tj. kada indeks "teži u beskonačnost". Ova naizgled jednostavna problematika fundamentalna je za proučavanje osobina realnih i kompleksnih brojeva, skupova i funkcija, a samim tim i u konkretnim primjenama matematike.

Ideja je da se proučava "gomilanje" članova niza oko neke konkretne vrijednosti. Tako naprimjer, članovi nizova $\left(\frac{1}{n}\right)$ i $\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ "gomilaju se" oko nule, tj. sve su bliže nuli kako indeks n postaje veći, što možemo naslutiti ako izračunamo po nekoliko članova ovih nizova,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \qquad -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots .$$

Za članove niza čiji je opšti član dat sa $x_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$ ne bismo mogli tvrditi da su sve bliže nuli kada se n povećava jer je naprimjer

$$0 < x_{2n-1} = \frac{1}{2n-1} < \frac{3}{2n} = x_{2n} ,$$

iz čega vidimo da je x_{2n} na većoj udaljenosti od nule nego njemu prethodeći član. Međutim, i ovde se može uočiti neko gomilanje oko nule, što se vidi ako se izračuna nekoliko prvih članova niza, $1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$. Naime, ako izaberemo proizvoljno malen broj $\varepsilon > 0$, svi članovi niza će biti manji od ε, samo ako posmatramo dovoljno "daleke" članove u datom nizu. Zaista, nije teško vidjeti da za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x_n = \frac{2+(-1)^n}{n} \leq \frac{3}{n} ,$$

pa je dovoljno posmatrati članove niza čiji je indeks $n > \frac{3}{\varepsilon}$, da bi bilo zadovoljeno $x_n < \varepsilon$.

Primjetimo da smo u gornjem primjeru pokazali da za proizvoljno $\varepsilon > 0$ svi članovi niza, počevši od nekog indeksa n_0, zadovoljavaju nejednakost $x_n < \varepsilon$, tj. oni se gomilaju oko tačke 0. Ovo je globalna ideja kojom se uvodi pojam konvergencije.

Definicija 1.1.2

Kažemo da je realan broj a granična vrijednost ili limes niza (x_n) ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji prirodan broj n_0, takav da za svaki prirodan broj $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \varepsilon$, što jednostavnije izražavamo matematičkom simbolikom sa

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon)\ . \qquad (1.1.1)$$

Gornju činjenicu zapisujemo sa

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \ \text{ ili } \ x_n \to a\ (n \to +\infty)\ .$$

Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, kažemo da niz (x_n) konvergira ka a ili da teži ka a, kada n teži u beskonačnost.
Niz je konvergentan ako i samo ako postoji $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$.

Kasnije ćemo vidjeti da je moguće utvrditi da je niz konvergentan, a da pri tome ne znamo njegovu graničnu vrijednost. Za sada jedini način da odredimo graničnu vrijednost nekog niza je da pretpostavimo (izračunavanjem prvih nekoliko članova niza) da je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, za neko a, a zatim da to dokažemo provjeravajući uslov iz Definicije 1.1.2.

Primjer 1.2. U primjeru ispred Definicije 1.1.2 smo pokazali da je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2+(-1)^n}{n} = 0\ .$$

Na sličan način se pokazuje da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ ili $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Pokažimo prvu relaciju.
Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Nejednakost $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ekvivalentna je sa $n > \frac{1}{\varepsilon}$, pa ako stavimo da je $n_0 = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ (funkcija $[x]$, čita se "antije od x", predstavlja cijeli dio od x), uslov iz Definicije 1.1.2 bit će zadovoljen za svako $n \in \mathbb{N}$ koji zadovoljava uslov $n \geq n_0$, tj. važit će $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$. Ovaj niz i njegovu graničnu vrijednost ističemo kao bitne za dalje razmatranje.

$$\boxed{\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0}}$$

$\diamondsuit$

Postoji više ekvivalentnih oblika uslova (1.1.1). Tako možemo pisati

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ |x_n - a| < \varepsilon\ ,$$

gdje u dijelu "$(\forall n \geq n_0)$" podrazumijevamo da je $n \in \mathbb{N}$. Takođe, znak "$<$" u (1.1.1) možemo zamijeniti sa znakom "$\leq$", a znak "$\geq$" znakom "$>$". Osim toga, umjesto "$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)$" možemo pisati "$(\exists y_0 \in \mathbb{R})(\forall n \geq y_0)$". Ovu posljednju zamjenu naročito dobro možemo koristiti da bi izbjegli korištenje funkcije "$[\cdot]$" ("antije").

Primjer 1.3. Neka je $x_n = 2^{\frac{1}{n}}$. Posmatramo li nekoliko prvih članova ovog niza

$$x_1 = 2^1 = 2\ ,\ x_2 = 2^{\frac{1}{2}} = 1,41...\ ,\ x_3 = 2^{\frac{1}{3}} = 1,26...\ ,$$

$$x_4 = 2^{\frac{1}{4}} = 1,19...\ ,\ ...\ , x_{10} = 2^{\frac{1}{10}} = 1,07...\ ,$$

vidimo da se vrijednosti umanjuju i da se "kreću" ka 1, tj. "osjećamo" da je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$. Ali ovakvo razmišljanje ni u kom slučaju ne predstavlja dokaz ove tvrdnje. Da bi to dokazali razmišljajmo ovako:
kako je $x_n = 2^{\frac{1}{n}} > 1$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada je nejednakost $|2^{\frac{1}{n}} - 1| < \varepsilon$ ekvivalentna sa $2^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$, što nakon logaritmovanja daje ekvivalentno $n > \frac{\log 2}{\log(1+\varepsilon)}$. Ovo onda znači da za svako $\varepsilon > 0$, postoji $y_0 = \frac{\log 2}{\log(1+\varepsilon)}$, takav da je za svaki prirodan broj n, za koga vrijedi $n \geq y_0$, zadovoljena nejednakost $|x_n - 1| < \varepsilon$, što prema Definiciji 1.1.2 znači da je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.
$\diamondsuit$

Na isti način se pokazuje sljedeći važan limes

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad , \quad (a > 0)}$$

Definicija 1.1.3

Okolina tačke $a \in \mathbb{R}$ je proizvoljan otvoren interval koji sadrži tačku a. Otvoreni interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ dužine 2ε sa centrom u tački $a \in \mathbb{R}$, naziva se simetrična ε-okolina tačke a ili samo ε-okolina tačke a.

Definicija 1.1.4

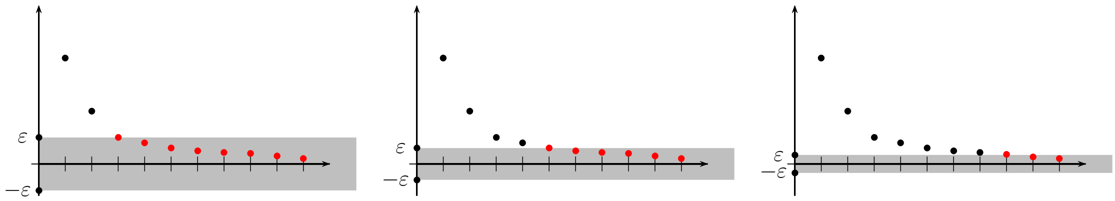
Kažemo da skoro svi članovi niza imaju neku osobinu P ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svako $n \geq n_0$, x_n ima osobinu P.

Drugačije rečeno, skoro svi članovi niza imaju osobinu P ako je imaju svi članovi niza počev od nekog indeksa ili što je isto kao da kažemo da tu osobinu imaju svi članovi niza osim njih konačno mnogo.

Nejednakost $|x_n - a| < \varepsilon$, koristeći poznati stav za apsolutnu vrijednost, možemo zapisati i kao $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, što je opet ekvivalentno sa tim da $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Koristeći sve rečeno, Definiciju 1.1.2 možemo iskazati ekvivalentno u sljedećem obliku.

Definicija 1.1.5

Kažemo da niz (x_n) konvergira ka tački $a \in \mathbb{R}$ ako se u svakoj ε-okolini tačke a nalaze skoro svi članovi niza.



Slika 1.7: Izvan ε-okoline nalazi se konačno mnogo članova niza.

Ako se skoro svi članovi niza nalaze u nekoj ε_0-okolini tačke a, onda to isto važi i za svaku ε-okolinu, gdje je $\varepsilon > \varepsilon_0$. Iz ovoga je jasno da je uslov Definicije 1.1.2 ili njoj ekvivalentne Definicije 1.1.5, dovoljno pokazati za malo ε, odnosno za $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, gdje je ε_0 proizvoljan pozitivan broj.

Primjer 1.4. Niz čiji je opšti član $x_n = (-1)^n$ nije konvergentan. Zaista, pretpostavimo suprotno, tj. da je za neko $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. Kako su svi članovi datog niza jednaki ili 1 ili -1, to znači da se oba ta broja moraju nalaziti u proizvoljnoj ε-okolini tačke a. Međutim, to očigledno nije moguće jer izaberemo li $\varepsilon < \frac{1}{2}$ tada nije moguće da oba broja i 1 i -1 budu u intervalu $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, čija je dužina manja od 1. $\diamondsuit$

1.2 Osobine konvergentnih nizova

Pored pitanja o egzistenciji granične vrijednosti niza, drugo najvažnije pitanje je njena jedinstvenost. To iskazujemo sljedećim tvrđenjem.

Teorem 1.2.1

Ako niz ima graničnu vrijednost onda je ona jedinstvena.

Dokaz : Pretpostavimo da vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \quad \text{i} \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = b\ .$$

Ako je $a \neq b$, onda postoji $\varepsilon > 0$ takvo da ε-okoline oko tačaka a i b budu disjunktne (dovoljno je uzeti da je $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$). Na osnovu Definicije 1.1.5

zaključujemo onda da su svi članovi niza (x_n), počev od nekog indeksa n_1, u ε-okolini broja a, ali isto tako bi morali svi članovi našeg niza, počev od nekog indeksa n_2, biti u ε-okolini tačke b. Ako posmatramo članove niza čiji su indeksi veći i od n_1 i od n_2, zaključili bi smo da se oni nalaze i u jednoj i u drugoj ε-okolini, što nije u saglasnosti sa disjunktnošću tih okolina. ■

Definicija 1.2.1

Za niz (x_n) kažemo da je ograničen odozgo ako vrijedi:

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \leq M\ .$$

Niz je ograničen odozdo ako vrijedi:

$$(\exists m \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \geq m\ .$$

Definicija 1.2.2

Za niz (x_n) kažemo da je ograničen ako je skup svih elemenata tog niza ograničen, tj. ako postoji realan broj $M \geq 0$ takav da je $|x_n| \leq M$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Ovo zapisujemo sa

$$(\exists M \geq 0)(\forall n \in \mathbb{N})\ |x_n| \leq M\ .$$

Teorem 1.2.2

Svaki konvergentan niz je ograničen.

Dokaz : Neka je niz (x_n) konvergentan, tj. neka je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, naprimjer neka je $\varepsilon = 1$. Na osnovu definicije konvergencije, svi članovi niza, počev od nekog indeksa n_0, pripadaju okolini $(a-1, a+1)$, odnosno van ove okoline se nalazi konačno mnogo članova niza. Neka je m_1 najmanja vrijednost i M_1 najveća vrijednost od tih konačno mnogo članova koji su van okoline. Označimo sa $m = \min\{a-1, m_1\}$ i $M = \max\{a+1, M_1\}$. Tada očigledno vrijedi

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ m \leq x_n \leq M\ ,$$

što predstavlja ograničenost niza. ■

Ograničenost niza je prema Teoremi 1.2.2, potreban uslov konvergencije. Da to nije i dovoljan uslov, pokazuje primjer niza $((-1)^n)$ koji jeste ograničen, ali kao što je ranije pokazano nije konvergentan.

U sljedećim teoremama pokazat ćemo vezu limesa i osnovnih algebarskih operacija. U mnogim dokazima koji slijede koristit ćemo se poznatom osobinom nejednakosti trougla, naime ako znamo da je $|a-b|<\varepsilon$ i $|b-c|<\varepsilon$, tada imamo

$$|a-c| = |a-b+b-c| \leq |a-b| + |b-c| < 2\varepsilon \ .$$

Teorem 1.2.3

Neka su dati nizovi (x_n) i (y_n).

1. Ako je $x_n = c \in \mathbb{R}$ za skoro svako $n \in \mathbb{N}$, tada je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = c$.
2. Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ i neka su a, b i c proizvoljni realni brojevi. Tada važi:
   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(ax_n + by_n) = ax + by$.
   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n + c) = x + c$.
   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n \cdot y_n) = x \cdot y$.
   (d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{x}{y}$, ako je $y \neq 0$ i $y_n \neq 0$ za $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz : Tvrđenje 1. je posljedica činjenice da se broj c nalazi u svakoj svojoj okolini.
2. Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Počevši od nekog indeksa n_1 svi članovi niza (x_n) su u ε-okolini tačke x. Isto tako, od nekog indeksa n_2 svi članovi niza (y_n) su u ε-okolini tačke y. Stavimo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Tada su za svako $n \geq n_0$ ispunjene obje nejednakosti

$$|x_n - x| < \varepsilon \ \text{ i } \ |y_n - y| < \varepsilon \ ,$$

pa iz nejednakosti trougla slijedi za $n \geq n_0$

$$|ax_n + by_n - (ax+by)| = |ax_n - ax + by_n - by| \leq |a||x_n - x| + |b||y_n - y| \leq (|a|+|b|)\varepsilon \ .$$

Kako je $|a|+|b|$ fiksan realan broj, a ε proizvoljan malen broj, to je i $(|a|+|b|)\varepsilon$ proizvoljno malen broj pa vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty}(ax_n + by_n) = ax + by \ .$$

Tvrđenje (b) u 2. je direktna posljedica tvrđenja 2.(a) i 1. uzimajući $y_n = c$ i stavljajući da je $a = b = 1$.

Dokažimo tvrđenje (c). Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Primjenom nejednakosti trougla imamo

$$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x y_n + x y_n - xy| \leq |y_n||x_n - x| + |x||y_n - y| \ . \quad (1.2.1)$$

Na osnovu Teorema 1.2.2, postoji realan broj $M \geq 0$, takav da je $|y_n| \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Sada kao i u dokazu tvrđenja (a), postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za $n \geq n_0$, $|x_n - x| < \varepsilon$ i $|y_n - y| < \varepsilon$, pa iz (1.2.1) imamo

$$|x_n y_n - xy| \leq (M + |x|)\varepsilon$$

čime je tvrđenje dokazano.

Dokžimo i tvrdnju (d). Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$, gdje je $y \neq 0$. Ponovo primjenom nejednakosti trougla imamo

$$\begin{aligned} \left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| &= \left|\frac{x_n y - y_n x}{y_n y}\right| \leq \frac{|x_n y - xy| + |xy - y_n x|}{|y_n||y|} \\ &= \frac{|y||x_n - x| + |x||y_n - y|}{|y_n||y|} \ . \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji n_0, takvo da je $|x_n - x| < \varepsilon$ i $|y_n - y| < \varepsilon$ čim je $n \geq n_0$. Prema tome, brojilac posljednjeg razlomka je manji od $(|x| + |y|)\varepsilon$. Kako je $y \neq 0$, postoji neko $\delta > 0$ takvo da interval $(-\delta, \delta)$ nema zajedničkih tačaka sa intervalom $(y-\delta, y+\delta)$ (npr. uzeti $\delta = \frac{|y|}{2}$). U intervalu $(y-\delta, y+\delta)$ nalaze se svi članovi niza (y_n) počevši od nekog indeksa n_1, pa je $|y_n| \geq \delta$ za $n \geq n_1$, pa je imenilac u posljednjem razlomku u (1.2.2) veći od $\delta|y|$.
Dakle, ako je $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ onda je

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| \leq \frac{|x| + |y|}{\delta|y|}\varepsilon \ ,$$

pri čemu δ ne zavisi od ε. Time je dokaz završen. ■

Ilustrujmo primjenu gornjeg tvrđenja na nekoliko primjera.

Primjer 1.5. Izračunati: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 \cdot 2^{\frac{1}{n}} + 2 \cdot 3^{\frac{1}{n}}\right)$.

Koristeći pravilo 2.(a) i ranije pokazani limes niza ($\sqrt[n]{a}$) imamo da je

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \left(3 \cdot 2^{\frac{1}{n}} + 2 \cdot 3^{\frac{1}{n}}\right) &= \lim_{n\to+\infty} \left(3 \cdot 2^{\frac{1}{n}}\right) + \lim_{n\to+\infty} \left(2 \cdot 3^{\frac{1}{n}}\right) \\ &= 3 \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} + 2 \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3} \\ &= 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5 \ . \end{aligned}$$

♢

Primjer 1.6. Izračunati: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+6\right)$.
Koristeći pravilo 2.(b) imamo

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+6\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to+\infty}6=0+6=6\ .$$

$\diamondsuit$

Među konvergentnim nizovima, posebnu ulogu imaju nizovi koji konvergiraju ka nuli.

Definicija 1.2.3

Niz (x_n) za koga važi $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$, nazivamo nula-niz.

Zapravo, ispitivanje proizvoljnog konvergentnog niza se može svesti na ispitivanje nula-niza. O tome govori naredno tvrđenje.

Teorem 1.2.4

Niz (x_n) konvergira ka $a\in\mathbb{R}$ ako i samo ako niz (x_n-a) konvergira ka 0.

Dokaz : Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$. Na osnovu Teorema 1.2.3 2.(b) je

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n-a)=\lim_{n\to+\infty}x_n-a=0\ .$$

Obratno, ako je $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-a)=0$, tada je

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}(x_n-a+a)=\lim_{n\to+\infty}(x_n-a)+a=a\ .$$

$\blacksquare$

Teorem 1.2.5

Zbir, razlika i proizvod dva nula-niza je ponovo nula-niz.

Dokaz ove jednostavne činjenice ostavljen je čitaocu za vježbu, ali primjetimo da kod proizvoda dva niza uslove možemo oslabiti.

Teorem 1.2.6

Neka je (x_n) proizvoljan nula-niz i neka je (y_n) proizvoljan ograničen niz (ne obavezno konvergentan). Tada je niz (z_n), gdje je $z_n = x_n \cdot y_n$ $(n \in \mathbb{N})$, nula-niz.

Dokaz : Kako je niz (y_n) ograničen, to postoji realan broj $M > 0$ takav da je za svako $n \in \mathbb{N}$, $|y_n| \leq M$. Iz konvergencije niza (x_n) ka nuli slijedi da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da je za sve $n \geq n_0$ zadovoljeno $|x_n| < \varepsilon$. Na osnovu svega ovoga zaključujemo da će za $n \geq n_0$ vrijediti

$$|z_n| = |x_n \cdot y_n| = |x_n||y_n| < M\varepsilon \ ,$$

a što znači da niz (z_n) konvergira ka nuli. ■

Primjer 1.7. Izračunati: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos n}{n}$.
Označimo sa $z_n = \dfrac{\cos n}{n} = \dfrac{1}{n}\cos n$. Kako je niz sa opštim članom $x_n = \frac{1}{n}$ nula-niz, a niz sa opštim članom $y_n = \cos n$ je ograničen ($\cos x \leq 1$), to je na osnovu gornje teoreme niz (z_n) nula-niz, tojest vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n} = 0 \ .$$

♢

Sljedećim teoremama uspostavlja se veza između limesa i relacije poretka.

Teorem 1.2.7

Neka je (x_n) proizvoljan niz.

1. Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x > p$ $(< p)$, tada je $x_n > p$ $(< p)$ za skoro svako $n \in \mathbb{N}$.

2. Ako je niz (x_n) konveregentan i ako je $x_n > p$ $(< p)$, za skoro svako $n \in \mathbb{N}$, onda je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \geq p$ $(\leq p)$.

Dokaz :

1. Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ i neka je $a > p$. Stavimo li da je $\varepsilon = \frac{a-p}{2}$, svi brojevi koji pripadaju intervalu $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ su veći od p, ali skoro svi članovi niza (x_n) su u toj ε-okolini i time je tvrđenje dokazano. Slučaj kada je $a < p$ dokazuje se analogno.

2. Neka je $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ i neka je $x_n > p$ za skoro svako n. Ako bi bilo $a < p$, to bi na osnovu dokazanog pod 1) značilo da je $x_n < p$ za skoro svako n, što je očigledna kontradikcija. Dakle mora biti $a \geq p$.

■

Prethodni teorem najčešće ćemo koristiti za slučaj $p = 0$. Naime, ako je $\lim_{n\to+\infty} x_n$ pozitivan (negativan) broj, tada su skoro svi članovi niza pozitivni (negativni). Ako su skoro svi članovi niza pozitivni (negativni), tada je granična vrijednost niza nenegativna (nepozitivna).

Primjer 1.8. Posmatrajmo niz $(\frac{1}{n})$. Svi članovi niza su pozitivni, tj. $\frac{1}{n} > 0$, ali $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.
Ovim se potvrđuje slijedeće, ako je $x_n > p$ za skoro svako n onda je $\lim_{n\to+\infty} x_n \geq p$, tj. prelaskom na granični proces znak stroge nejednakosti se "slabi" na znak "$\geq$". ♢

Kao posljedicu gornje teoreme imamo

Posljedica 1. *Ako svi članovi konvergentnog niza (x_n) pripadaju segmentu $[a, b]$, tada i $\lim_{n\to+\infty} x_n \in [a, b]$.*

1.3 Beskonačne granične vrijednosti

Definicija 1.3.1

Kažemo da niz (x_n) divergira ka plus beskonačnosti, što označavamo sa $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, ako vrijedi

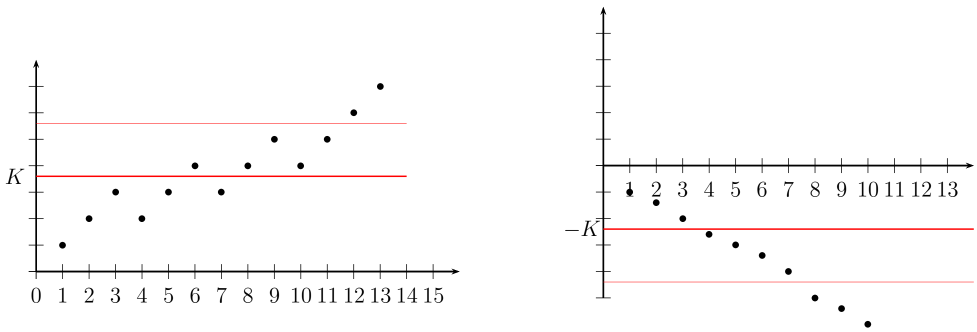
$$(\forall K > 0)(\exists n_0(K) \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) x_n > K\ .$$

Kažemo da niz (x_n) divergira ka minus beskonačnosti, što označavamo sa $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$, ako vrijedi

$$(\forall K > 0)(\exists n_0(K) \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) x_n < -K\ .$$

U oba slučaja kažemo da niz određeno divergira.

Definicija 1.3.1 postaje analogna Definiciji 1.1.2 ako se uvede pojam okoline beskonačnosti. Pod okolinom od $+\infty$ podrazumijevamo proizvoljan interval $(K, +\infty)$ i analogno pod okolinom od $-\infty$ podrazumijevamo proizvoljan interval $(-\infty, -K)$, za neko $K \in \mathbb{R}^+$.



Slika 1.8: Određeno divergentni nizovi.

Na osnovu ovoga možemo reći da niz određeno divergira ka $+\infty$ ako su skoro svi članovi niza u proizvoljnoj okolini od $+\infty$.

Sada možemo izvršiti selekciju svih nizova u odnosu na konvergenciju. Svaki realni niz spada u jednu od klasa:

- Niz je konvergentan (granična vrijednost mu je neki realan broj).
- Niz je određeno divergentan (granična vrijednost mu je ili $+\infty$ ili $-\infty$).
- Niz je neodređeno divergentan (nema ni konačnu ni beskonačnu graničnu vrijednost).

Primjer 1.9. Posmatrajmo geometrijski niz $x_n = q^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Za koje $q \in \mathbb{R}$ je dati niz konvergentan?
Ako je $q = 1$ tada je naš niz konstantan ($x_n = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$), pa mu je i granična vrijednost jednaka 1. Dakle, niz je u ovom slučaju konvergentan.
Za $q = -1$ dobijamo niz sa opštim članom $x_n = (-1)^n$, za koga je već ranije pokazano da nema graničnu vrijednost, tj. niz je neodređeno divergentan.
Neka je $|q| < 1$. Sada, da bi za proizvoljno $\varepsilon > 0$ bilo $|q^n - 0| < \varepsilon$, mora biti

$$|q|^n < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; n \log|q| < \log\varepsilon \;\Leftrightarrow\; n > \frac{\log\varepsilon}{\log|q|}$$

(u posljednjoj ekvivalenciji je došlo do obrtanja znaka nejednakosti jer je $\log|q| < 0$). Dakle, za proizvoljan $\varepsilon > 0$, ako važi $n > \frac{\log\varepsilon}{\log|q|}$ $(y_0 = \frac{\log\varepsilon}{\log|q|}$), onda je $|q^n| < \varepsilon$, pa je $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$. Niz je konvergentan.
Ako je $q > 1$, čim je $n > \frac{\log K}{\log q}$, onda je $q^n > K$, za proizvoljno K, pa je $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, tj. niz je određeno divergentan.
Za $q < -1$, članovi niza sa parnim stepenom su pozitivni, a sa neparnim stepenom su negativni. Ali svi članovi po apsolutnoj vrijednosti rastu u beskonačnost. Dakle niz je neodređeno divergentan. $\diamondsuit$

Sljedeći teorem je na određen način proširenje Teorema 1.2.3.

Teorem 1.3.1

Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$ i neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$. Tada vrijedi:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = +\infty$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n \cdot y_n) = \operatorname{sgn} x \cdot \infty \ (x \neq 0)$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 0$.
4. Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ i ako su skoro svi članovi niza (x_n) pozitivni, tada je $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x_n} = +\infty$.

U Teoremi 1.2.3 smo govorili o konvergentnim nizovima. Gornji teorem je proširenje u tom smislu što možemo direktno računati limese kombinacije dva niza i ako je jedan od nizova divergentan. Postoje kombinacije dva niza kada se rezultat ne može direktno odrediti kao u slučajevima opisanim u ovim teoremama. Tada kažemo da je granična vrijednost neodređena ili da je neodređenog tipa. To međutim ni u kom slučaju ne znači da granična vrijednost ne postoji, već samo da se ne može unaprijed odrediti primjenom pravila datih u ovim teoremama.

Primjer 1.10. Za niz sa opštim članom $x_n = \dfrac{n^2 + 3n - 2}{2n^2 + 5n + 4}$ imamo neodređenost tipa $\frac{\infty}{\infty}$ jer i brojilac i imenilac divergiraju ka $+\infty$, kada n teži u beskonačnost. Dijeljenjem i brojioca i imenioca sa n^2 vrijednost razlomka se neće promjeniti, pa je

$$x_n = \frac{1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}}{2 + \frac{5}{n} + \frac{4}{n}} \ .$$

Primjenom pravila Teorema 1.2.3 dobijamo da je

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2} \ .$$

♢

Primjer 1.11. Izračunati: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Ako bi smo limesom "prošli" kroz malu zagradu i pokušali primjeniti Teorem 1.2.3 ili Teorem 1.3.1, dobili bi izraz oblika $\infty - \infty$ za koga nemamo odluku čemu je jednak. Zato se poslužimo racionalizacijom izraza pod limesom, a tek onda primjenimo Teorem 1.3.1.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) &= \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0\ .\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Postoji sedam tipova neodređenosti, a to su:

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}\ ,\ \frac{0}{0}\ ,\ 0\cdot\infty\ ,\ \infty-\infty\ ,\ 1^\infty\ ,\ \infty^0\ ,\ 0^0\ .}$$

1.4 Monotoni nizovi

Definicija 1.4.1

Za niz (x_n) kažemo da je

- strogo monotono rastući ako vrijedi $(\forall n\in\mathbb{N})\ x_{n+1}>x_n$.
- monotono rastući (neopadajući) ako vrijedi $(\forall n\in\mathbb{N})\ x_{n+1}\geq x_n$.
- strogo monotono opadajući ako vrijedi $(\forall n\in\mathbb{N})\ x_{n+1}<x_n$.
- monotono opadajući (nerastući) ako vrijedi $(\forall n\in\mathbb{N})\ x_{n+1}\leq x_n$.

Za niz koji posjeduje bilo koju od navedenih osobina kažemo da je monoton niz.

Najčešće tehnike ispitivanja monotonosti su posmatranje količnika ili razlike dva uzastopna člana niza. Tako naprimjer, ako je $n\in\mathbb{N}$ proizvoljan, imamo

$$x_{n+1}-x_n\begin{cases}>0 & \Rightarrow\ \text{niz je strogo monotono rastući}\\ \geq 0 & \Rightarrow\ \text{niz je neopadajući}\\ <0 & \Rightarrow\ \text{niz je strogo monotono opadajući}\\ \leq 0 & \Rightarrow\ \text{niz je nerastući}\end{cases}\ .$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}\begin{cases}>1 & \Rightarrow\ \text{niz je strogo monotono rastući}\\ \geq 1 & \Rightarrow\ \text{niz je neopadajući}\\ <1 & \Rightarrow\ \text{niz je strogo monotono opadajući}\\ \leq 1 & \Rightarrow\ \text{niz je nerastući}\end{cases}\ .$$

Primjer 1.12. Niz $x_n = \frac{1}{n}$ je strogo monotono opadajući jer za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0 \ .$$

♢

Primjer 1.13. Niz $x_n = \frac{n}{n+1}$ je strogo monotono rastući jer je za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = 1 + \frac{1}{n^2+2n} > 1 \ .$$

♢

Za monotone nizove imamo veoma jednostavne kriterijume konvergencije koje dajemo sljedećim teoremama.

Teorem 1.4.1

Svaki monoton niz je ili konvergentan ili određeno divergentan (ima konačnu ili beskonačnu graničnu vrijednost).

Primjetimo odmah da obrat u gornjoj teoremi ne mora da vrijedi. Naime, niz može biti konvergentan, ali ne mora biti monoton. Dovoljno je posmatrati niz sa opštim članom $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, koji je nula-niz, ali nije monoton jer mu članovi "skaču" oko nule (parni su pozitivni, a neparni su negativni).

Teorem 1.4.2

Svaki monoton i ograničen niz je konvergentan.

U ovoj teoremi treba razlikovati dva slučaja:

1. Ako je niz monotono rastući, zahtijevamo ograničenost odozgo.
2. Ako je niz monotono opadajući, zahtijevamo da je niz ograničen odozdo.

Primjer 1.14. Posmatrajmo niz $x_n = \dfrac{n}{a^n}$ $(a > 1)$.
Kako je za dovoljno veliko $n \in \mathbb{N}$, $n \cdot a > n + 1$, to je

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n \cdot a} < 1 \ ,$$

zaključujemo da je niz strogo monotono opadajući.
Za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ je $x_n = \frac{n}{a^n} > 0$, pa je dati niz ograničen odozdo.
Prema gornjoj teoremi je dati niz konvergentan, tj. $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$. Pustimo li u izrazu

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{a^{n+1}} = \frac{n+1}{n \cdot a} x_n$$

da n teži u beskonačnost imali bi da vrijedi $x_0 = \dfrac{x_0}{a}$, a zbog $a > 1$ ovo je moguće samo ako je $x_0 = 0$, pa je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{a^n} = 0 \quad , \quad a > 1 \ .$$

♢

Primjer 1.15. Pokažimo da je niz $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ rastući i ograničen odozgo.
Jednostavnim računom se ima

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+2}{n+1}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \ .$$

Na osnovu Bernoullijeve nejednakosti[1] je

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{(n+1)^2} \ , \ n \geq 2 \ ,$$

pa imamo

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{n+2}{n+1}\left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} > 1 \ .$$

Dakle niz je strogo monotono rastući.
Ako sada posmatramo i niz $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, zbog veze $y_n = x_n \cdot (1 + \frac{1}{n})$, očigledna je nejednakost $x_n \leq y_n$ za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$. Pokazati da je niz (y_n) strogo monotono opadajući, ostavljeno je čitaocu za vježbu. Iz ovoga onda zaključujemo da je bilo koji član niza (y_n) gornje ograničenje niza (x_n), pa možemo reći da je $x_n \leq y_1 = 4$ za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$.
Iz monotonosti i ograničenosti niza (x_n) zaključujemo njegovu konvergenciju.
♢

[1](**Bernoullijeva nejednakost**) Neka je $n \in \mathbb{N}$ i x realan broj veći od -1. Tada vrijedi

$$(1 + x^n) \geq 1 + nx \ .$$

Graničnoj vrijednosti ovog niza dajemo posebno ime (po matematičaru Euleru[2]), a ističemo i njegovu važnost za računanje mnogih drugih limesa.

Definicija 1.4.2

$$\boxed{e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad .}$$

Broj e nazivamo Eulerovim brojem i on je jedna od najvažnijih matematičkih konstanti. Prvih nekoliko decimala tog broja su

$$e = 2,718281828...$$

1.5 Alati za izračunavanje limesa

Sada ćemo dati dvije veoma korisne teoreme za izračunavanje limesa. U pravim rukama one su zaista moćan alat.

Teorem 1.5.1

(**Teorem o lopovu i dva policajca**)
Neka su (x_n) i (y_n) nizovi za koje vrijedi

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = A$.
2. Za skoro svako $n \in \mathbb{N}$ je $x_n \leq z_n \leq y_n$.

Tada i niz (z_n) ima graničnu vrijednost i važi $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = A$.

Dokaz : Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = A$. Pretpostavimo prvo da je $A \in \mathbb{R}$. Tada za fiksno $\varepsilon > 0$, postoji $n_1 \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq n_1$, x_n pripada ε-okolini tačke A. Takođe postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da se svi članovi niza (y_n) počev od y_{n_2} pa na dalje, nalaze u istoj ε-okolini (jer oba niza konvergiraju ka istoj tački). Ako sada izaberemo da je $n' = \max\{n_1, n_2\}$, onda su članovi oba niza za $n \geq n'$ u okolini $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$.
Kako je za skoro sve n zadovoljeno $x_n \leq z_n \leq y_n$, to postoji $n'' \in \mathbb{N}$, tako

[2]Leonhard Euler, 1707-1783 švicarski matematičar

da je za sve $n \geq n''$ zadovoljeno $x_n \leq z_n \leq y_n$. Ako sada stavimo da je $n_0 = \max\{n', n''\}$, onda je za sve $n \geq n_0$ zadovoljeno

$$A - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < A + \varepsilon \ ,$$

ali ovo za niz (z_n) znači da su mu skoro svi članovi u okolini $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, odnosno to znači $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = A$.

Ako je $A = +\infty$, potrebna nam je samo nejednakost $x_n \leq z_n$. Zaista, zbog $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, za svako K, postoji n_1, takav da je za $n \geq n_1$, $x_n > K$. Ako je $x_n \leq z_n$ za $n \geq n_2$, onda je za $n > \max\{n_1, n_2\}$ zadovoljeno $z_n \geq x_n > K$, a odavde slijedi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$. Slučaj kada je $A = -\infty$ dokazuje se analogno i ostavljen je čitaocu za vježbu. ■

Primjer 1.16. Ispitati konvergenciju niza $z_n = \dfrac{\ln(1+n)}{1+n^2}$.
Matematičkom indukcijom se pokazuje da vrijedi $\ln(1+n) < n$ (šta više, vrijedi $\log(1+x) < x$ za proizvoljan $x > 0$). Koristeći to imamo,

$$0 \leq \frac{\ln(1+n)}{1+n^2} \leq \frac{n}{1+n^2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \ .$$

Ako označimo sa $x_n = 0$, $y_n = \frac{1}{n}$, onda su uslovi gornje teoreme zadovoljeni, pa zaključujemo da je

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 0 = \lim_{n\to+\infty} z_n \ .$$

♢

Primjer 1.17. Izračunati: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$.
Kako važi

$$3^n \leq 2^n + 3^n \leq 2 \cdot 3^n \ ,$$

tada je

$$3 \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq 3\sqrt[n]{2} \ .$$

Ako označimo sa $x_n = 3$ i sa $y_n = 3\sqrt[n]{2}$, tada očigledno važi

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 3 \ ,$$

pa na osnovu teoreme o lopovu i dva policajca vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3 \ .$$

♢

Druga od teorema je

Teorem 1.5.2

(**Stolzova teorema**)
Neka su dati nizovi (x_n) i (y_n) i neka su zadovoljeni uslovi:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.
2. Niz (y_n) je monotono rastući, tj. $y_{n+1} \geq y_n$ za skoro svako n.
3. Postoji konačna ili beskonačna granična vrijednost $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

Tada postoji i $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ i važi jednakost

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$$

Primjer 1.18. Izračunati: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{3^n}$.
Označimo sa $x_n = n$ i sa $y_n = 3^n$. Jasno je da vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$. osim toga je $3^{n+1} > 3^n$, tj. niz (y_n) je monotono rastući. Kako je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1-n}{3^{n+1}-3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\cdot 3^n} = 0\ ,$$

dakle zadovoljeni su uslovi Stolzove teoreme pa vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3^n} = 0\ .$$

♢

1.6 Podnizovi

Ako iz niza (x_n) izdvojimo beskonačno mnogo članova u istom redoslijedu u kome se pojavljuju u datom nizu, dobijeni niz se naziva podnizom niza (x_n). Naprimjer, ako u nizu (x_n) posmatramo samo njegove parne članove, dobijamo podniz (x_{2k}) ili ako posmatramo svaki sedmi član imamo podniz (x_{7k}). Formalna definicija podniza je

Definicija 1.6.1

Neka je dat niz (x_n) i neka je $n_1, n_2, ..., n_k, ...$ strogo monotono rastući niz prirodnih brojeva. Tada kažemo da je (x_{n_k}) podniz niza (x_n).

Podniz (x_{n_k}) može se posmatrati kao niz sa indeksima $k = 1, 2, ...$ pa sve što je do sada rečeno za nizove važi i za podnizove. Neposredno iz definicije podniza slijedi

Teorem 1.6.1

Ako niz (x_n) ima graničnu vrijednost x_0, tada i bilo koji podniz (x_{n_k}) datog niza ima graničnu vrijednost x_0.

Obrat u gornjem tvrđenju ne vrijedi, tj. ako neki podniz (x_{n_k}) niza (x_n) ima graničnu vrijednost, sam niz ne mora imati graničnu vrijednost. Jednostavan primjer za to je niz $x_n = (-1)^n$. Njegovi podnizovi (x_{2k}) i (x_{2k-1}) su konstantni nizovi i kao takvi konvergentni dok sam niz, kao što je to pokazano ranije, nije konvergentan.
U ovom dijelu ćemo se upravo baviti odnosom između konvergencije niza i konvergencije njegovih podnizova.

Definicija 1.6.2

Za tačku $a \in \mathbb{R}^*$ kažemo da je tačka nagomilavanja niza (x_n) ako postoji podniz (x_{n_k}) datog niza koji konvergira ka tački a.

Primjer 1.19. Posmatrajmo niz sa opštim članom $x_n = \sin \frac{2n\pi}{3}$.
Posmatramo li članove niza sa indeksima $n = 3k$ $(k \in \mathbb{N})$, dobijamo podniz (x_{3k}) koji je konstantan niz $(x_{3k} = \sin \frac{6k\pi}{3} = \sin 2k\pi = 0)$ te kao takav i konvergentan ka 0.
Posmatramo li članove niza sa indeksima $n = 3k-1$, dobijamo podniz (x_{3k-1}) koji je konstantan niz $(x_{3k-1} = \sin \frac{2(3k-1)\pi}{3} = \sin\left(2k\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2})$ te kao takav i konvergentan ka $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Posmatramo li članove niza sa indeksima $n = 3k-2$, dobijamo podniz (x_{3k-2}) koji je konstantan niz $(x_{3k-2} = \sin \frac{2(3k-2)\pi}{3} = \sin\left(2k\pi - \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2})$ te kao takav i konvergentan ka $\frac{1}{2}$.

Dakle, tačke 0, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\frac{1}{2}$ su tačke nagomilavanja niza (x_n). ♢

Tačku nagomilavanja možemo definisati i na sljedeći način.

Definicija 1.6.3

Tačka $a \in \mathbb{R}^*$ je tačka nagomilavanja niza (x_n) ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m > n)\ |x_m - a| < \varepsilon\ .$$

Iz ove druge definicije vidimo i razliku između pojma limesa i pojma tačke nagomilavanja. Naime, limes niza ima osobinu da se u svakoj njegovoj okolini nalaze skoro svi članovi niza (van te okoline nalazi se samo konačno mnogo članova niza), dok se u proizvoljnoj okolini tačke nagomilavanja niza nalazi "samo" beskonačno mnogo članova niza (pa ih i van te okoline može biti beskonačno mnogo). Naravno, limes niza, ako postoji, uvijek je njegova tačka nagomilavanja (i to jedina), dok obrat ne mora da važi.

Napomenimo ovde još jednu važnu razliku između pojma tačke nagomilavanja niza (x_n) i tačke nagomilavanja skupa vrijednosti niza $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Naprimjer, kao što smo to vidjeli već, niz $x_n = (-1)^n$ ima dvije tačke nagomilavanja $x' = 1$ i $x'' = -1$, dok skup vrijednosti tog niza $\{-1, 1\}$ nema niti jednu tačku nagomilavanja jer je on konačan skup.

Sljedećim važnim teoremom utvrđujemo egzistenciju tačaka nagomilavanja proizvoljnog niza.

Teorem 1.6.2

(Bolzano-Weierstrassov teorem)

1. Svaki ograničen niz realnih brojeva ima bar jednu tačku nagomilavanja u skupu $\mathbb{R}$.
2. Svaki niz realnih brojeva ima bar jednu tačku nagomilavanja u $\mathbb{R}^*$.

Dokaz :

1. Neka je niz (x_n) ograničen. To znači da postoje $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a \leq x_n \leq b$, za sve $n \in \mathbb{N}$.
   Ako dati niz ima samo konačno mnogo različitih elemenata, onda mora postojati podniz čiji su svi elementi međusobno jednaki (konstantni podniz) i taj je konvergentan, tj. dati niz ima tačku nagomilavanja.

   Pretpostavimo sada da dati niz ima beskonačno mnogo različitih elemenata. Neka je c_1 središnja tačka segmenta $[a, b]$. U bar jednom od dijelova $[a, c_1]$ ili $[c_1, b]$ mora biti beskonačno mnogo članova niza (u suprotnom niz bi imao konačno mnogo različitih elemeata). Ako je to

segment $[a, c_1]$, uvedimo oznake $a = a_1, c_1 = b_1$, a ako je to segment $[c_1, b]$, stavimo $a_1 = c_1$ i $b_1 = b$. Ako oba segmenta sadrže beskonačno mnogo članova niza, onda je svejedno koju varijantu izaberemo. Ponovimo postupak sa novodobijenim segmentom $[a_1, b_1]$; označimo sredinu segmenta sa c_2 i onaj dio u kome se nalazi beskonačno mnogo članova niza označimo sa $[a_2, b_2]$. Beskonačnim ponavljanjem ovakve konstrukcije dolazimo do niza segmenta $[a_n, b_n]$ $(n \in \mathbb{N})$, za koje nije teško utvrditi da čine familiju zatvorenih umetnutih segmenata, pa na osnovu Cantorovog aksioma, presjek ovih segmenata je neprazan, šta više zbog $b_n - a_n \to 0 (n \to +\infty)$, taj presjek je jdinstvena tačka c.
Neka je $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$ proizvoljan. Kako i $[a_2, b_2]$ sadrži beskonačno mnogo članova našeg niza, mora postojati element $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ sa indeksom $n_2 > n_1$. Postupak dalje ponavljamo analogno: Ako je izabran $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, onda $x_{n_{k+1}}$ biramo iz $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ tako da je $n_{k+1} > n_k$.
Na ovaj način smo formirali podniz (x_{n_k}) niza (x_n), za koga važi $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$. Kako je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = c$, to je na osnovu teoreme "o lopovu i dva policajca" i $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = c$. Dakle, (x_{n_k}) je konvergentan podniz pa (x_n) ima tačku nagomilavanja.

2. Slučaj kada je niz (x_n) ograničen pokazali smo u 1.
   Pretpostavimo zato da dati niz nije ograničen, npr. odozgo. Tada za svaki prirodan broj k, postoji beskonačno mnogo članova niza koji su veći od k. Neka je x_{n_1} proizvoljan član niza koji je veći od 1. Od elemenata koji su veći od 2 izaberimo jedan čiji je indeks $n_2 > n_1$. Uopšte, ako smo odredili $x_{n_{k-1}}$, onda x_{n_k} biramo tako da je veći od k i da je $n_k > n_{k-1}$.
   Ovakvom konstrukcijom dobili smo podniz (x_{n_k}) sa osobinom da je za proizvoljno $k \in \mathbb{N}$, $x_{n_k} > k$, pa je samim tim $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = +\infty$. Slučaj kada niz nije ograničen odozdo potpuno je analogan gornjem slučaju.

■

Ako sa $T(x_n)$ označimo skup svih tačaka nagomilavanja niza (x_n), onda na osnovu Bolzano-Weierstrassove teoreme zaključujemo da je on neprazan u $\mathbb{R}^*$. Koja je gornja granica broja elemenata ovog skupa neće nas zanimati, iako treba reći da se mogu konstruisati nizovi koji imaju proizvoljno mnogo tačaka nagomilavanja, šta više, postoje nizovi za koje je svaka tačka iz $\mathbb{R}$, njihova tačka nagomilavanja.

Lema 1. *Neka je (x_n) proizvoljan niz i $T(x_n)$ skup njegovih tačaka nagomilavanja. Ako je x_0 tačka nagomilavanja skupa $T(x_n)$, onda je $x_0 \in T(x_n)$.*

Teorem 1.6.3

Za proizvoljan niz (x_n), skup $T(x_n)$ ima maksimum i minimum u $\mathbb{R}^*$.

Dokaz : Na osnovu Teorema 1.6.2 skup $T(x_n)$ nije prazan, pa na osnovu aksioma potpunosti ima supremum i infimum. Ako je $T(x_n)$ konačan (tj. ima konačno mnogo elemenata) tvrđenje je trivijalno. Pretpostavimo zato da je to beskonačan skup. Ako $a = \sup T(x_n)$ nije maksimum skupa (tj. $a \notin T(x_n)$), onda na osnovu karakterizacije supremuma, tačka a bi bila tačka nagomilavanja skupa $T(x_n)$, ali onda bi na osnovu Leme 1 $a \in T(x_n)$, što je očigledno kontradikcija. Dakle, supremum skupa $T(x_n)$ pripada tom skupu pa je on maksimum skupa.
Analogno se izvodi dokaz za infimum. ■

Definicija 1.6.4

Najveća tačka nagomilavanja niza (x_n) zove se gornji limes ili limes superior niza i označava se sa

$$\limsup x_n \quad \text{ili} \quad \overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n \ .$$

Najmanja tačka nagomilavanja niza (x_n) zove se donji limes ili limes inferior i označava se sa

$$\liminf x_n \quad \text{ili} \quad \underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n \ .$$

Sljedeći teorem nam daje jednu karakterizaciju novouvedenih pojmova.

Teorem 1.6.4

Neka je (x_n) proizvoljan realan niz i neka je $\limsup x_n = \overline{x}$. Tada važi:

1. $(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ x_n < \overline{x} + \varepsilon$,
   ili riječima rečeno; za svako $\varepsilon > 0$ su skoro svi članovi niza (x_n) manji od $\overline{x} + \varepsilon$.

2. $(\forall\ \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m > n)\ x_m > \overline{x} - \varepsilon$,
   ili za svako $\varepsilon > 0$ postoji beskonačno mnogo članova niza (x_n) koji su veći od $\overline{x} - \varepsilon$.

3. Ako tačka x^* zadovoljava uslove 1. i 2. tada je $x^* = \limsup x_n$.

Dokaz :

1. Ako ova tvrdnja ne bi bila tačna, to bi značilo da niz (x_n) ima beskonačno mnogo članova u intervalu $[\overline{x}+\varepsilon, +\infty)$. Ako te članove shvatimo kao podniz našeg niza, onda bi taj podniz imao tačku nagomilavanja koja takođe pripada tom intervalu, a što bi bila kontradikcija sa maksimalnošću limesa superior.

2. Za dokaz ove tvrdnje dovoljno je primjetiti da je skup $(\overline{x} - \varepsilon, +\infty)$ okolina tačke $\overline{x}$ i primjeniti Definiciju 1.6.3.

3. Pretpostavimo da postoje dva različita broja $\overline{x}$ i x' koji zadovoljavaju 1. i 2. (neka je recimo $\overline{x} < x'$). Uzmimo proizvoljno $x \in (\overline{x}, x')$. Kako $\overline{x}$ zadovoljava 1., to je $x_n < x$ za sve $n > n_0$. Ali tada u okolini $(x, +\infty)$ ima samo konačno mnogo članova niza, pa x' ne zadovoljava uslov 2. Dakle, ne mogu postojati dvije tačke koje zadovoljavaju oba uslova.

■

Primjer 1.20. Posmatrajmo niz $x_n = (-1)^n$.
$T(x_n) = \{-1, 1\}$ pa je $\limsup x_n = 1$, a $\liminf x_n = -1$.
Primjetimo da je skup vrijednosti niza $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$ i da on kao konačan skup nema tačaka nagomilavanja. ♢

Primjer 1.21. Posmatrajmo niz $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.
Skup vrijednosti niza je $\left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$. Nije teško vidjeti da je supremum ovog skupa jednak $\frac{1}{2}$ i da je infimum skupa -1. Međutim, kako je ovo konvergentan niz, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, to je $T(x_n) = \{0\}$, pa važi

$$\limsup x_n = \liminf x_n = 0 \ .$$

♢

Primjer 1.22. Posmatrajmo niz $x_n = n^{(-1)^n}$.
Podniz (x_{2k}) našeg niza je niz čiji je opšti član $x_{2k} = 2k$ i on teži ka $+\infty$ kada k teži u beskonačnost. S druge strane podniz $x_{2k+1} = \frac{1}{2k+1} \to 0$ kada $k \to +\infty$, pa je dakle $T(x_n) = \{0, +\infty\}$, odakle zaključujemo da važi

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = +\infty \ \ , \ \ \underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = 0 \ .$$

♢

Konstatujmo najzad da iz navedenih tvrđenja neposredno slijedi sljedeća tvrdnja.

Teorem 1.6.5

Neka je (x_n) proizvoljan realan niz.

1. Niz (x_n) ima graničnu vrijednost, konačnu ili beskonačnu, ako i samo ako je
$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n \ ,$$
tj. ako i samo ako niz ima samo jednu tačku nagomilavanja.

2. Niz (x_n) konvergira (tj. ima konačnu graničnu vrijednost) ako i samo ako je $\overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = x_0 \in \mathbb{R}$, tojest ako i samo ako ima samo jednu tačku nagomilavanja i ta je konačan broj.

Poglavlje 2

Numerički redovi

2.1 Definicija i osobine numeričkog reda

Neka je dat niz realnih brojeva $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ Izraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \ , \tag{2.1.1}$$

naziva se beskonačnim redom s opštim članom a_n, ili realnim numeričkim redom. Najčešće ćemo jednostavno govoriti numerički red ili samo red. Izraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ čitamo "sumiramo članove a_n kada se n mijenja od 1 do ∞". Veličinu n u datom izrazu nazivamo brojač i ona je fiktivna veličina u tom smislu da smo umjesto slova n mogli izabrati proizvoljno drugo slovo, a da se smisao izraza ne gubi, npr. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{z=1}^{\infty} a_z$.

Zbirovi

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

nazivaju se parcijalnim sumama reda (2.1.1), tj. za izraz

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

kažemo da je n-ta parcijalna suma reda (2.1.1).

Definicija 2.1.1

Ako postoji konačan limes $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$, niza (s_n) parcijalnih suma reda (2.1.1), onda kažemo da je red konvergentan i da mu je suma jednaka s. Tada pišemo

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \; .$$

Za red koji ne konvergira (bilo da je $\lim_{n\to+\infty} s_n = \pm\infty$, bilo da taj limes ne postoji) kažemo da je divergentan.

Primjer 2.1. Posmatrajmo red $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ gdje je $q \neq 0$.
Dati red se naziva geometrijskim redom. Njegova n-ta parcijalna suma je

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \; ,$$

ako je $q \neq 1$. Odavdje slijedi da

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{1-q} \quad , \quad |q| < 1 \; .$$

Ako je $|q| \geq 1$, dati red divergira.
Specijalno, ako je $q = -1$ imamo red čija je n-ta parcijalna suma

$$s_n = 1 - 1 + 1 - 1 + ... \pm 1 = \begin{cases} 1 & , \quad n \text{ paran broj} \\ 0 & , \quad n \text{ neparan broj} \end{cases}$$

pa u ovom slučaju $\lim_{n\to+\infty} s_n$ ne postoji, tj. red je divergentan. $\diamondsuit$

Primjer 2.2. Posmatrajmo red $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
Opšti član datog reda možemo zapisati sa

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n \; ,$$

te je n-ta parcijalna suma jednaka

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (\ln(n+1) - \ln n) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1) \; .$$

Odavde sada imamo da je $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$, pa je dati red divergentan. $\diamondsuit$

Uporedo sa redom (2.1.1) posmatrajmo i red

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \ , \tag{2.1.2}$$

koga nazivamo n-ti ostatak reda (2.1.1) i označavamo ga sa r_n. Veza konvergencije reda (2.1.1) i konvergencije reda (2.1.2) data je u sljedećoj teoremi.

Teorem 2.1.1

1. Red (2.1.1) konvergira ako i samo ako konvergira red (2.1.2).
2. Red (2.1.1) konvergira ako i samo ako njegov ostatak r_n teži nuli kada $n \to +\infty$.

Dokaz :

1. Označimo sa s_n n-tu parcijalnu sumu reda (2.1.1) i sa s'_k k-tu parcijalnu sumu reda (2.1.2). Očigledno tada vrijedi jednakost

   $$s'_k = s_{n+k} - s_n \ .$$

   Ako je $\lim\limits_{k\to+\infty} s_{n+k} = s$, onda je $\lim\limits_{k\to+\infty} s'_k = s - s_n$, tj. iz konvergencije reda (2.1.1) slijedi konvergencija reda (2.1.2).
   Iz $\lim\limits_{k\to+\infty} s'_k = s'$ imali bi da je $\lim\limits_{k\to+\infty} s_{n+k} = s' + s_n$, pa važi i obrat.

2. Red (2.1.1) možemo zapisati kao

   $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s_n + r_n \ .$$

   Ako taj red konvergira i ima sumu s, onda je $r_n = s - s_n$, odakle je

   $$\lim_{n\to+\infty} r_n = \lim_{n\to+\infty} (s - s_n) = 0 \ .$$

   Obratno, ako ostatak r_n teži ka nuli kada $n \to +\infty$, iz prvog dijela teoreme slijedi da red (2.1.1) konvergira.

■

Iz ovoga tvrđenja se vidi da odbacivanje konačnog broja članova nekog reda hoće uticati eventualno na sumu tog reda u smislu promjene vrijednosti te sume, ali neće uticati na njegovu konvergenciju.

Primjer 2.3. Za geometrijski red $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ vidjeli smo da konvergira za $|q| < 1$ i da je

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \ .$$

U kontekstu gornje primjedbe o odbacivanju konačnog broja sabiraka reda i red $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ će biti konvergentan, samo što je sada

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n - q^0 = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q} \ .$$

$\diamondsuit$

Sada ćemo dati jedan od najopštijih kriterijuma konvergencije numeričkih redova.

Teorem 2.1.2

(**Cauchyjev kriterijum konvergencije**)
Red (2.1.1) konvergira ako i samo ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, p \in \mathbb{N})(n > n_0 \ \Rightarrow \ |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon) \ .$$

Dokaz ove tvrdnje nećemo izvoditi, a može se naći u [3]. Primjetimo ipak da ovaj stav govori, pojednostavljeno rečeno, da je za konvergenciju reda (2.1.1) neophodno i dovoljno da proizvoljna p-ta parcijalna suma, proizvoljnog n-tog ostatka reda se može učiniti proizvoljno malenom, što naravno direktno koincidira sa tvrđenjima u Teoremi 2.1.1.

Teorem 2.1.3

Neka su dati redovi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$. Tada vrijedi:

1. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira, tada konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} a x_n$ ($a \in \mathbb{R}$) i pri tome vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a x_n = a \sum_{n=1}^{\infty} x_n \ .$$

2. Ako oba reda konvergiraju, tada konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)$ i pri tome vrijedi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n+\sum_{n=1}^{\infty}y_n\ .$$

Dokaz :

1. Označimo sa $s_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$, a sa $S_n=ax_1+ax_2+\cdots+ax_n$. Iz egzistencije granične vrijednosti $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n$ slijedi

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}as_n=a\lim_{n\to+\infty}s_n=as\ .$$

2. Neka je $s'_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$ i $s''_n=y_1+y_2+\cdots+y_n$. Neka je

$$\lim_{n\to+\infty}s'_n=s' \ \text{ i } \ \lim_{n\to+\infty}s''_n=s''\ .$$

Ako sa S_n označimo n-tu parcijalnu sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)$, imamo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}S_n &= \lim_{n\to+\infty}((x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\cdots+(x_n+y_n))\\ &= \lim_{n\to+\infty}((x_1+\cdots x_n)+(y_1+\cdots y_n))=\lim_{n\to+\infty}s'_n+\lim_{n\to+\infty}s''_n\\ &= s'+s''\ .\end{aligned}$$

■

Sljedećom tvrdnjom dajemo neophodan uslov konvergencije numeričkog reda.

Teorem 2.1.4

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ konvergira, onda vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$.

Dokaz : Neka je red $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ konvergentan. To znači da je niz njegovih parcijalnih suma konvergentan. Iz jednakosti $s_n-s_{n-1}=x_n$ $(n>1)$, direktno slijedi

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}(s_n-s_{n-1})=\lim_{n\to+\infty}s_n-\lim_{n\to+\infty}s_{n-1}=0\ .$$

■

Da navedeni neophodan uslov konvergencije reda nije i dovoljan, pokazat ćemo primjerom.

Primjer 2.4. Posmatrajmo harmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Opšti član ovog reda je $x_n = \frac{1}{n}$ i očigledno je $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$.

Primjetimo kao prvo da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \ . \tag{2.1.3}$$

Grupišemo li članove našeg reda na slijedeći način

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) + \cdots \ ,$$

koristeći (2.1.3), svaki od sabiraka u zagradi je veći od $\frac{1}{2}$, pa je suma takvih brojeva beskonačna tj. dati red je divergentan.

Spomenimo ovdje jedan važan red:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ je konvergentan ako je } \alpha > 1, \text{ a divergentan ako je } \alpha \leq 1}$$

♢

Teorem 2.1.4 često koristimo za dokazivanje divergencije nekog reda i to tako što ga koristimo kao kontrapoziciju. Naime, naše tvrđenje je oblika $p \Rightarrow q$, gdje je p iskaz "red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira", a iskaz q je " $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$". Kako zakon kontrapozicije tvrdi $(p \Rightarrow q) \ \Leftrightarrow \ (\neg q \Rightarrow \neg p)$, onda imamo tvrđenje,

Posljedica 2. *Ako je $\lim_{n \to +\infty} x_n \neq 0$, tada je red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ divergentan.*

Primjer 2.5. Ispitajmo konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.

Kako je

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0 \ .$$

Dakle, opšti član reda ne teži ka 0, pa po navedenoj posljedici polazni red nije konvergentan.

♢

2.2 Redovi sa pozitivnim članovima

Ako su skoro svi članovi reda (x_n) nenegativni, onda za red

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$$

kažemo da je red sa pozitivnim članovima. Specifičnost ovih redova je u tome što je niz (s_n) parcijalnih suma datog reda monotono rastući niz, pa je za konvergenciju tog niza, na osnovu Teorema 1.4.2, dovoljna još i ograničenost tog niza.

Teorem 2.2.1

Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ s pozitivnim članovima je konvergentan ako i samo ako je niz njegovih parcijalnih suma ograničen.

Primjer 2.6. Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$.
Ovo je red sa pozitivnim članovima, pa je za njegovu konvergenciju dovoljno utvrditi ograničenost niza parcijalnih suma. Posmatrajmo zato

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \ .$$

Kako je $1 - \frac{1}{n+1} < 1$, zaključujemo da je niz (s_n) ograničen, tj. polazni red je konvergentan.
Šta više, ovdje imamo da je

$$s = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \ .$$

$\diamondsuit$

Stvarna potreba u radu sa redovima je utvrđivanje njihove konvergencije, češće nego određivanje same sume tog reda. U tom cilju nam je od interesa imati nekakve kriterije za utvrđivanje konvergencije. U narednim teoremama dat ćemo neke najčešće korištene kriterije.

Teorem 2.2.2: Kriterij uporedjivanja

Neka za opšte članove redova $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ (1) i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ (2) postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za $n \geq n_0$, $x_n \leq y_n$. Tada vrijedi,

1. iz konvergencije reda (2) slijedi konvergencija reda (1),
2. iz divergencije reda (1) slijedi divergencija reda (2).

Dokaz ove tvrdnje ostavljen je čitaocu za vježbu.

Primjer 2.7. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{4n^4 + 2n^2 + 1}$.

Kako je

$$x_n = \frac{3n}{4n^4 + 2n^2 + 1} \leq \frac{3n}{4n^4} = \frac{3}{4n^3} \leq \frac{1}{n^3} = y_n \ ,$$

a kako je red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergentan, to je i polazni red, na osnovu kriterija uporedjivanja, konvergentan. ♢

Primjer 2.8. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n + 1}{2^n}$.

Kako je

$$x_n = \frac{n3^n + 1}{2^n} \geq \frac{n3^n}{2^n} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n = y_n \ ,$$

a red $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ je divergentan, to je i polazni red, na osnovu kriterija uporedjivanja, divergentan. ♢

Teorem 2.2.3

(**D'Alambertov kriterij**)

1. Ako za red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ postoje $n_0 \in \mathbb{N}$ i $q \in \mathbb{R}$, takvi da je za $n \geq n_0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q < 1 \ ,$$

dati red je konvergentan.
Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da je za $n \geq n_0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 \ ,$$

dati red je divergentan.

2. Neka za članove datog reda postoji $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = l$. Tada, ako je $l < 1$ dati red je konvergentan, a ako je $l > 1$ dati red je divergentan.

Primjer 2.9. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+n+1}{3^n}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^2+(n+1)+1}{3^{n+1}}}{\frac{n^2+n+1}{3^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n+3}{3(n^2+n+1)} = \frac{1}{3} < 1 \ ,$$

pa na osnovu D'Alambertovog kriterija je polazni red konvergentan. ♢

Teorem 2.2.4

(**Cauchyjev korijeni kriterij**)

1. Ako za red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ postoje $n_0 \in \mathbb{N}$ i $q \in \mathbb{R}$, takvi da je za $n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{x_n} \leq q < 1 \ ,$$

tada je dati red konvergentan.
Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da je za $n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{x_n} \geq 1 \ ,$$

tada je dati red divergentan.

2. Neka postoji $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$. Tada, ako je $l < 1$ red konvergira, a ako je $l > 1$ red divergira.

Primjer 2.10. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n^2+n+1}{n^2-1}\right)^n$.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+n+1}{n^2-1}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n^2+n+1}{n^2-1}\right) = 2 > 1 \ ,$$

pa na osnovu Cauchyjevog korijenog kriterija zaključujemo da je dati red divergentan. ♢

Kada primjenjujemo neki od kriterija konvergencije, stvar je iskustva. Ono što treba primjetiti je da i u D'Alambertovom i u Cauchyjevom korijenom kriteriju, ako je $l = 1$ kriteriji ne daju odluku o konvergenciji reda. Tada su nam za ispitivanje konvergencije potrebni ili neki drugi alati (npr. kriterij upoređivanja), ili neki bolji kriterijumi. Jedan od tih boljih kriterija je i naredni navedeni, a kao jedan od najboljih ovdje ćemo samo spomenuti poznati Gaussov kriterij o kome se može pogledati u [2].

Teorem 2.2.5

(**Kummerov kriterij**)
Neka je (c_n) niz pozitivnih realnih brojeva, takav da je red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ divergentan i neka je dat red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Označimo sa $K_n = c_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - c_{n+1}$, gdje je x_n opšti član reda ($n \in \mathbb{N}$).

1. Ako postoji $\delta \geq 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$, takvi da je za $n \geq n_0$, $K_n \geq \delta$, onda dati red konvergira.
   Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da je za $n \geq n_0$, $K_n \leq 0$, onda dati red divergira.
2. Neka postoji $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = l$. Ako je $l > 0$ red konvergira, a ako je $l < 0$ rad divergira.

Specijalno, ako u Kummerovom kriteriju izaberemo da je $c_n = n$ ($n \in \mathbb{N}$), dobijamo kriterij koji se naziva Raabeov kriterij konvergencije i on glasi:

Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za $n \geq n_0$ ispunjeno

$$n\left(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\right) \geq q > 1 \ ,$$

onda je red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergentan.
Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da je za $n \geq n_0$ ispunjeno

$$n\left(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\right) \leq 1 \ ,$$

dati red je divergentan.

Naravno, i ovaj kriterij dajemo u formi koja je praktičnija za upotrebu, a ona glasi, ako postoji

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\right) = l \ ,$$

onda je polazni red konvergentan za $l > 1$, a divergentan za $l < 1$.

Primjetimo takođe da izborom niza $c_n = 1$ ($n \in \mathbb{N}$), imamo D'Alambertov kriterij, stim da se posmatra kada je $l > 0$ ili $l < 0$.

2.3 Redovi sa proizvoljnim članovima

Posmatrajmo proizvoljan niz realnih brojeva $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sada možemo posmatrati redove,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \ . \tag{2.3.1}$$

i

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \tag{2.3.2}$$

Za red (2.3.1) razlikovat ćemo dvije vrste konvergencije.

Definicija 2.3.1

Ako red (2.3.2) konvergira, kažemo da red (2.3.1) konvergira apsolutno.

Za red (2.3.1) kažemo da konvergira uslovno ako je on konvergentan, a pri tome ne konvergira apsolutno.

Teorem 2.3.1

Ako je red (2.3.2) konvergentan, konvergentan je i red (2.3.1).

Dokaz : Dokaz slijedi na osnovu Cauchyjevog opšteg kriterija konvergencije redova i nejednakosti

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p}| \leq |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \cdots + |x_{n+p}|$$

■

Od svih redova sa proizvoljnim članovima mi ćemo se pozabaviti jednom specijalnom klasom, a to su redovi oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots + (-1)^{n+1} c_n + \cdots \ ,$$

gdje su c_n realni brojevi istog znaka (pozitivni ili negativni). Ovakve redove nazivamo alternativnim redovima.

Teorem 2.3.2

(**Leibnitzov kriterij**)

Neka je dat alternativni red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$. Ako je niz (x_n) monotono opadajući ($x_{n+1} \leq x_n$) i ako je $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$, tada je red konvergentan.

Primjer 2.11. Posmatrajmo alternativni red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Koristeći notaciju u Leibnitzovom kriteriju, imamo da je niz zadat sa $x_n = \frac{1}{n}$, monotono opadajući jer za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = x_n \ ,$$

i $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Sada na osnovu Leibnitzovog kriterija zaključujemo da je dati red konvergentan. Šta više, on je uslovno konvergentan jer red sa apsolutnim vrijednostima, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentan. $\diamondsuit$

Poglavlje 3

Funkcionalni nizovi

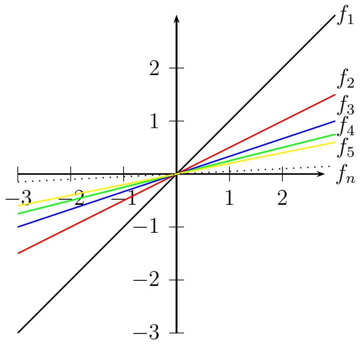
U prethodnom poglavlju razmatrali smo "obične" numeričke nizove i redove. Pod ovim "obične" želi se istaći da smo posmatrali nizove i redove čiji su članovi, odnosno sabirci, obični realni brojevi. Međutim, u prilici smo često razmatrati nizove "bilo čega", ljudi, dana, otkucaja srca i sl. U ovom poglavlju ćemo razmatrati nizove čiji su članovi funkcije, tzv. funkcionalne nizove, a onda ćemo po sličnom receptu kao i kod numeričkih nizova, uvesti i pojam funkcionalnog reda, reda kod koga sabiramo funkcije.

3.1 Definicija i osobine

Što se tiče notacije, zadržat ćemo onu koju smo uveli kod numeričkih nizova. Tako ćemo oznakom $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, označavati beskonačni funkcionalni niz, podrazumijevajući da su f_n $(n \in \mathbb{N})$ funkcije definisane na nekom skupu. Kada kažemo da je funkcionalni niz definisan na nekom skupu, smatramo da je svaka funkcija tog niza definisana na tom skupu (oblast definisanosti svake funkcije je taj skup).

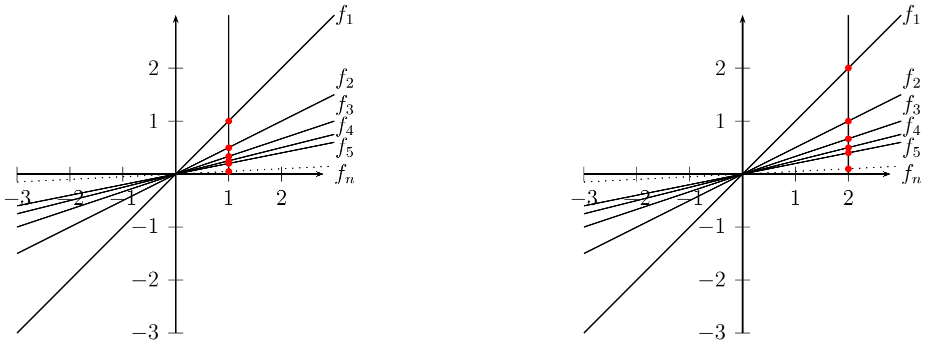
Primjer 3.1. Posmatrajmo funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ definisan na $\mathbb{R}$, gdje je za $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$. Svaku od funkcija možemo predstaviti grafički, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \dfrac{x}{2}$, $f_3(x) = \dfrac{x}{3}$, $f_4(x) = \dfrac{x}{4}$, $f_5(x) = \dfrac{x}{5}$ itd., i one predstavljaju prave linije koje prolaze kroz koordinatni početak i imaju sve manji nagib prema x-osi (Slika 3.1).

Izaberemo li neko konkretno $x \in \mathbb{R}$, npr $x = 1$, dati funkcionalni niz postaje obični numerički niz $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, čije ponašanje sada možemo ispitivati alatima usvojenim u prethodnom poglavlju. I ovu činjenicu možemo predstaviti grafički, a dobijamo to tako što kroz tačku $x = 1$ povučemo vertikalnu



Slika 3.1: Funkcionalni niz $(\frac{x}{n})_{n\in\mathbb{N}}$.

pravu, koja u presjeku sa funkcijama f_n daje upravo tačke koje predstavljaju niz $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.



Slika 3.2: Funkcionalni niz $(\frac{x}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ u tačkama $x = 1$ (lijevo) i $x = 2$ (desno)

$\diamondsuit$

U gornjem primjeru smo uzimajući konkretno $x = 1$ (slika lijevo), od funkcionalnog niza dobili numerički niz $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, koji je konvergentan, šta više

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \ .$$

Uzimajući neku drugu vrijednost, npr. $x = 2$ (slika desno), naš funkcionalni niz opet postaje konvergentan numerički niz $\left(\frac{2}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, koji takođe konvergira ka 0. Uzimajući bilo koju konkretnu (bez obzira koliko veliku, ali fiksiranu) vrijednost $x = M \in \mathbb{R}$, nije teško uvjeriti se da će vrijediti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M}{n} = 0 \ .$$

Dakle, naš niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, za proizvoljan $x \in \mathbb{R}$ je konvergentan numerički niz, tj. vrijedi

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \ .$$

Pri tome, formalno možemo reći da funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka funkciji $f(x) = 0$, ali "samo" u svim tačkama skupa na kome je definisan niz. Ovakvu osobinu funkcionalnog niza nazivamo "obična" konvergencija ili *konvergencija po tačkama.*

Definicija 3.1.1

Neka je niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ definisan na skupu $A \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan po tačkama, ako vrijedi

$$(\forall x \in A) \text{ postoji konačan } \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ .$$

Primjer 3.2. Posmatrajmo funkcionalni niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, zadat sa

$$n \in \mathbb{N} \ , \ x \in \mathbb{R} \ , \ f_n(x) = \frac{nx + x^2}{n^2} \ .$$

Za proizvoljno $x \in \mathbb{R}$ imamo

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} \right) = x \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 + 0 = 0 \ .$$

Dakle, posmatrani niz konvergira po tačkama ka nula-funkciji, tj. funkciji identički jednakoj 0 ($f \equiv 0$). $\diamondsuit$

Primjer 3.3. Zadat je funkcionalni niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definisan na $[0,1]$, sa

$$f_n(x) = n^2 x^n \ .$$

Primjetimo kao prvo da je za sve $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$. Dakle, niz $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ je konstantni niz i konvergira ka 0.
Neka je sada $x \in (0,1)$, proizvoljan. Zbog jednakosti

$$n^2 x^n = n^2 e^{\ln x^n} = n^2 e^{n \ln x}$$

i kako je $\ln x < 0$ za $x \in (0,1)$, na osnovu poznatog nam iz numeričkih nizova, zaključujemo da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \ , \ x \in (0,1) \ .$$

Konačno, uzimajući $x = 1$, imamo $f_n(1) = n^2$ i pri tome je

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty \ ,$$

pa na osnovu svega ovoga zaključujemo da polazni funkcionalni niz nije konvergentan po tačkama na segmentu $[0,1]$. $\diamondsuit$

Primjer 3.4. Posmatrajmo funkcionalni niz zadat sa $f_n(x) = \cos^n x$, definisan na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Znajući osobine kosinus funkcije imamo da je za bilo koje $-\frac{\pi}{2} \leq x < 0$ ili $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$, zadovoljeno

$$0 \leq \cos x < 1 \ .$$

Ovo ne znači ništa drugo do da je za svako $x \neq 0$ zadovoljeno

$$\lim_{n\to\infty} \cos^n x = 0 \ .$$

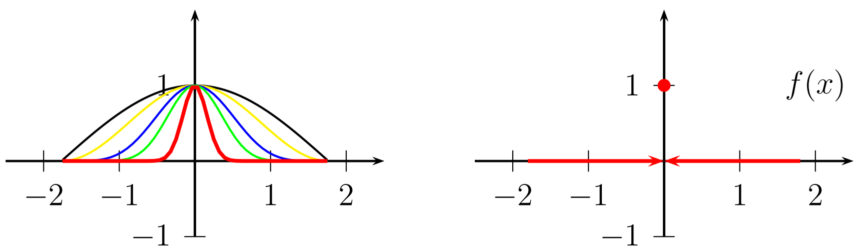
Ako je $x = 0$, tada je $f_n(0) = \cos^n 0 = 1$, pa je i

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1 \ .$$

Dakle, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ postoji i konačan je za sve $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Pri tome ovaj niz konvergira po tačkama ka funkciji

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \text{ ili } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

crna $f_1(x)$
žuta $f_2(x)$
plava $f_5(x)$
zelena $f_{10}(x)$
crvena $f_{50}(x)$



♢

3.2 Uniformna konvergencija

Činjenica da postoji konačan $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, za svako $x \in A$, obezbjeđuje nam postojanje neke funkcije $f(x)$ za koju onda važi

$$(\forall x \in A) \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \ , \tag{3.2.1}$$

i tada kažemo da niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po tačkama ili tačkasto ka funkciji $f(x)$. Ako raspišemo limes u (3.2.1), onda definicija konvergencije po tačkama glasi

$$(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) \ . \tag{3.2.2}$$

Iz Definicije 3.1.1, tj. iz iskaza (3.2.2), vidimo da je "postojeći" n_0 ovisan i o $x \in A$ i o $\varepsilon > 0$. Ako bi skup A bio konačan (sa konačno mnogo elemenata), tada bi bilo moguće izabrati jedan jedinstven n_0^*, tako da bi iskaz (3.2.2) bio tačan za sve $\varepsilon > 0$, ali ovaj put neovisno o $x \in A$. Naime, takav n_0^* bi mogli izabrati na sljedeći način

$$n_0^* = \max\{n_0 |\ x \in A\}\ .$$

Ukoliko je skup A beskonačan, ovakav način izbora n_0^* bi bio upitan jer bi on tada bio

$$n_0^* = \sup\{n_0 |\ x \in A\}\ ,$$

a supremum skupa ne bi morao biti konačan. Dakle, postoje slučajevi kada možemo izabrati neko "univerzalno" n_0 za sve $x \in A$, i vidjet ćemo da to ne mora biti vezano samo za konačnost skupa A.

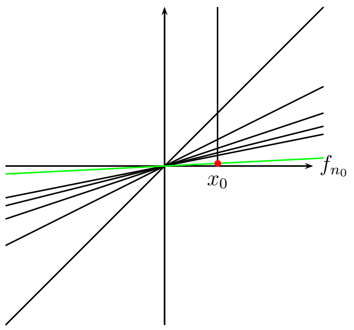
Definicija 3.2.1

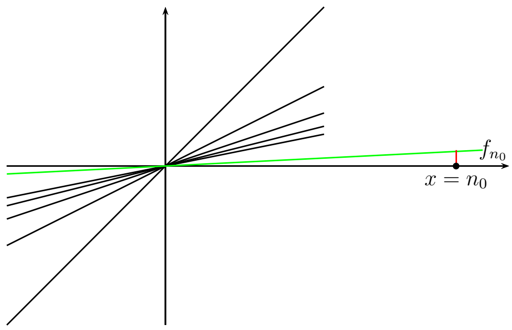
Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih funkcija definisanih na A. Kažemo da dati niz uniformno konvergira ka funkciji f na skupu A ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in A)(n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)\ .$$

Iz same definicije uniformne konvergencije funkcionalnog niza vidimo da je postojeći n_0 ovisan samo o ε, za razliku od konvergencije po tačkama, pa je time uniformna konvergencija "jača" od konvergencije po tačkama. Drugačije rečeno, ako je niz uniformo konvergentan, onda je on konvergentan i po tačkama. Obrat u opštem slučaju ne mora da važi, što pokazujemo sljedećim primjerom.

Primjer 3.5. U primjeru 3.1 posmatrali smo niz funkcija zadatih sa $f_n(x) = \frac{x}{n}$ i vidjeli smo da je taj niz konvergentan po tačkama ka funkciji $f_0 \equiv 0$. Ovo je značilo da za ma koje fiksirano x_0, možemo naći funkciju f_{n_0}, koja je u toj tački proizvoljno blizu funkciji f_0 (x-osi). To je prikazano na slici lijevo.





Međutim, uniformna konvergencija zahtjeva da ta ista funkcija f_{n_0} ima tu osobinu (proizvoljno bliska funkciji f) u svakoj tački, a što očigledno nije tačno samo ako se dovoljno udaljimo na x-osi (slika desno). Uzmemo li da je $x = n_0$, tada imamo

$$f_{n_0}(x) = \frac{n_0}{n_0} = 1 ,$$

te je dakle u ovoj tački naša funkcija f_{n_0} za 1 udaljena od x-ose. Odemo li još dalje sa x-om, npr. neka je $x = 2n_0$, tada je $f_{n_0}(x) = 2$, dakle još dalje od x-ose. Ovo nam pokazuje da je u jednom "trenutku" funkcija f_{n_0} zaista blizu funkciji $f \equiv 0$, ali da njeno rastojanje od te iste funkcije možemo učiniti proizvoljno velikim, samo treba otići dovoljno daleko na x-osi. Tj. za svaki x_0 možemo naći funkciju f_{n_0} koja je dovoljno bliska funkciji f, ali jedna zajednička funkcija f_n koja je proizvoljno bliska funkciji f za sve x-ove, ne postoji, te ovaj niz nije uniformno konvergentan.

♢

Primjer 3.6. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz definisan na $(0, +\infty)$, definisan sa

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2} .$$

Za proizvoljno $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $1 + n^2x^2 \sim n^2x^2$, tj. ova dva niza su asimptotski jednaki, što ekvivalentno znači

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2x^2}{1 + n^2x^2} = 1 ,$$

a ovo nam onda omogućava sljedeće rezonovanje

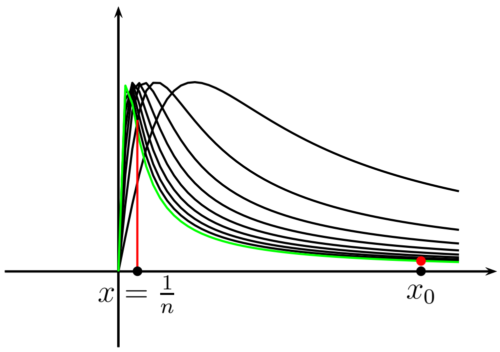
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{x} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 .$$

Dakle, posmatrani niz je konvergentan po tačkama i konvergira ka funkciji $f \equiv 0$.

Međutim, neka je $\varepsilon < \frac{1}{2}$ proizvoljan. Izaberemo li $x = \frac{1}{n}$, tada imamo

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \left|\frac{n\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}} - 0\right| = \frac{1}{2} > \varepsilon \ .$$

Vidimo da niti za jedno $n \in \mathbb{N}$ razliku $|f_n(x) - f(x)|$ ne možemo učiniti manjom od $\frac{1}{2}$, pa dakle ni manjom od ε, time posmatrani niz nije uniformno konvergentan. Na sljedećoj slici prikazan je posmatrani niz grafički, a objašnjenje zašto se nema uniformna konvergencija je identično kao u prethodnom primjeru, samo treba posmatrati tačke dovoljno bliske tački 0.



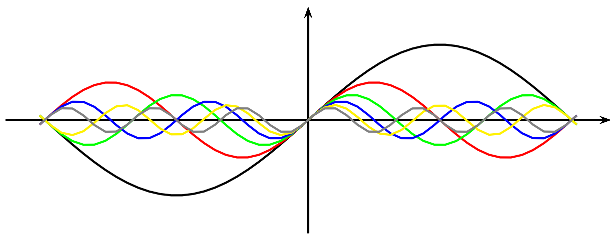
Slika 3.3: Funkcionalni niz $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$

$\diamondsuit$

Primjer 3.7. Posmatrajmo niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, definisan za sve $x \in \mathbb{R}$ sa

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n} \ .$$

n pod sinusom ($\sin nx$) utiče na periodičnost funkcije, a n u imeniocu ($\frac{1}{n}$) utiče na amplitudu funkcije. Tako je nekoliko prvih funkcija posmatranog niza predstavljeno sljedećom slikom.



Nejednakost

$$|f_n(x) - 0| = \frac{|\sin nx|}{n} \leq \frac{1}{n} \ ,$$

vrijedi neovisno o $x \in \mathbb{R}$. Kako pri tome za proizvoljno maleno $\varepsilon > 0$, veličinu $\frac{1}{n}$ možemo učiniti manjom od njega, samo treba izabrati dovoljno veliko $n \in \mathbb{N}$, zaključujemo da je dati niz uniformno konvergentan.

$\diamondsuit$

O značaju i karakteristikama uniformne konvergencije pričat ćemo u sljedećoj sekciji. Ovdje navedimo još samo neke od najelementarnijih osobina uniformne konvergencije.

Teorem 3.2.1

Neka su $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcionalni nizovi.

1. Ako su dati nizovi uniformno konvergentni na skupu $A \subseteq \mathbb{R}$, tada je i niz $(\alpha f_n + \beta g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergentan na tom skupu.
2. Ako je niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergentan na skupu $A \subseteq \mathbb{R}$, tada je on uniformno konvergentan na proizvoljnom podskupu od A.
3. Ako je niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergentan na skupovima $A, B \subseteq \mathbb{R}$, tada je on uniformno konvergentan i na $A \cup B$.

3.2.1 Značaj uniformne konvergencije

Značaj uniformne konvergencije imamo u raznim izračunavanjima kod kojih je bitan granični proces.

Primjer 3.8. Posmatrajmo funkcionalni niz zadat sa $f_n(x) = (1-x)^n$, definisan na intervalu $(0,2)$. Za proizvoljan $x \in (0,2)$ je $|1-x| < 1$, pa vrijedi

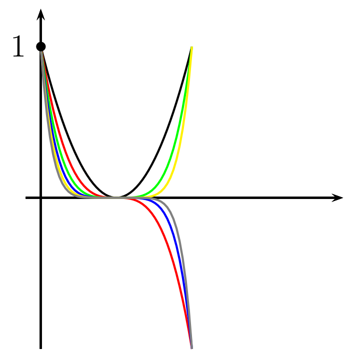
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \ ,$$

a tim prije će vrijediti onda i

$$\lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \ .$$

S druge strane zbog neprekidnosti funkcija f_n i $f_n(0) = 1$ za svako $n \in \mathbb{N}$, imamo

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1 \ .$$



Slika 3.4: Funkcionalni niz $f_n(x) = (1-x)^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $0 < x < 2$.)

Iako nekako neočekivano, dakle vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0} f_n(x) \neq \lim_{x\to 0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ .$$

$\diamondsuit$

Kako rekosmo, rezultat u gornjem primjeru je nekako neočekivan, ali ipak ne i opštevažeći. Naime, vrijedi

Teorem 3.2.2

Neka je niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergentan na skupu I, ka funkciji $f(x)$. Ako za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji konačan $\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ (a je tačka nagomilavanja skipa I), tada postoji i konačna je, granična vrijednost $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ i pri tome vrijedi

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ .$$

Dakle, pod pretpostavkom uniformne konvergencije funkcionalnog niza, doz-voljena je zamjena dvaju graničnih procesa koji djeluju na funkcionalni niz. Iz ove teoreme takođe neposredno slijedi i mnogo važnija tvrdnja. Naime, granična funkcija $f(x)$, uniformno konvergentnog niza neprekidnih funkcija je i sama neprekidna funkcija. Zaista, za proizvoljno $a \in I$, ako su sve funkcije f_n neprekidne, onda vrijedi

$$\lim_{x\to a} f_n(x) = f_n(a) \ .$$

Sada zbog uniformne konvergencije i prethodne teoreme imamo

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a) \ .$$

Ovo iskazujemo u obliku teoreme

Teorem 3.2.3

Neka funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergira ka funkciji $f(x)$, na skupu I. Ako su sve funkcije f_n neprekidne na I, tada je i funkcija f neprekidna na I.

Da su uslovi gornje teoreme zaista obavezni za iskazanu tvrdnju može nam poslužiti Primjer 3.4. Za svako $n\in\mathbb{N}$, funkcije $f_n(x)=\cos^n x$ su neprekidne, ali funkcija $f(x)$ kojoj one konvergiraju (po tačkama) nije neprekidna funkcija.

Radeći sa funkcionalnim nizovima, naravno da njegove članove možemo diferencirati i integrirati. Primjenjujući obje ove operacije, od polaznog niza dobijamo ponovo funkcionalni niz. Postavlja se pitanje veze između ovih novodobijenih i polaznog niza, a ona je data u sljedećim dvjema teoremama.

Teorem 3.2.4

Neka je dat funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, čije su funkcije definisane i diferencijabilne na intervalu (a,b). Pretpostavimo da je naš niz konvergentan u bar jednoj tački intervala (a,b) i neka je niz $(f'_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergentan na (a,b). Tada je i niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergentan, a granična funkcija ovog niza je diferencijabilna na (a,b) i vrijedi

$$(\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)\ .$$

Ovaj teorem nam daje uslove pod kojima iz uniformne konvergencije "izvodnog" niza imamo uniformnu konvergenciju polaznog niza. Međutim i veoma prosti primjeri nam pokazuju da je iz konvergencije polaznog niza veoma teško obezbjediti konvergenciju "izvodnog" niza.

Primjer 3.9. Posmatrajmo već spomenuti funkcionalni niz zadat sa

$$f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}\ ,$$

i kao što smo to pokazali, on je uniformno konvergentan na $\mathbb{R}$. Međutim, odgovarajući "izvodni" niz glasi

$$f'_n(x)=\cos nx\ ,$$

a ovaj niz nije konvergentan čak ni po tačkama. $\diamondsuit$

U suštini, Teorem 3.2.4 nam daje uslove kada je izvod limesa $((\lim_{n\to\infty} f_n(x))')$ jednak limesu izvoda $(\lim_{n\to\infty} f'_n(x))$, a ovo možemo lahko uvezati i sa Teoremom 3.2.2, ako se prisjetimo da je izvod funkcije definisan graničnim procesom.

Teorem 3.2.5

Neka je niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergentan na segmentu $[a, b]$ i neka su sve funkcije f_n integrabilne na tom segmentu. Tada je i granična funkcija posmatranog niza integrabilna na $[a, b]$ i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \ .$$

Kao i teorem o zamjeni izvoda i limesa i ovaj teorem nam govori pod kojim uslovom možemo "proći" limesom kroz integral, tj. zamjeniti mjesta limesa i integrala. On nam takođe ponekad omogućava i lakši način izračunavanja integrala.

Primjer 3.10. Izračunati $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{ndx}{x^3 + n}$.

Rješavanje ovakvog problema svodi se na to da prvo riješimo integral, a zatim riješavamo preostali limes. Međutim, ako smijemo zamjeniti mjesta limesa i integrala, s obzirom na činjenicu da vrijedi $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$, rješenje je trivijalno

$$\int_0^1 1dx = 1 \ .$$

Ostaje samo vidjeti da li smijemo izvršiti navedenu zamjenu, tj. da li je funkcionalni niz zadat sa $f_n(x) = \frac{n}{x^3 + n}$ uniformno konvergentan.
Za $x \in [0, 1]$ vrijedi

$$0 \leq \left|1 - \frac{n}{x^3 + n}\right| = \frac{x^3}{x^3 + n} \leq \frac{1}{n} \ ,$$

pa je naš niz uniformno konvergentan, a time je

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{ndx}{x^3 + n} = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{ndx}{x^3 + n} = 1 \ .$$

♢

Naravno da zamjenu mjesta limesa i integrala ne smijemo vršiti ako nismo ispitali uslove kada to smijemo. Naime, posmatrajmo sljedeći primjer.

Primjer 3.11. Posmatrajmo funkcionalni niz zadat sa $f_n(x) = n^2 xe^{-nx}$. Parcijalnom integracijom dobijamo

$$\int_0^1 f_n(x)dx = n\int_0^1 xe^{-nx}dx = 1 - (n+1)e^{-n} \ ,$$

a onda imamo

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = 1 \ .$$

S druge strane, za proizvoljno $x \in [0,1]$ imamo

$$\lim_{n\to\infty} n^2 xe^{-nx} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2 x}{e^{nx}} = 0 \ .$$

Ovo bi onda značilo da je

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0 \ ,$$

pa dakle zamjena limesa i integrala u ovom primjeru nije opravdana. $\diamondsuit$

Poglavlje 4

Funkcionalni redovi

4.1 Definicija i osobine

Paralelno sa posmatranjem funkcionalnih nizova, isto kao i kod numeričkih nizova, posmatramo sada beskonačne sume čiji su sabirci funkcije, tj. posmatrat ćemo funkcionalne redove. Za zadati funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ definisan na nekom skupu, izraz

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \tag{4.1.1}$$

nazivamo funkcionalni red. Slično kao kod numeričkih redova, uvodimo pojam parcijalnih suma. Izraz

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\ ,$$

nazivamo n-ta parcijalna suma reda (4.1.1), a izraz

$$r_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(x)$$

nazivano n-ti ostatak reda (4.1.1).

Definicija 4.1.1

Za red (4.1.1) kažemo da je uniformno konvergentan na skupu I ako njegov niz parcijalnih suma $S_n(x)$ uniformno konvergira ka sumi $S(x)$ ovog reda na skupu I.

Ekvivalentno kao kod numeričkih redova dajemo prvi kriterij uniformne konvergencije funkcionalnog reda.

Teorem 4.1.1

Red (4.1.1) uniformno konvergira na skupu I ako i samo ako niz $r_n(x)$ njegovih ostataka uniformno konvergira ka funkciji identički jednakoj 0 na skupu I.

Jedan od osnovnih kriterija konvergencija, pa i uniformne konvergencije funkcionalnog reda, jeste Cauchyjev kriterij.

Teorem 4.1.2

(Cauchyjev kriterij uniformne konvergencije)
Red (4.1.1) uniformno konvergira na skupu I ako i samo ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall k \in \mathbb{N})(\forall x \in I)\ |f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+k}(x)| < \varepsilon$$

Pored ovoga, veoma jednostavan i koristan kriterij za uniformnu konvergenciju dat je sljedećom teoremom.

Teorem 4.1.3

(Weierstrassov kriterij uniformne konvergencije)
Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitivan numerički niz za koga vrijedi da je za skoro svako $n \in \mathbb{N}$ i svako $x \in I$ zadovoljeno

$$|f_n(x)| \leq a_n \ .$$

Ako je red $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ konvergentan, tada je red (4.1.1) uniformno konvergentan na skupu I.

Primjer 4.1. Red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2} \ ,$$

je uniformno konvergentan na $\mathbb{R}$ jer za bilo koje $x \in \mathbb{R}$ i za bilo koje $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{x^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2} \ ,$$

a kao što nam je poznato, svi redovi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \ , \ \alpha > 1$$

su konvergentni. $\diamondsuit$

Pored ova dva kriterija, navedimo još dva kriterija koji predstavljaju veoma moćan alat za utvrđivanje uniformne konvergencije funkcionalnih redova.

Teorem 4.1.4

(Abelov test uniformne konvergencije)
Ako važe uslovi

1. Funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ je monoton za sve $x \in I$ i uniformno ograničen (tj. postoji univerzalna konstanta $M \in \mathbb{R}$, takva da je $|f_n(x)| \leq M$, za sve $x \in I$ i za sve $n \in \mathbb{N}$).
2. Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ je uniformno konvergentan na I.

Tada je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ uniformno konvergentan na I.

Primjer 4.2. Ispitati uniformnu konvergenciju funkcionalnog reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2(n+x)} \ ,$$

na intervalu $(0, +\infty)$.
Označimo sa

$$f_n(x) = \frac{1}{n+x} \ , \ g_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2} \ .$$

Za proizvoljne $x \in (0, +\infty)$ i $n \in \mathbb{N}$, očigledno vrijedi $|f_n(x)| \leq 1$, te je prvi niz uniformno ograničen. Osim toga je

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+x} = f_n(x) \ ,$$

pa je on i monotono opadajući. Dakle zadovoljen je prvi uslov Abelovog kriterija.
Kako za drugi niz vrijedi

$$|g_n(x)| = \frac{|\sin nx|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} ,$$

za proizvoljno $x \in (0, +\infty)$ i za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$, na osnovu Weierstrassovog kriterija red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ je uniformno konvergentan, te je zadovoljen i drugi uslov. Na osnovu Abelovog kriterija, polazni red je uniformno konvergentan. $\diamondsuit$

Teorem 4.1.5

(Dirichletov test uniformne konvergencije)
Neka su zadovoljeni uslovi

1. Za svako $x \in I$ je funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton i uniformno teži ka 0 na skupu I.
2. Niz parcijalnih suma $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k(x)$ je uniformno ograničen na I.

Tada je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ uniformno konvergentan na I.

Primjer 4.3. Ispitati uniformnu konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$, $(x \in (0, +\infty))$.
Označimo sa

$$f_n(x) = \frac{1}{n+x} \ , \ g_n(x) = (-1)^n \ .$$

Kao i malo prije, niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je monotono opadajući niz i neovisno o $x \in (0, +\infty)$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \ .$$

Za parcijalne sume $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k$, očigledno vrijedi $|S_n(x)| \leq 1$. Dakle, zadovoljena su oba oslova, pa na osnovu Dirichletovog testa, polazni red je uniformno konvergentan. $\diamondsuit$

Cilj priče o uniformnoj konvergenciji funkcionalnog reda jeste informacija da li suma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ predstavlja ili ne predstavlja, neku funkciju. U slučaju uniformne konvergencije datog reda, ta funkcija je potpuno određena i tada pišemo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \ .$$

Sada se postavlja pitanje da li sa ovako definisanom funkcijom možemo raditi neke od operacija koje su nam od značaja, a takve su granični procesi, diferenciranje i integracija. Odgovore na ova pitanja imamo u sljedećim teoremama.

Teorem 4.1.6

Ako je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformno konvergentan na skupu I i ako za svaki prirodan broj n postoji i konačan je $\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$, gdje je a tačka nagomilavanja skupa I, tada vrijedi

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) \ ,$$

pri čemu je red na desnoj strani gornje jednakosti konvergentan.

Poznato nam je pravilo

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \ ,$$

pod pretpostavkom o postojanju graničnih vrijednosti funkcija f i g. Ovo pravilo možemo i generalizovati i iskazati ga u obliku: limes zbira konačno mnogo funkcija jednak je zbiru limesa tih funkcija, naravno pod uslovom da postoje granične vrijednosti pojedinačnih funkcija. Da li limes može "proći" i kroz sumu beskonačno mnogo funkcija? Gornji teorem nam daje odgovor upravo na to pitanje i vidimo da pored uslova o postojanju graničnih vrijednosti pojedinačnih funkcija, da bi limes i beskonačna suma zamjenili mjesta, moramo imati i uslov o uniformnoj konvergenciji funkcionalnog reda. Direktno na ovaj teorem se onda naslanja i sljedeće tvrđenje.

Teorem 4.1.7

Ako su funkcije $f_n(x)$ neprekidne za svako $n \in \mathbb{N}$ na skupu I i ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformno konvergentan tada je i funkcija

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) ,$$

neprekidna na skupu I.

Posmatrajmo sada funkcionalni red definisan sa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} .$$

Abelovim testom se lahko pokazuje da je dati red uniformno konvergentan na čitavom $\mathbb{R}$. Dakle, dati red definiše neku funkciju $f(x)$ na $\mathbb{R}$, tj.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} .$$

Logičnim se postavlja pitanje, a šta je izvod ovako definisane funkcije? Ishitren odgovor bi bio zasnovan na od ranije poznatoj činjenici da je izvod zbira funkcija jednak zbiru izvoda tih funkcija jer se to pravilo odnosilo na zbir od konačno mnogo funkcija. Ako bi smo ipak postupili tako, imali bi

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(n^2 x)}{n^2} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2 x) .$$

Ali trivijalno je vidljivo da suma na desnoj strani nije konvergentan red čak niti za jedno $x \in \mathbb{R}$, a to onda znači da izraz na lijevoj strani, $f'(x)$, uopšte ne postoji. Znači da naći izvod od zbira beskonačno mnogo funkcija, po pravilu zbira izvoda svake od funkcija, zahtjeva neke dodatne uslove.

Teorem 4.1.8

Neka je red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergentan u bar jednoj tački intervala (a, b) i neka su funkcije $f_n(x)$ diferencijabilne na (a, b), za svako $n \in \mathbb{N}$. Ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ uniformno konvergentan na (a, b), tada je takav i red

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ i pri tome vrijedi

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)\ ,\ x \in (a,b)\ .$$

Gornji teorem nam daje pravilo o diferenciranju reda član po član, a narednim navodimo pravilo o integraciji reda član po član.

Teorem 4.1.9

Neka je red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformno konvergentan na segmentu $[a,b]$ i neka su funkcije $f_n(x)$ integrabilne na tom segmentu, za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada je i suma reda integrabilna na segmentu $[a,b]$ i pri tome vrijedi

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\ .$$

4.2 Stepeni redovi

Pod pojmom stepene funkcije podrazumijevamo funkciju oblika $f(x) = cx^n$, $n \in \mathbb{N}$. Specijalan slučaj funkcionalnog reda, kada su funkcije koje sabiramo stepene funkcije, nazivamo stepeni red. Dakle, ako je za $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = a_n x^n$, tada red

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\ , \tag{4.2.1}$$

nazivamo stepeni ili potencijalni red. Naprimjer, suma geometrijskog niza $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, predstavlja jedan stepeni red kod koga su $a_n = 1$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Izučavanje ovih redova kao posebne cjeline, opravdavamo time da je njihovo pojavljivanje u praksi jedno od najčešćih, a i činjenicom da rezultati njihovog izučavanja opravdavaju mnoge stvari kod ponašnja Taylorovog reda.

Neke elementarne tvrdnje o konvergenciji ovakvih redova imamo upravo iz njihovog oblika.

Teorem 4.2.1

Neka je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ konvergentan za neko konkretno $x_0 \neq 0$. Tada je on

- apsolutno konvergentan za svako x za koga važi $|x| < |x_0|$;
- uniformno konvergentan za svako x za koga je $|x| \leq r$, gdje je $r < |x_0|$.

Dokaz : Neka je za $x_0 \neq 0$, red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ konvergentan. Tada njegov opšti član mora težiti 0, a time je on kao konvergentan niz i ograničen. Dakle, postoji konstanta $M > 0$, takva da je za sve $n \in \mathbb{N}$ zadovoljeno $|a_n x_0^n| \leq M$. Neka je sada $|x| < |x_0|$. Tada vrijedi

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right| \leq M \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right| .$$

Kako je količnik $\left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| < 1$, to je red $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right|^n$, kao suma geometrijskog reda, konvergentan, a onda na osnovu poredbenog kriterija je i red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n|$ konvergentan. Drugačije rečeno, red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ je apsoutno konvergentan.

Dokažimo sada i drugi dio tvrđenja, tj. neka je $|x| \leq r$, gdje je $r < |x_0|$. Na osnovu prvog dijela dokaza, red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ je apsolutno konvergentan. Kako za izabrano x vrijedi

$$|a_n x^n| = |a_n||x^n| \leq |a_n| r^n ,$$

na osnovu Weierstrassovog kriterija imamo uniformnu konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. ■

Teorem 4.2.2

Ako stepeni red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ divergira u tački $x_0 \neq 0$, tada je ovaj red divergentan i za svako x koje zadovoljava $|x| > |x_0|$.

Dokaz : Ako bi smo pretpostavili suprotno, tj. neka je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ divergentan i neka je za neko x, takvo da je $|x| > |x_0|$, red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ konvergentan. Tada bi smo prema prethodnoj teoremi morali imati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$, što je očigledno kontradiktorno. ■

Kako je svaki stepeni red konvergentan u tački $x = 0$, ako imamo konvergenciju i u nekoj tački $x_0 \neq 0$, na osnovu Teoreme 4.2.1 zaključujemo da je taj red konvergentan na intervalu $(-x_0, x_0)$. Analogno, ako stepeni red divergira u nekoj tački x_1, na osnovu Teorema 4.2.2 on je divergentan i na skupu $(-\infty, -x_1] \cup [x_1, +\infty)$. Na osnovu svega rečenog zaključujemo da za proizvoljan stepeni red postoji neka granična veličina R, takva da je unutar $(-R, R)$ dati red konvergentan, a van tog intervala ($R < +\infty$) posmatrani red je divergentan. Ovo nas navodi da takvu veličinu i definišemo.

Definicija 4.2.1

Za zadati stepeni red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, broj

$$R = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ |x| \;\middle|\; \text{red } \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergira} \right\},$$

nazivamo poluprečnik konvergencije posmatranog reda.

Kao direktna posljedica Teorema 4.2.1 i Teorema 4.2.2 imamo sljedeće

Teorem 4.2.3

Neka je R poluprečnik konvergencije stepenog reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Tada vrijedi

1. U svakoj tački intervala $(-R, R)$ red apsolutno konvergira, a divergira izvan tog intervala, tj. za $|x| > R$.

2. Red uniformno konvergira na svakom segmentu $[-r, r]$, gdje je $r < R$, kao i uopšte na bilo kom segmentu sadržanom u $(-R, R)$.

Jasno je na osnovu gornje teoreme da se konkretno u tačkama R i $-R$ ne može jednoznačno dati odgovor o konvergenciji reda. U tim tačkama se ispitivanje konvergencije uvijek sprovodi zasebno, ali tada imamo olakšavajuću okolnost jer je tada posmatrani red čisto numerički red.

Kako je konvergencija stepenog reda unutar intervala $(-R, R)$ apsolutna, poluprečnik konvergencije stepenog reda se može odrediti iz Cauchyjevog korijenog kriterija konvergencije pozitivnih redova (Teorem 2.2.4). Naime, red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||x|^n$ ili konvergira ili divergira u zavisnosti da li je izraz

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n||x|^n} = |x| \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

manji od 1 ili veći od 1. Iz ovoga onda imamo da će red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ apsolutno konvergirati za sve one vrijednosti x za koje je zadovoljeno

$$|x| < \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} ,$$

a da će divergirati za sve x za koje je

$$|x| > \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} .$$

Ovo u stvari dovodi do sljedeće veoma važne tvrdnje.

Teorem 4.2.4

(*Cauchy-Hadamardov teorem*)

Poluprečnik konvergencije stepenog reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ je dat sa

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} .$$

Ako je $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, tada je $R = 0$, tj. red je konvergentan samo u tački $x = 0$.
Ako je $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, tada je $R = +\infty$, tj. red je konvergentan za sve $x \in \mathbb{R}$.

Pored ovog načina izračunavanja poluprečnika konvergencije stepenog reda, i sljedeća formula je veoma pogodna za to

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| .$$

Primjer 4.4. Za stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, imamo da je za sve $n \in \mathbb{N}_0$, $a_n = 1$, pa je

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1 .$$

Na osnovu Teorema 4.2.3 sada imamo da je dati red apsolutno konvergentan na intervalu $(-1, 1)$, a na skupu $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ je divergentan. Kao što smo rekli, u tačkama 1 i -1 taj teorem nam ne daje odgovor o konvergenciji, ali uzimajući da je $x = 1$ i $x = -1$ dobijamo "obične" numeričke redove

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 \quad \text{i} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n ,$$

za koje znamo da su divergentni. Dakle, za dati red znamo da je apsolutno konvergentan na intervalu $(-1, 1)$, divergentan na skupu $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ i da je uniformno konvergentan na proizvoljnom intervalu $(-r, r) \subset (-1, 1)$ $(r < 1)$. $\diamondsuit$

Primjer 4.5. Posmatrajmo stepeni red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n+1)}{(n-1)} x^n .$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n(n+1)n}{3^{n+1}(n-1)(n+2)} = \frac{1}{3} .$$

Dakle, polazni red je apsolutno konvergentan na intervalu $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, na skupu $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ je divergentan, a na svakom skupu $[-r, r] \subset \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ $(r < \frac{1}{3})$ je uniformno konvergentan. $\diamondsuit$

Koristeći se teoremama o graničnoj vrijednosti funkcionalnog reda, diferenciranju i integriranju funkcionalnog reda član po član, dobijamo sljedeće korisne tvrdnje. Neka je $f(x)$ suma stepenog reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, tj. neka je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

Teorem 4.2.5

Suma stepenog reda je neprekidna funkcija na intervalu $(-R, R)$, gdje je R poluprečnik konvergencije datog reda.

Teorem 4.2.6

Suma stepenog reda na intervalu $(-R, R)$ ima konačne izvode proizvoljnog reda i oni se mogu dobiti diferenciranjem član po član.

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} \ , \ k \in \mathbb{R} \ ; \ x \in (-R, R) \ .$$

Pri tome svaki od redova dobijen diferenciranjem član po član ima poluprečnik konvergencije R.

Primjer 4.6. Poznata nam je formula za sumu geometrijskog niza

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \ ,$$

pri čemu imamo ograničenje da je $|x| < 1$, a što je sada opravdano i činjenicom da je poluprečnik konvergencije ovog reda $R = 1$. Izvođenjem iz ovog reda, lahko se dobija i sljedeća suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \ .$$

Neka sada trebamo izračunati sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$. Kako vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' \ ,$$

koristeći se teoremom o diferenciranju reda član po član, sada imamo

$$x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{1-x^2} \ .$$

Dakle vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{1-x^2} \ ,$$

a ovo vrijedi samo za $x \in (-1, 1)$. $\diamondsuit$

Teorem 4.2.7

Suma stepenog reda je integrabilna funkcija na svakom segmentu $[\alpha, \beta] \subset (-R, R)$ i može se integraliti član po član, tj. vrijedi

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{n+1} a_n \ , \ -R < \alpha < \beta < R \ .$$

4.3 Maclaurinovi redovi

U ranijem kursu matematike, upoznali smo se sa Taylorovim polinomom i Taylorovim redom funkcije. Specijalan slučaj Taylorovog reda, za $x = 0$, predstavljao je Maclaurinov red funkcije i on je glasio

Definicija 4.3.1

Neka je funkcija $f(x)$ definisana na nekom intervalu koji sadrži 0 i neka postoje svi izvodi funkcije f u tački 0. Red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \ ,$$

nazivamo Maclaurinov red funkcije f ili Maclaurinov razvoj funkcije f u okolini tačke 0.

Vidimo dakle da Maclaurinov red nije ništa drugo do stepeni red, kod koga je specijalno

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \ .$$

Formalno konstruisanje Maclaurinovog reda ne obezbjeđuje njegovu konvergenciju ka datoj funkciji. Međutim, sada sa ovom teorijom stepenih redova znamo da će to ipak biti slučaj, ali na intervalima konvergencije ovih redova.

Primjer 4.7. Poznato nam je da vrijedi

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ ,$$

za proizvoljno $x \in \mathbb{R}$. Tj. Maclaurinov red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergira ka funkciji e^x na intervalu konvergencije, a ovaj je određen poluprečnikom konvergencije ovog reda $R = +\infty$. Dakle, ovaj prikaz funkcije e^x stepenim redom vrijedi za sve $x \in \mathbb{R}$. $\diamondsuit$

Primjer 4.8. Maclaurinovi redovi funkcija sin i cos glase

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} \quad , \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \ ,$$

za svako $x \in \mathbb{R}$. $\diamondsuit$

Primjer 4.9. Posmatrajmo stepeni red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \ .$$

Poluprečnik konvergencije ovog reda je $R = 1$, tj. dati red je konvergentan na intervalu $(-1, 1)$. Za $x = 1$, dobijamo alternativni red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \ ,$$

za koga na osnovu Leibnitzovog kriterija znamo da je konvergentan red. Dakle, polazni stepeni red je konvergentan na $(-1, 1]$.

Nalaženjem izvoda funkcije $f(x) = \ln(1 + x)$ u tački 0, pokazuje se da je Maclaurinov red ove funkcije dat upravo kao naš polazni stepeni red, pa dakle možemo zaključiti da vrijedi

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \ , \ x \in (-1, 1] \ .$$

Sada lagano izračunavamo npr. da je

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \ .$$

$\diamondsuit$

Još neki razvoji u stepene redove su

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad , \quad \alpha \notin \mathbb{N} \quad , \quad x \in (-1, 1) \ .$$

Specijalno za $\alpha = -1$ i ako x zamjenimo sa x^2, imamo

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \ .$$

Integracijom ove jednakosti u granicama od 0 do x, dobijamo

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \ .$$

Teorem 4.3.1

Neka je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \ x \in (-R, R) \ .$$

Tada je

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \ , \ n = 0, 1, 2, ...$$

Ovim teoremom u stvari tvrdimo da je svaki stepeni red Maclaurinov red funkcije koja je definisana sumom stepenog reda, na intervalu konvergencije. Prema tome, jedini konvergentni stepeni redovi su Maclaurinovi redovi.

Bibliografija

[1] Fehim Dedagić : *Matematička analiza (Prvi dio)*, Univerzitetska knjiga, Tuzla 2005.

[2] D. Adnadjević, Z. Kadelburg : *Matematička analiza I*, Nauka, Beograd 1995.

[3] M. Merkle : *Matematička analiza Teorija* , Beograd 1996.

[4] Anton, Howard, Irl Bivens, and Stephen Davis : *Calculus*, Vol. 2. Hoboken 2002.