1 Uvod

1.1 Riemannov integral

Riemannov integral

Potsjetimo se šta smo podrazumjevali pod integralom do sad, tj. koncepta Riemannovog integrala.

Stoga neka je f realna i ograničena funkcija definisana na $[a,b]$. Neka je

$$\pi = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i \cdots < x_n = b\}$$

podjela segmenta $[a,b]$ tačkama $x_0, x_1, ..., x_n$. Za svaku podjelu segmenta $[a,b]$ definišemo sume

$$S_\pi = \sum_{i=1}^{n} M_i \left(x_i - x_{i-1}\right) \quad s_\pi = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i - x_{i-1}\right)$$

gdje su $M_i = \sup\limits_{x_{i-1}<x\leq x_i} \{f(x)\}$ i $m_i = \inf\limits_{x_{i-1}<x\leq x_i} \{f(x)\}$. Definišimo gornji Riemannov integral funkcije f sa

$$\overline{R} \int_a^b f(x)dx = \inf S_\pi$$

gdje se infimum uzima po svim mogućim podjelama π segmenta $[a,b]$.

Analogno definišemo donji Riemannov integral kao

$$\underline{R} \int_a^b f(x)dx = \sup s_\pi .$$

Jasno je da je donji Riemannov integral uvijek manji ili jednak od gornjeg Riemannovog integrala.

U slučaju jednakosti, kažemo da je f *integrabilna u Riemannovom smislu* i zajednička vrijednost naziva se Riemannov integral funkcije f i označava sa

$$R \int_a^b f(x)dx.$$

Pitanje

Ako je funkcija f Riemann integrabilna na svakom segmentu $[\alpha, \beta]$, $a < \alpha < \beta < b$, da li je f integrabilna i na $[a,b]$?

Ne mora biti! Posmatrajmo funkciju :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$$

Jasno je da za proizvoljno $\delta > 0$ važi

$$(R)\int_{\delta}^{1} f(x)dx = -\ln(\delta),$$

dok je

$$(R)\int_{0}^{1} f(x)dx = +\infty.$$

1.2 Motivacija

Motivacija

U prethodnom poglavlju ispitivali smo osnovne osobine mjerljivih funkcija, koje su veoma široka generalizacija neprekidnih funkcija.

Za mjerljive funkcije, klasična definicija (Riemannovog) integrala nije generalno primjenljiva.

Naprimjer, dobro znana Dirichletova funkcija definisana na $[0, 1]$

$$D(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & ; \quad x \in \mathbb{I} \cap [0,1] \end{cases}$$

očito je mjerljiva funkcija (zašto?), ali nije Riemann integrabilna (zašto?).

Stoga je koncept Riemannovog integrala očito ne baš koristan što se tiče mjerljivih funkcija.

Pitanje

Da li je tačno tvrđenje:

Ako je $E \subset [a, b], m(E) = 0$, tada je $\chi_E \in \mathfrak{R}([a, b])$.

Tvrđenje nije tačno. Posmatrajmo skup $E = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

Jasno je da je $m(E) = 0$ kao mjera prebrojivog skupa.

Ali u tom slučaju χ_E ima neprebrojivo mnogo tačaka prekida na $[0, 1]$, te kao takva nije Riemann integrabilna.

Pretpostavimo za trenutak zbog jednostavnosti da posmatramo funkcije na segmentu. Uvodeći koncept Riemannovog integrala, podijelili smo segment na kojem je funkcija definisana na podsegmente, te uzeli proizvoljnu tačku ξ_k u svakom od njih i formirali sumu

$$\sum_k f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Esencijalno, zamjenili smo vrijednost funkcije $f(x)$ u svakoj tački segmenta $[x_k, x_{k+1}]$ sa njenom vrijednošću u proizvoljnoj tački tog segmenta.

Međutim, ovo je jedino prirodno uraditi ukoliko su vrijednosti funkcije $f(x)$ u susjednim tačkama 'blizu' jedne drugima, tj. kad je ili f neprekidna funkcija ili kada skup tačaka prekida nije *pretjerano veliki*. Osnovna ideja Lebesguevog integrala se sastoji iz činjenice da, suprotno Riemannovom integralu, tačke x se ne grupišu prema svojoj bliskosti na x-osi, već po bliskosti vrijednosti funkcije u ovim tačkama!

Ovo odmah daje mogućnost generalizacije koncepta integrala na dosta široku klasu funkcija.

Štaviše, Lebesgueov integral se definiše na tačno isti način za funkcije koje su definisane na bilo kojem mjerljivom prostoru, dok se Riemannov integral prvo definiše za funkcije jedne promjenljive, te se tek naknadno generališe sa odgovarajućim promjenama na slučaj više promjenljivih. Sam Lebesgue je rekao u pismu Paulu Montelu:

Moram platiti određenu sumu, koju sam skupio u svom džepu. Uzimam novčanice i novčiće iz džepa i dajem ih kreditoru redom kojim ih nalazim dok ne dođem do ukupne sume. Ovo je Riemannov integral.
Ali mogu ovom problemu pristupiti drukčije: Nakon što sam izvadio sam novac iz džepa, grupišem novčanice i novčiće prema identičnim vrijednostima i onda platim kreditoru u različitim grupisanjima. Ovo je moj integral.

Definicija 1.1. Funkciju Ψ koja ima svojstvo da je $\Psi(x) = c_i$, za $x_{i-1} < x \leq x_i$ za neku podjelu segmenta $[a, b]$ i za neki skup konstanti $\{c_i\}$, zovemo *stepenasta funkcija*.

Imamo da je

$$R\int_a^b \Psi(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i\left(x_i - x_{i-1}\right).$$

Primjedba: Svaka integrabilna funkcija u Riemannovom smislu na $[a, b]$ je ograničena.

2 Lebesgueov integral

2.1 Lebesgueov integral ograničene funkcije na skupu konačne mjere

Lebesgueov integral ograničene funkcije na skupu konačne mjere

Prisjetimo se *karakterističnih funkcija* nekog skupa A:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

Definicija 2.1. Linearna kombinacija

$$\Phi(x) = \sum_n c_n \chi_{E_n}(x) \tag{1}$$

naziva se *prosta funkcija*, ako su E_i mjerljivi skupovi.

Proste funkcije su stoga mjerljive funkcije koje uzimaju konačno (ili prebrojivo) mnogo vrijednosti.

Primijetimo da je svaka stepenasta funkcija prosta, te da reprezentacija $\Phi(x) = \sum_n c_n \chi_{E_n}(x)$ proste funkcije nije jedinstvena.

Ako je Φ prosta funkcija i $\{a_1, a_2, ..., a_n, \ldots\}$ skup vrijednosti funkcije Φ različitih od nule, tada je

$$\Phi(x) = \sum_n a_n \chi_{A_n} \tag{2}$$

gdje je $A_i = \{x : \Phi(x) = a_i\}$. Ova se reprezentacija naziva kanonička reprezentacija i okarakterisana je činjenicom da su skupovi A_i disjunktni, a realni brojevi a_i različiti i različiti od nule.

Integral proste funkcije

Ako je Φ nula van nekog skupa A konačne mjere, tada prirodno definišemo integral funkcije Φ pomoću

$$\int_A \Phi(x) d\mu = \sum_n y_n \ \mu(A_n) \tag{3}$$

sa Φ sa kanoničkom reprezentacijom $\Phi = \sum\limits_n a_n \chi_{A_n}$. Često, kraće pišemo $\int \Phi$.

Definicija 2.2. Prosta funkcija $\Phi(x)$ naziva se *integrabilnom* (u odnosu na mjeru μ), preko skupa A ako red (3) konvergira apsolutno.

Ako je $\Phi(x)$ integrabilna, onda se suma reda (3) naziva integral funkcije $\Phi(x)$ preko skupa A.

Ako je E mjerljiv skup tada definišemo

$$\int_E \Phi = \int \Phi \chi_E.$$

Lema 2.3. *Neka je* $\Phi(x) = \sum_n a_n \chi_{E_n}$, *gdje* $E_i \cap E_j = \varnothing$ *pri* $i \neq j$. *Pretpostavimo da je svaki* E_n *mjerljiv skup konačne mjere. Tada je*

$$\int \Phi = \sum_n a_n \mu(E_n)$$

Dokaz. Definišimo skup $A_a = \{x : \Phi(x) = a\} = \bigcup_{a_i = a} E_i$. Zbog aditivnosti mjere:

$$\mu(A_a) = \sum_{a_i = a} \mu(E_i)$$

$$a\mu(A_a) = \sum_{a_i = a} a_i \mu(E_i)$$

pa dobijamo

$$\int \Phi(x) d\mu = \sum_a a\mu(A_a) = \sum_n a_n \mu(E_n).$$

∎

Teorem 2.4. *Ako su* f *i* g *dvije proste funkcije koje su jednake nuli van skupa konačne mjere, tada*

$$\int_A (af + bg) = a \int_A f + b \int_A g,$$

gdje su a *i* b *konstante.*

Ako je $f \geq g$ *skoro svuda, tada je* $\int_A f \geq \int_A g$.

Dokaz

Dokažimo prvo da je zbir integrala jednak integralu zbira. Neka f uzima vrijednosti f_i na skupovima $F_i \subseteq A$ i neka g uzima vrijednosti g_i na skupovima $G_i \subseteq A$, kako je

$$J_1 = \int_A f(x) d\mu = \sum_i f_i \mu(F_i),$$

$$J_2 = \int_A g(x) d\mu = \sum_i g_i \mu(G_i).$$

Koristeći prethodnu lemu, imamo

$$J = \int_A [f(x) + g(x)] d\mu = \sum_i \sum_j (f_i + g_j) \mu(F_i \cap G_j).$$

Međutim, za mjere individualnih skupova imamo

$$\mu(F_i) = \sum_j \mu(F_i \cap G_j),$$

$$\mu(G_j) = \sum_i \mu(F_i \cap G_j),$$

Stoga iz apsolutne konvergencije redova J_1 i J_2, slijedi i apsolutna konvergencija reda J i imamo da je $J = J_1 + J_2$.

Dokaz da je

$$k \int_A f(x) d\mu = \int_A [kf(x)] d\mu$$

ostavljamo za vježbu (direktno slijedi!).

Da dokažemo drugi dio teoreme koristimo $\int f - \int g = \int (f-g)$ i činjenicu da ako je h prosta funkcija koja je skoro svuda pozitivna i $h = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i \chi_{A_i}$ kanonična reprezentacija tada $d_i \geq 0$ osim na skupu mjere 0.

Tada je $\int h = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i \mu(A_i) \geq 0$. ∎

Neka je sada f ograničena mjerljiva funkcija i neka je E mjerljiv skup ograničene mjere.

Slično kao kod Riemannovog integrala, posmatramo za proste funkcije Φ i Ψ brojeve oblika $\inf\limits_{\Psi \geq f} \int \Psi$ i $\sup\limits_{\Phi \leq f} \int \Phi$.

Da li su ovi brojevi jednaki?

Odgovor na ovo pitanje daje sljedeći teorem.

Teorem 2.5. *Neka je f definisana i ograničena na mjerljivom skupu E konačne mjere. Tada važi jednakost*

$$\inf_{f \leq \Psi} \int_E \Psi(x) d\mu = \sup_{\Phi \leq f} \int_E \Phi(x) d\mu$$

za sve proste funkcije Φ i Ψ ako i samo ako je funkcija f mjerljiva.

$\Leftarrow$

Neka je f ograničena sa M i neka je f mjerljiva funkcija. Posmatrajmo skupove

$$E_k = \left\{ x : \frac{k-1}{n} M < f(x) \leq k \frac{M}{n}, -n \leq k \leq n \right\}$$

koji su mjerljivi (jer je f mjerljiva funkcija), disjunktni i njihova unija jednaka je skupu E.

Tada je

$$\mu(E) = \sum_{k=-n}^{n} \mu(E_k).$$

Definišimo proste funkcije

$$\Psi_n(x) = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} k\chi_{E_k}(x) \quad i \quad \Phi_n(x) = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k-1)\,\chi_{E_k}(x)$$

koje očito zadovoljavaju uslov

$$\Phi_n(x) \leq f(x) \leq \Psi_n(x).$$

Tada

$$\inf_{f\leq\Psi}\int_E \Psi(x)d\mu \leq \int_E \Psi_n(x)d\mu = \frac{M}{n}\sum_{k=-n}^{n} kE_k$$

$$\sup_{\Phi\leq f}\int_E \Phi(x)d\mu \geq \int_E \Phi_n(x)d\mu = \frac{M}{n}\sum_{k=-n}^{n} (k-1)\,E_k$$

pa je

$$\begin{aligned} 0 &\leq \inf_{f\leq\Psi}\int_E \Psi(x)d\mu - \sup_{\Phi\leq f}\int_E \Phi(x)d\mu \leq \\ &\leq \int_E \Psi_n(x)d\mu - \int \Phi_n(x)d\mu \leq \\ &\leq \frac{M}{n}\sum_{k=-n}^{n}\mu(E_k) = \frac{M}{n}\mu(E). \end{aligned}$$

Kako je n proizvoljan prirodan broj to je

$$\inf_{f\leq\Psi}\int_E \Psi(x)d\mu - \sup_{\Phi\leq f}\int_E \Phi(x)d\mu = 0$$

čime je dokazano da je uslov dovoljan.

$\Rightarrow$

Neka je $\inf\limits_{f\leq\Psi}\int_E \Psi(x)d\mu = \sup\limits_{\Phi\leq f}\int_E \Phi(x)d\mu$.

Za dati prirodan broj n postoje proste funkcije Φ_n i Ψ_n takve da je $\Phi_n \leq f \leq \Psi_n$.

Štaviše,

$$\int_E \Psi_n(x)d\mu - \int_E \Phi_n(x)d\mu < \frac{1}{n}$$

(jer vrijedi pretpostavka).

Definišimo

$$\widehat{\Psi}(x) = \inf \Psi_n(x), \qquad \widehat{\Phi}(x) = \sup \Phi_n(x)$$

koje su mjerljive kao infimum i supremum mjerljivih funkcija i još više

$$\widehat{\Phi}(x) \leq f(x) \leq \widehat{\Psi}(x).$$

Neka je $\Delta = \{x : \widehat{\Phi}(x) \leq \widehat{\Psi}(x)\}$.

Dokazat ćemo da je $\mu(\Delta) = 0$, tj. $\widehat{\Phi}(x) = \widehat{\Psi}(x) = f(x)$. Zaista, Δ je unija skupova

$$\Delta_\nu = \left\{ x : \widehat{\Phi}(x) \leq \widehat{\Psi}(x) - \frac{1}{\nu} \right\}; \nu = 1, 2, ...$$

Svaki od skupova Δ_ν je sadržan u skupu $A = \left\{ x : \widehat{\Phi}_n(x) < \widehat{\Psi}_n(x) - \frac{1}{\nu} \right\}$, no A ima mjeru manju od $\frac{\nu}{n}$ jer

$$A = \left\{ x : \frac{1}{\nu} < \widehat{\Psi}_n(x) - \widehat{\Phi}_n(x) \right\} = \left\{ x : 1 < \nu \left(\widehat{\Psi}_n(x) - \widehat{\Phi}_n(x) \right) \right\}$$

Stoga je

$$\mu(A) = \int \chi_A \leq \nu \int \left(\widehat{\Psi}_n(x) - \widehat{\Phi}_n(x) \right) d\mu \leq \frac{\nu}{n}.$$

Kako je n proizvoljno onda je $\mu(\Delta_\nu) = 0$ i $\mu(\Delta) = 0$ pa je $\widehat{\Phi} = \widehat{\Psi}$ osim na skupu Δ čija je mjera nula.

Tako je $\widehat{\Phi} = f$ sem na skupu Δ čija je mjera nula.

Kako je $\widehat{\Phi}$ mjerljiva funkcija onda je i f mjerljiva funkcija pa je uslov potreban. ∎

Lebesgueov integral ograničene funkcije

Definicija 2.6. Ako je f ograničena izmjerljiva funkcija definisana na mjerljivom skupu E konačne mjere, definišemo Lebesgueov integral funkcije f na skupu E sa

$$\int_E f(x) d\mu = \inf \int_E \Psi(x) d\mu$$

za sve proste funkcije $\Psi \geq f$.

Često se koristi oznaka $\int_E f$. Ako je $E = [a, b]$ tada pišemo $\int\limits_a^b f(x) d\mu$ umjesto $\int\limits_{[a,b]} f(x) d\mu$.

Generalizacija Riemannovog integrala?

Teorem 2.7. *Neka je f ograničena funkcija na $[a, b]$. Ako je f R-integrabilna na $[a, b]$, tada je f mjerljiva i važi:*

$$R\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)d\mu.$$

Dokaz. Pošto je svaka stepenasta funkcija prosta imamo:

$$\underline{R}\int_a^b f(x)dx \leq \sup_{\Phi\leq f}\int_a^b \Phi(x)d\mu \leq \inf_{f\leq\Psi}\int_a^b \Psi(x)d\mu \leq \bar{R}\int_a^b f(x)dx.$$

Kako je f integrabilna u Riemannovom smislu, prethodne nejednakosti su i jednakosti. Zašto je f mjerljiva funkcija? Teorem 2.5! ∎

Teorem 2.8. *Ako su f i g ograničene mjerljive funkcije definisane na skupu E konačne mjere, tada važi:*

1. $\int_E (af + bg) = a\int_E f + b\int_E g$
2. *Ako je $f = g$ skoro svuda, tada je $\int_E f = \int_E g$*
3. *Ako je $f \leq g$ skoro svuda, tada je $\int_E f \leq \int_E g$.*
   Specijalno, $|\int_E f| \leq \int_E |f|$.
4. *Ako $A \leq f(x) \leq B$ tada $A\mu(E) \leq \int_E f \leq B\mu(E)$.*
5. *Ako su A i B disjunktni mjerljivi skupovi konačne mjere, tada je $\int\limits_{A\cup B} f = \int\limits_A f + \int\limits_B f$.*

Ako je Ψ prosta funkcija tada je i $a\Psi$ takodje prosta funkcija i obrnuto (za $a \neq 0$.) Neka je $a > 0$. Imamo, zbog teoreme 2.4,

$$\int_E af = \inf_{f\leq\Psi}\int_E a\Psi = \inf_{f\leq\Psi} a\int_E \Psi = a\int_E f.$$

Ako je $a < 0$ i $\Phi \leq f$ tada je $a\Phi \geq af$ pa je

$$\int_E af = \inf_{\Phi\leq f}\int_E a\Phi = \inf_{\Phi\leq f}\left(a\int_E \Phi\right) = a\sup_{\Phi\leq f}\int_E \Phi = a\int_E f.$$

Koristili smo $\inf aM = a\sup M \; za \; a > 0$ i teoremu 2.4. Time smo pokazali homogenost integrala. Pokažimo sada aditivnost integrala. Ako je $\Psi_1 \geq f$ i $\Psi_2 \geq g$, Ψ_1 i Ψ_2 proste funkcije tada je i $\Psi_1 + \Psi_2$ prosta funkcija i važi $\Psi_1 + \Psi_2 \geq f + g$ odakle je

$$\int_E (f + g) \leq \int_E (\Psi_1 + \Psi_2) = \int_E \Psi_1 + \int_E \Psi_2 \;\; /inf \; s \; desna$$

pa je

$$\int_E (f+g) \leq \int_E f + \int_E g.$$

S druge strane $\Phi_1 \leq f$ i $\Phi_2 \leq g$. Tada $\Phi_1 + \Phi_2$ je prosta i vrijedi

$$\int_E (f+g) \geq \int_E (\Phi_1 + \Phi_2) = \int_E \Phi_1 + \int_E \Phi_2 \;\; /sup\ s\ desna$$

pa je

$$\int_E (f+g) \geq \int_E f + \int_E g.$$

Ovim je tačka 1. dokazana. Ostale tačke ostavljene za vježbu.

Teorem 2.9 (Teorem o ograničenoj konvergenciji)**.** *Neka je (f_n) niz ograničenih funkcija, definisanih na skupu E konačne mjere. Pretpostavimo da postoji realan broj M takav da je $\mid f_n \mid \leq M$ za svako $x \in E$ i za svako n. Ako je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ za svako $x \in E$, tada je*

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Primjedba: Zaključak teoreme je trivijalan ako (f_n) konvergira uniformno ka funkciji f.

Dokaz

Korisićemo teoremu Jegorova koja glasi: Za dato $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 i mjerljivi skup $A \subset E$ sa svojstvom $\mu(A) < \frac{\varepsilon}{4M}$ takav da za $n \geq n_0$ i $x \in E - A$ imamo $\mid f_n(x) - f(x) \mid < \frac{\varepsilon}{2\mu(E)}$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
\left| \int_E f_n(x) - \int_E f(x) \right| &= \left| \int_E (f_n(x) - f(x)) \right| \leq \int_E |f_n(x) - f(x)| = \\
&= \int\limits_{E-A} |f_n(x) - f(x)| + \int_A |f_n(x) - f(x)| \leq \\
&\leq \frac{1}{2\mu(E)} \int\limits_{E-A} 1 + 2M \int_A 1 = \\
&= \frac{\varepsilon}{2\mu(E)} \mu(E-A) + 2M\mu(A) < \\
&< \frac{\varepsilon}{2\mu(E)} \mu(E) + 2M \frac{\varepsilon}{4M} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

∎

Primjer. Data je funkcija:

$$f(x) = \begin{cases} 1; & x \in K \\ 2; & x \notin K \end{cases}$$

gdje je K Cantor-ov skup. Dokazati da je $f(x)$ Lebesgue integrabilna i izračunati (L)$\int_0^1 f(x)d\mu$.

Očigledno je funkcija f ograničena. Osim toga za proizvoljno $c \in \mathbb{R}$ skup $\{x \in [0,1] : f(x) > c\}$ je mjerljiv, pa je funkcija f mjerljiva. Iz ograničenosti funcije f tj. $f(x) \leq M < \infty$ imamo

$$(L)\int_0^1 f(x)d\mu \leq (L)\int_0^1 M d\mu = M < \infty$$

dakle f je Lebesgue integrabilna.

Imamo da je $[0,1] = K \cup K^C$. Na osnovu aditivnosti Lebesgueovog integrala, imamo

$$(L)\int_0^1 f(X)d\mu = (L)\int_K f(x)d\mu + (L)\int_{K^C} f(x)d\mu$$

Kako je $m(K) = 0$ slijedi $(L)\int_K f(x)d\mu = 0$.

Na K^C je $f(x) = 2$ odakle je

$$(L)\int_{K^C} f(x)d\mu = (L)\int_{K^C} 2d\mu = 2m(K^C) = 2$$

Dakle: $(L)\int_0^1 f(x)d\mu = 0 + 2 = 2$

Primjer. Data je funkcija:

$$f(x) = \begin{cases} x^3; & x \in \mathbb{I} \cap [0,1] = D \\ 1; & x \in D^C \end{cases}$$

1. Da li je funkcija f $\mathfrak{R}$ integrabilna?
2. Da li je f $\mathfrak{L}$ integrabilna?
3. Izračunati odgovarajuće integrale.

Rješenje

1. Funkcija f ima prekide u svim tačkama intervala $[0,1)$. Dakle skup tačaka prekida je pozitivne mjere tj. funkcija $f(x)$ ima neprebrojivo mnogo prekida i kao takva nije $\mathfrak{R}$ integrabilna.
2. Neka je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljno. Neka je $A = \{x \in [0,1] : f(x) > c\}$.

   Ako je $c \leq 0 \Rightarrow \; m(A) = m([0,1]) = 1$.

   Ako je $c \geq 1 \Rightarrow \; m(A) = 0$.

   Za $0 < c < 1 \Rightarrow \; m(A) = 1 - \sqrt[3]{c}$.

   Dakle, za proizvoljno $c \in \mathbb{R}$ skup A je mjerljiv te je i funkcija f mjerljiva.

   Očigledno je funkcija f ograničena. Dakle $f \in \mathfrak{L}([0,1])$.

3. Posmatrajmo sada funkciju $h(x) = x^3$.
   Tada je $f(x) = h(x)$ skoro svuda na $[0,1]$.
   Odatle onda imamo $(L)\int_0^1 f(x)d\mu = (L)\int_0^1 h(x)d\mu$.
   Kako je $h \in \mathfrak{R}([0,1]) \Rightarrow (L)\int_0^1 f(x)d\mu = (R)\int_0^1 h(x)dx = \frac{1}{4}$.

Primjer. Data je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0: & x \in I \cap\ [0,1] \\ \frac{1}{q}: & x = \frac{p}{q},\ \ (p,q) = 1. \end{cases}$$

1. Dokazati da je funkcija Riemann integrabilna.

2. Bez korištenja Lebesgueova integrala pokazati da je $R\int\limits_0^1 f(x)dx = 0$.

3. Koristeći Lebesgueovu teoremu pokazati da je funkcija f *Riemann integrabilna i da je* $R\int\limits_0^1 f(x)dx = 0$.

Pitanja pod (a) i (b) su vrlo netrivijalna, ali i iz ranijih kurseva, pa ih ostavljamo čitaocu za vježbu. Tačke prekida funkcije f su racionalni brojevi iz $[0,1]$ i taj skup je prebrojiv odakle dobijamo neprekidnost funkcije f skoro svuda na $[0,1]$ a time dobijamo i integrabilnost funkcije f u Riemanovom smislu i vrijedi $R\int\limits_0^1 f(x)dx = 0$.

2.2 Lebesgueov integral nenegativne funkcije

Lebesgueov integral nenegativne funkcije

Do sada smo pretpostavljali da vrijedi $m(E) < \infty$.

Posmatraćemo proizvoljan slučaj što se tiče $m(E)$.

Ako je f nenegativna i mjerljiva funkcija, definisana na mjerljivom skupu E, definišemo:

$$\int_E f = \sup_{h \le f} \int_E h$$

gdje je h ograničena mjerljiva funkcija sa svojstvom da je

$$m\{x : h(x) \neq 0\} < \infty.$$

Teorem 2.10. *Ako su f i g nenegativne, mjerljive funkcije, tada važi:*

1. $\int_E cf = c\int\limits_E f \qquad (c > 0)$

2. $\int_E (f+g) = \int_E f + \int\limits_E g$

3. Ako je $f \leq g$ *skoro svuda, tada je* $\int_E f \leq \int_E g$. .

Dokaz

(1) slijedi iz teoreme 2.8. Dokazat ćemo samo drugu tvrdnju.

Ako je $h(x) \leq f(x)$ i $k(x) \leq g(x)$ imamo $h(x) + k(x) \leq f(x) + g(x)$ i tada $\int_E h + \int_E k \leq \int_E (f+g)$.

Ako uzmemo supremum na lijevoj strani tada

$$\int_E f + \int_E g \leq \int_E (f+g)\,. \tag{4}$$

Sa druge strane, neka je l ograničena mjerljiva funkcija koja je jednaka nuli van nekog skupa konačne mjere takva da je $l \leq f + g$.

Definišimo funkcije

$$\begin{aligned} h(x) &= \min\{f(x), l(x)\} \\ k(x) &= l(x) - k(x). \end{aligned}$$

Tada imamo $h(x) \leq f(x)$ i $k(x) \leq g(x)$.

Štaviše, h i k su majorirane sa l i anuliraju se gdje se anulira funkcija l. Sada imamo:

$$\int_E l = \int_E h + \int_E k \leq \int\limits_E f + \int_E g$$

odakle je

$$\int_E f + \int_E g \geq \int_E (f+g) \tag{5}$$

jer je $f + g \geq l$. Iz nejednakosti (4) i (5) slijedi

$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int\limits_E g.$$

3. je jasno zbog 2. i činjenice

$$f \leq g \Longrightarrow g - f \geq 0 \Longrightarrow \int_E g - f \geq 0.$$

∎

Teorem 2.11 (Fatouova lema). *Ako je (f_n) niz nenegativnih mjerljivih funkcija i $f_n(x) \to f(x)$ skoro svuda na skupu E, tada*

$$\int_E f \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Dokaz

Opštost se očito ne umanjuje ako pretpostavimo da je konvergencija svuda jer integral na skupu mjere nula je jednak nuli.

Neka je h ograničena mjerljiva funkcija takva da $h \leq f$ i $h(x) = 0$ za $x \notin E_1, m(E_1) < \infty$. Definišimo funkcije $h_n(x)$ sa

$$h_n(x) = \min\{h(x), f_n(x)\}.$$

Tada je $h_n(x)$ ograničena sa istom granicom h i $h_n(x)$ za $x \notin E_1, h_n(x) \to h(x)$.

Zbog teorema o ograničenoj konvergenciji imamo

$$\int_E h = \int\limits_{E_1} h = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{E_1} h_n \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Uzmemo li sada supremum po svim $h \leq f$, dobijamo

$$\int_E f \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

■

Primjer. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definisan pomoću

$$f_{2k}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}, \quad f_{2k+1}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}.$$

Jasno je $\varliminf_{n\to\infty} f_n = 0$ za $0 \leq x \leq 1$. Međutim,

$$\int\limits_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2}, \quad \forall n \in N$$

pa vrijedi

$$\int_E f d\mu < \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

Teorem 2.12 (Teorem o monotonoj konvergenciji). *Neka je (f_n) rastući niz nenegativnih mjerljivih funkcija i neka je $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Tada*

$$\int_E f(x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x).$$

Dokaz. Prema Fatouovoj lemi imamo $\int_E f \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n$.

Za svako n je $f_n \leq f$ pa je $\int f_n \leq \int f$ zbog monotonosti integrala, pa imamo:

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n \leq \int_E f.$$

Dakle,

$$\int_E f \geq \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n \geq \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n \geq \int_E f \Longrightarrow \int\limits_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x).$$

∎

Posljedica 2.13. *Neka je u_n niz mjerljivih nenegativnih funkcija i neka je*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Tada je

$$\int_E f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n$$

tj.

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n.$$

Dokaz. $f = \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$. Kako je niz $\delta_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ rastući i sve su mjerljive kao konačna suma mjerljivih, zadovoljeni su uslovi Teorema o monotonoj konvergenciji. ∎

Teorem 2.14. *Neka je f nenegativna mjerljiva funkcija i neka je (E_i) niz disjunktnih mjerljivih skupova. Neka je $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$. Tada je*

$$\int_E f = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{E_i} f.$$

Dokaz. Neka je $u_i = f\chi_{E_i}$. Tada $f\chi_E = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$. Primijenimo posljedicu prethodne teoreme, pa je

$$\int_E f = \int_E f\chi_E = \int_E \sum_{i=1}^{\infty} u_i = \sum_{i=1}^{\infty} \int_E u_i = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\chi_{E_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f.$$

∎

Integral nenegativne mjerljive funkcije

Definicija 2.15. Nenegativna mjerljiva funkcija f naziva se integrabilnom na mjerljivom skupu E ako

$$\int_E f < \infty.$$

Teorem 2.16. *Neka su f i g dvije nenegativne mjerljive funkcije. Ako je f integrabilna na skupu E i ako važi $g(x) \leq f(x)$ na E, tada je g integrabilna funkcija i važi:*

$$\int_E (f-g) = \int_E f - \int_E g.$$

Dokaz. Zbog teoreme 2.10 (prva u ovoj sekciji) i $f = (f-g)+g$ i $f-g \geq 0$ i $g \geq 0$ slijedi da je

$$\int_E f = \int_E (f-g) + \int_E g.$$

Kako je na lijevoj strani konačan broj (jer je f integrabilna) to je i na desnoj strani konačan broj pa je i g integrabilna. ∎

Teorem 2.17. *Neka je f nenegativna funkcija koja je integrabilna na skupu E. Tada, za dato $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki skup $A \subset E$ i $m(A) < \delta$ imamo*

$$\int_A f < \varepsilon.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. za neki $\varepsilon > 0$ možemo naći skup A sa proizvoljno malom mjerom takav da je $\int\limits_A f \geq \varepsilon$, i specijalno postoji mjerljiv skup A_n za svako n takav da $\int\limits_{A_n} f \geq \varepsilon$ i $m(A_n) < \frac{1}{2^n}$.

Neka je $g_n = f\chi_{A_n}$. Tada očito $g_n \to 0$ osim na skupu $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i\right)$.

Pošto je $m\left(\bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i\right) < \frac{1}{2^{n-1}}$ onda $g_n \to 0$ skoro svuda. Neka je $f_n = f - g_n$.Tada je (f_n) niz nenegativnih funkcija i $f_n \to f$ skoro svuda.

Koristeći Fatouovu lemu:

$$\int_E f \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E f_n \leq \int_E f - \overline{\lim}_{n\to\infty} \int_E g_n \leq \int_E f - \varepsilon.$$

Međutim, ova nejednakost samo važi za $\int_E f = +\infty$, što je suprotno pretpostavci. ∎

2.3 Opšti Lebesgueov integral

Lebesgueov integral

Do sada smo posmatrali samo nenegativne funkcije. Ako je f proizvoljna funkcija, tada je pozitivni dio f^+ funkcije f definisan pomoću

$$f^+ = \max\{f(x), 0\}.$$

Negativni dio f^- funkcije f definisan je pomoću

$$f^- = \max\{-f(x), 0\}.$$

Između f^+ i f^- važi

$$\begin{aligned} f &= f^+ - f^- \\ |f| &= f^+ + f^-. \end{aligned}$$

Ako je f mjerljiva funkcija, tada su mjerljive i $f^+, f^-, |f|$.

Definicija 2.18. Mjerljiva funkcija f je integrabilna na skupu E ako su f^+ i f^- integrabilne istovremeno na skupu E. U tom slučaju, definišimo:

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

Koristeći teoreme 2.10 i 2.16 imamo sljedeću teoremu:

Teorem 2.19. *Neka su f i g integrabilne funkcije na skupu E. Tada:*

1. *funkcija $af + bg$ je integrabilna na skupu E i važi*

$$\int_E (af + bg) = a \int_E f + b \int_E g.$$

2. *Ako $f \leq g$ skoro svuda, tada*

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

3. *Ako su A i B disjunktni mjerljivi skupovi sadržani u skupu E, tada je*

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B g$$

Primjedba: Funkcija $af + bg$ nije definisana u tačkama gdje je $af = +\infty$ i $bg = -\infty$. Međutim, skup svih takvih tačaka ima mjeru nula jer su f i g integrabilne funkcije.

Posljedica 2.20. *Ako je na mjerljivom skupu A konačne mjere, $m \leq f(x) \leq M$, onda je*

$$m\mu(A) \leq \int_A f(x) d\mu \leq M\mu(A).$$

Posljedica 2.21. *Ako je*

$$A = \cup_n A_n, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \; za \; i \neq j,$$

onda

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x) d\mu.$$

Štaviše, postojanje integrala na lijevog strani implicira postojanje integrala i apsolutnu konvergenciju reda na desnoj.

Teorem 2.22 (Lebesgueova teorema o ograničenoj konvergenciji)**.** *Ako je g integrabilna funkcija na skupu E i neka je (f_n) niz mjerljivih funkcija na skupu E, takav da $|f_n(x)| \leq g(x)$ i ako za skoro sve $x \in E$ imamo*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

tada važi

$$\int_E f = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x).$$

Dokaz

Funkcije $g(x) - f_n(x)$ su nenegativne jer $|f_n(x)| \leq g(x)$ odakle je $-g(x) \leq f_n(x) \leq g(x)$ pa je $g(x) - f_n(x) \geq 0$ i $g(x) + f_n(x) \geq 0$. primijenimo na niz $\{g - f_n\}$ Fatouovu lemu:

$$\int_E (g - f) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E (g - f_n)\,.$$

Zbog $|f| \leq g$ skoro svuda posljednja nejednakost povlači da je i f integrabilna funkcija i imamo da je

$$\int_E g - \int_E f \leq \int_E g - \overline{\lim}_{n\to\infty} \int_E f_n$$

odakle

$$\int_E f \geq \overline{\lim}_{n\to\infty} \int_E f_n. \tag{*}$$

Analogno, ako pođemo od niza $\{g + f_n\}$ dobijamo:

$$\int_E (g + f) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E (g + f_n) = \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E f_n + \int_E g$$

odakle

$$\int_E f \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n \tag{**}$$

Iz (*) i (**) dobijamo

$$\int_E f \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n \leq \int_E f$$

pa je

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x).$$

■

Posljedica 2.23. *Ako je mjerljiva funkcija f Lebesgue integrabilna preko skupa A, tada je f također integrabilna preko $A' \subseteq A$.*

Teorem 2.24. *Ako je funkcija ϕ integrabilna preko A i $|f(x)| \leq \phi(x)$, onda je i funkcija f integrabila preko A.*

Dokaz. Ako su f i ϕ proste funkcije, onda se A može predstaviti kao unija konačnog ili prebrojivog broja skupova, na svakom od kojih su f i ϕ konstante:

$$f(x) = a_n, \quad \phi(x) = \alpha_n, \quad |a_n| \leq \alpha_n.$$

Kako je ϕ integrabilna, imamo

$$\sum_n |a_n|\mu(A_n) \leq \sum_n \alpha_n \mu(A_n) = \int_A \phi(x)d\mu.$$

Stoga je f također integrabilna i

$$\left|\int_A f(x)d\mu\right| = \left|\sum_n a_n\mu(A_n)\right| \leq \sum_n |a_n|\mu(A_n) = \int_A |f(x)|d\mu.$$

Za opći slučaj, teorem se dokazuje uzimajući limes. ■

Primjer. Niz funkcija

$$f_n(x) = \frac{n^{\frac{3}{2}}x}{1+n^2x^2}$$

konvergira na $(0,1)$ prema funkciji $f(x) = 0$. Ali niz (f_n) nije ograničen na $(0,1)$ jer

$$f_n(x) = \frac{n^{\frac{3}{2}}x}{1+n^2x^2} = \frac{n\sqrt{n}x}{1+(nx)^2} = \frac{nx}{1+(nx)^2}\sqrt{n}$$

i za $x = \frac{1}{n}$ imamo

$$f_n(x) = f_n(\frac{1}{n}) = \frac{n\sqrt{n}\frac{1}{n}}{1+\left(n\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\sqrt{n}}{2} \Longrightarrow \max\{f_n(x)\} = \frac{\sqrt{n}}{2} \to \infty$$

pa se teorema o ograničenoj konvergenciji ne može primijeniti.

Međutim, za $0 < x \leq \frac{1}{n}$ imamo:

$$f_n(x) = \frac{n^{\frac{3}{2}} x}{1 + n^2 x^2} < \frac{n\sqrt{n}x}{1} \leq \frac{\sqrt{n}}{1} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

pa

$$f_n(x) < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Za $\frac{1}{n} \leq x < 1$ imamo

$$f_n(x) = \frac{n^{\frac{3}{2}} x}{1 + n^2 x^2} < \frac{n\sqrt{n}x}{n^2 x^2} = \frac{\sqrt{n}}{nx} = \frac{1}{x\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Pa

$$f_n(x) < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

za svako $x \in (0,1)$. No, funkcija $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ je integrabilna pa primjenom teoreme 2.8 dobijamo

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0.$$

Lema 2.25. *Ako je f integrabilna funkcija na E i ako je $\int\limits_A f(x)dx = 0$ za svaki mjerljiv skup $A \subseteq E$ tada je $f(x) = 0$ skoro svuda na skupu E.*

Dokaz

Neka je $f = f^+ - f^-$, pri čemu su funkcije f^+ i f^- nenegativne na skupu E.

Neka su $A = \{x \in E : f(x) \geq 0\}$ i $B = \{x \in E : f(x) < 0\}$.

Tada je $E = A \cup B$ i $A \cap B = \varnothing$.

Tada je $0 = \int\limits_A f(x)dx = \int\limits_A f^+(x)dx$ a slično se pokazuje da je $0 = \int\limits_B f(x)dx = \int\limits_B f^-(x)dx$, pa je dovoljno posmatrati slučaj nenegativne integrabilne funkcije na skupu E.

Ako je $f \geq 0$ i ako je $0 = \int\limits_E f(x)dx$, tada stavljajući da je $E_n = \left\{x \in E : f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$, imamo

$$m(E_n) = m\left(\{x \in E : nf(x) \geq 1\}\right) = \int\limits_E \chi_{E_n} dx \leq n \int\limits_E f(x)dx = 0$$

što znači da je $m(E_n) = 0$.Iz

$$\{x \in E : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in E : f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$$

dobijamo

$$m\left(\{x \in E : f(x) > 0\}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) = 0$$

tj. funkcija f je jednaka nuli skoro svuda na skupu E. ∎

Primjer. Neka je f pozitivna integrabilna funkcija na $\mathbb{R}$ i neka je $(L)\int_{\mathbb{R}} f(x)x^k dm = a^{k+1}$; $k = 0, 1, 2$ za neko $a \in \mathbb{R}$. Dokazati da je $f = 0$ s.s. na $\mathbb{R}$.

Neka su $p, q, r \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Tada zbog pretpostavke zadatka važi

$$p\int_{\mathbb{R}} f(x)x^2 dm + q\int_{\mathbb{R}} f(x)xdm + r\int_{\mathbb{R}} f(x)dm = pa^3 + qa^2 + ra,$$

odnosno važi

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)(px^2 + qx + r)dm = a(pa^2 + qa + r)$$

Ovo važi za svaki polinom $degP \leq 2$, pa mora važiti i za polinom $P(x) = (x - a)^2$ tj. $\int_{\mathbb{R}} f(x)(x - a)^2 dm = a(a - a)^2 = 0$.

Kako je $f(x)(x - a)^2 \geq 0$ onda mora biti $f(x)(x - a)^2 = 0$ s.s odnosno $f = 0$ s.s. na $\mathbb{R}$.

2.4 Veza između Riemannovog i Lebesgueovog integrala

Veza između Riemannovog i Lebesgueovog integrala

Teorem 2.26. *Ako postoji Riemannov integral*

$$J = (R)\int_a^b f(x)dx,$$

onda je funkcija f Lebesgue integrabilna na $[a, b]$ i

$$\int_{[a,b]} f(x)d\mu = J.$$

Dokaz

Posmatrajmo podjelu intervala $[a, b]$ na 2^n dijelova sa

$$x_k = a + \frac{k}{2^n}(b - a)$$

i Darbouxove sume koje odgovaraju ovoj podjeli su

$$S_n = \frac{b-a}{2^n} \sum k = 1^{2^n} M_{nk},$$
$$s_n = \frac{b-a}{2^n} \sum k = 1^{2^n} m_{nk},$$

gdje je M_{nk} gornja granica funkcije na segmentu $[x_{k-1}, x_k]$ a m_{nk} donja granica funkcije na istom segmentu.

Po definiciji Riemannovog integrala,

$$J = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Stavimo da je

$$\overline{f}_n(x) = M_{nk},\ za\ x_{k-1} \leq x < x_k,$$
$$\underline{f}_n(x) = m_{nk},\ za\ x_{k-1} \leq x < x_k.$$

Jednostavno se stoga izračunada je

$$\int_{[a,b]} \overline{f}_n(x) d\mu = S_n,$$
$$\int_{[a,b]} \underline{f}_n(x) d\mu = s_n.$$

Budući da je niz $(\overline{f}_n)$ nerastući i da je niz $\underline{f}_n$ neopadajući, imamo da je skoro svuda

$$\overline{f}_n(x) \to \overline{f}(x) \geq f(x),$$
$$\underline{f}_n(x) \to \underline{f}(x) \leq f(x),$$

Tada je po teoremu o monotonoj konvergenciji

$$\int_{[a,b]} \overline{f}(x) d\mu = \lim_{n\to\infty} S_n = J = \lim_{n\to\infty} s_n = \int_{[a,b]} f(x) d\mu.$$

Stoga je

$$\int_{[a,b]} |\overline{f}(x) - \underline{f}(x)| d\mu = \int_{[a,b]} (\overline{f}(x) - \underline{f}(x)) d\mu = 0,$$

tojest, skoro svuda je

$$\overline{f}(x) - \underline{f}(x) = 0,$$

odnosno

$$\overline{f}(x) = \underline{f}(x) = f(x),$$

pa je

$$\int_{[a,b]} f(x) d\mu = \int_{[a,b]} \overline{f}(x) d\mu = J.$$

∎

Veza između nesvojstvenog i Lebesgueovog integrala

Neka je f data funkcija na intervalu $[a,+\infty)$. Pretpostavimo da je funkcija f integrabilna u Riemannovom smislu na $[a,A]$, $A>a$. Nesvojstveni Riemannov integral

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

definiše se granicom

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$$

ukoliko ona postoji.

Teorem 2.27. *Ako je funkcija f integrabilna (u Lebesgueovom smislu), te ako je f Riemann integrabilna na$[a,A]$, tada postoji nesvojstveni Riemannov integral.*

Dokaz. Ako je f integrabilna, tada je integrabilna i funkcija $|f|$ tj.

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,d\mu<+\infty.\text{ Dalje: }\int_a^A |f(x)|\,dx<\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$$

a odavdje slijedi da je skup $\left\{\int_a^A |f(x)|\,dx\right\}_A$ ograničen i rastući, pa postoji $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A |f(x)|\,dx$ tj $|f|$ je integrabilna u smislu nesvojstvenog Riemannovog integrala odakle slijedi da je i funkcija f integrabilna u Riemannovom smislu na $[a,+\infty)$. ∎

Primjedba. Postoje funkcije koje imaju nesvojstven Riemannov integral ali nisu integrabilne u Lebesgueovom smislu. Dakle, obrat tvrđenja ne važi.

Primjer. Funkcija $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ ima na $(0,+\infty)$ nesvojstveni integral Riemanna. No, ova funkcija nije integrabilna na $(0,+\infty)$ u Lebesgueovom smislu, jer:

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|d\mu=\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}d\mu=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(x+k\pi)|}{x+k\pi}d\mu\geq$$

$$\geq\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{|\sin x|}{\pi+k\pi}d\mu=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\pi(k+1)}\int_0^{\pi}|\sin x|\,d\mu=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\to\infty.$$

Teorem 2.28. *Mjerljiva funkcija f je Lebesgue integrabilna na mjerljivom skupu E, tj $f\in L(E,m)$ ako i samo ako je $|f|\in L(E,m)$. Drugim riječima, Lebesgueov integral je apsolutno integrabilan.*

Dokaz

Ako je $f \in L(E,m)$ tada su oba broja

$$\int_E f^+ dm \quad i \quad \int_E f^- dm \tag{$\triangle$}$$

konačni pa je konačan i njihov zbir, tj.

$$\int_E f^+ dm + \int_E f^- dm = \int_E \left(f^+ + f^-\right) dm = \int_E |f|\, dm. \tag{$\triangle\triangle$}$$

Budući da iz mjerljivosti funkcije f slijedi mjerljivost funkcije $|f|$, iz ($\triangle\triangle$) zaključujemo da $|f| \in L(E,m)$.Obrnuto, ako je $|f| \in L(E,m)$, tj. $\int\limits_E |f|\, dm < \infty$, tada su oba broja u ($\triangle$) konačni, pa je

$$\int_E f dm = \int_E f^+ dm + \int_E f^- dm < \infty$$

tj. $f \in L(E,m)$. ∎

Posmatrajmo prethodni primjer. Kao što znamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Posmatrajmo parametarski integral

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx \quad (\alpha > 0). \tag{*}$$

Budući da je za $\alpha \geq 0$ funkcija $e^{-\alpha x}$ monotona po x (opadajuća na $[0, +\infty)$) i ograničena, a integral $I(0) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ konvergira, onda $I(\alpha)$ uniformno konvergira za $\alpha \geq 0$. Osim toga, funkcija $\frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x}$ za $x \geq 0, \alpha \geq 0$ je neprekidna po x pa je $I(\alpha)$ kao integral neprekidne funkcije za $\alpha \geq 0$ neprekidna funkcija.

Za $\alpha \geq \delta > 0$

$$\left|-\sin x e^{-\alpha x}\right| \leq e^{-\alpha x} \leq e^{-\delta x}$$

i integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-\delta x} dx = -\frac{1}{\delta} e^{-\delta x} \,\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\delta}$$

konvergira, pa integral

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(-\sin x e^{-\alpha x}\right) dx$$

za $\alpha \geq \delta > 0$ uniformno konvergira. Sve ovo zajedno sa neprekidnošću funkcije $-\sin x e^{-\alpha x}$ sa $x \geq 0, \alpha \geq 0$ daje nam pravo da možemo diferencirati (*). Imamo:

$$I'(\alpha) = -\frac{1}{1+\alpha^2} \Longrightarrow I(\alpha) = c - arctg\alpha, \quad (\alpha > 0) \qquad (**)$$

c je konstanta koju treba odrediti.

Kako je $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1$, to za $\alpha > 0$

$$|I(\alpha)| = \left|\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx\right| \leq \int\limits_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| e^{-\alpha x} dx \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \to 0, \quad (\alpha \to +\infty).$$

Ako u (**) pustimo da $\alpha \to +\infty$ dobijamo $0 = c - \frac{\pi}{2}$ pa je $c = \frac{\pi}{2}$. konačno,

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} - arctg\alpha \quad (\alpha > 0) \qquad (***)$$

Ali, zbog neprekidnosti $(I(\alpha))$,(***) važi i za $\alpha = 0$ pa je

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} - arctg\alpha \quad (\alpha \in [0, +\infty)).$$

Jasno, za $\alpha = 0$

$$I(0) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Dakle, Riemannov nesvojstveni integral funkcije $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ postoji i on je jednak $\frac{\pi}{2}$. (Nesvojstveni se zove zato što nema sva svojstva Riemannovog integrala; naime nije apsolutno integrabilan.)

Primjer. Posmatrajmo:

$$f(x) = \begin{cases} x^{-2}, & x \in I \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Ova funkcija je Lebesgue integrabilna na $(1, +\infty)$, ali nema nesvojtveni integral Riemanna jer nije Riemann integrabilna na $(1, b)$ za svako $b > 1$.

Dakle, klase funkcija koje imaju nesvojstven Riemannov integral i klasa Lebesgue integrabilnih funkcija su međusobno neuporedive, kao što pokazuju dva prethodna primjera.

Konvergencija po mjeri

Ako je (f_n) niz mjerljivih funkcija, takav da $\int |f_n| \to 0$, postavlja se pitanje konvergencije niza $(|f_n|)$ Najbitnije svojstvo takvog niza je da za svako $\varepsilon > 0$ mjere skupova $\{x : |f_n(x)| > \varepsilon\}$ konvergiraju nuli.

Definicija 2.29. Za niz (f_n) mjerljivih funkcija kaže se da konvergira funkciji $f(x)$ po mjeri ako za dato $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj N takav da za svako $n \geq N$ imamo

$$m\{x : |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\} < \varepsilon$$

ili

$$m\{x : |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Primjer. Posmatrajmo na segmentu $[0, 1]$ funkcije

$$\Phi_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right] \\ 0, & x \notin \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right] \end{cases} \qquad (i = 1, 2, ..., k)$$

Ove funkcije zapišimo u obliku niza, tako da ih numerišemo prvo po gornjem indeksu, a zatim za stalni gornji indeks numerišemo ih po donjem indeksu

$$f_1(x) = \Phi_1^{(1)}(x), f_2(x) = \Phi_1^{(2)}(x), f_3(x) = \Phi_2^{(2)}(x), f_4(x) = \Phi_1^{(3)}(x), ...$$

Pokazaćemo da niz (f_n) konvergira nuli po mjeri.

Zaista, funkcija f_n je različita od nule samo na segmentu $\left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right]$ pri čemu k raste kad i n (i obratno). Neka je $\varepsilon > 0$. Tada:

$$m\{x : |f_n(x) - 0| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{k} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Primijetimo da niz funkcija (f_n) ne konvergira nuli ni u jednoj tački segmenta $[0, 1]$.

Neka je $x_0 \in [0, 1]$. Ma kako veliko bilo k imamo $x_0 \in \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right]$ za neko i, postoji proizvoljno veliko n tako da važi $f_n(x_0) = 1$.

Teorem 2.30. *Neka je(f_n) niz mjerljivih funkcija koji konvergira po mjeri ka funkciji f. Tada postoji podniz (f_{n_k}) koji konvergira funkciji f skoro svuda.*

Dokaz

Za dato ν postoji prirodan broj n_ν takav da za sve $n \geq n_\nu$ imamo

$$m\left\{x : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{2^\nu}\right\} < \frac{1}{2^\nu}$$

zbog konvergencije po mjeri. Neka je

$$E_\nu = \left\{x : |f_{n_\nu}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2^\nu}\right\}.$$

Tada, ako $x \notin \bigcup\limits_{\nu=k}^{\infty} E_\nu$ imamo $|f_{n_\nu}(x) - f(x)| < \frac{1}{2^\nu}$ za $\nu \geq k$ odnosno $f_{n_\nu}(x) \to f(x)$. Dakle, $f_{n_\nu}(x) \to f(x)$ za svako $x \notin A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup\limits_{\nu=k}^{\infty} E_\nu \right)$.

Međutim, $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup\limits_{\nu=k}^{\infty} E_\nu \right) \subset \bigcup\limits_{\nu=k}^{\infty} E_\nu$ pa

$$m(A) \leq m \left(\bigcup_{\nu=k}^{\infty} E_\nu \right) \leq \sum_{\nu=k}^{\infty} m(E_i) = 2^{-k+1} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

a odavdje je

$$m(A) = 0.$$

∎

Teorem 2.31. *Fatouova lema, teorema o monotonoj konvergenciji i Lebesgueova teorema o ograničenoj konvergenciji ostaju u važnosti ako se konvergencija skoro svuda zamijeni sa konvergencijom po mjeri.*

3 Diferenciranje

Diferenciranje

Osnovno pravilo diferencijalnog i integralnog računa, koje kazuje da su operacije diferenciranja i integracije inverzne jedna drugoj, može se ovako formulisati:

(A) Ako je f integrabilna funkcija na $[a, b]$, njen neodređeni integral ili jednostavno, integral

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (a \leq x \leq b)$$

ima izvod i $F'(x) = f(x)$ na $[a, b]$.

(B) Ako funkcija G ima izvod

$$G'(x) = g(x) \qquad \text{na } [a, b]$$

tada je:

$$\int_a^x g(t)dt = G(x) - G(a) \qquad (a \leq x \leq b)$$

G je primitivna funkcija od g.

Ako je riječ o Rimanovom integralu, iskazi (A) i (B) važe uz znatna ograničenja: naprimjer, ako su f i g neprekidne. Kada je u pitanju Lebegova integracija, ta ograničenja, kao što ćemo vidjeti mogu se znatno oslabiti. Kod iskaza (A), šta više, nije potrebno nikakvo ograničenje da bi $F' = f$ skoro svuda. na $[a, b]$. Iskaz (B) će vrijediti za specijalnu klasu funkcija (Apsolutno neprekidne funkcije).

Ako je f integrabilna na $[a, b]$ jasno njen integral $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ je neprekidna funkcija, jer

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int\limits_x^{x+h} f(t)dt \right|$$

i birajući h dovoljno malo, zahvaljujući apsolutnoj neprekidnosti integrala (Teorema 2.17).

3.1 Diferenciranje monotonih funkcija

Definicija 3.1. Neka je E skup konačne spoljašnje mjere. Za familiju $\mathcal{F}$, segmenata konačne i ne nula mjere, kažemo da je *pokrivač Vitalija* skupa E, ako za svako $\varepsilon > 0$ i bilo koje $x \in E$ postoji segment $I \in \mathcal{F}$ takav da $x \in I$ i $l(I) < \varepsilon$.

Teorem 3.2 (Vitali)**.** *Neka je E skup konačne spoljašnje mjere i $\mathcal{F}$ familija segmenata koja pokriva skup E u smislu Vitalija. Tada za dato $\varepsilon > 0$, postoji konačna familija $I_1, I_2, ..., I_N$ disjunktnih segmenata iz $\mathcal{F}$ takva da* $m^* \left[E \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{N} I_n \right] < \varepsilon$.

Neka je f monotono rastuća funkcija. Iz predmeta Analiza I imamo:

Ako je dat niz tačaka (x_n) i $x_n \to x_0$ $(x_n > x_0)$ tada $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Još više, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \inf\limits_{x_0 < x} \{f(x)\}$. Ovaj limes se označava sa $f(x_0^+)$. Slično, dokazuje se da postoji $\sup\limits_{x<x_0} \{f(x)\} = \lim\limits_{\substack{x_n \to x_0 \\ x_n < x_0}} f(x_n)$.

Primjer. Monotona funkcija na intervalu $[a, b]$ ima najviše prebrojivo mnogo tačaka prekida. Neka je x tačka prekida funkcije f.

$S_x = f(x_+) - f(x_-) > 0$. Neka je $S_y = f(y_+) - f(y_-) > 0$. Posmatrajmo intervale $I_x = (f(x_-), f(x_+))$, $I_y = (f(y_-), f(y_+))$. Tada za $x \neq y \implies I_x \cap I_y = \emptyset$. Kako je familija disjunktih intervala najviše prebrojiva, to je zadatak riješen.

Sada ćemo pokazati da svaka monotona funkcija ima izvod skoro svuda.

Neka je $f : E \to \mathbb{R}^*$ proizvoljna funkcija i $x_0 \in E$. Za svaki $\varepsilon > 0$ definišemo sada brojeve:

(i) $\quad M_\varepsilon = \sup\limits_{x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), x \neq x_0} \{f(x)\}$ (Može biti $M_\varepsilon = \pm\infty$)

Iz $0 < \varepsilon' < \varepsilon''$ slijedi $M_{\varepsilon'} \leq M_{\varepsilon''}$ pa postoji granična vrijednost $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} M_e \in \mathbb{R}^*$ (zbog monotonosti). Tako dobijeni broj M zovemo limes superior funkcije f u tački x_0. Pišemo $M = \limsup\limits_{x \to x_0} f(x)$ ili $M = \overline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x)$. (Primjetimo da je $\limsup\limits_{n \to \infty} x_n$ specijalan slučaj limes superiora funkcije.) Ako je $M = \limsup\limits_{x \to x_0} f(x)$, tada postoji niz brojeva (x_n), $x_n \in \mathbb{R}$, i $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ i $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = M$.

M je, u sljedećem smislu, maximalan "broj"sa tim svojstvom. Ako je $M' > M$, ne postoji niz brojeva (x_n), $x_n \in \mathbb{R}$,takav da je $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ i $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = M$. (ii) $m = \liminf\limits_{x \to x_0} f(x) = \underline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x) = \sup\limits_{\varepsilon > 0} \inf\limits_{x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), x \neq x_0} \{f(x)\}$ zovemo limes inferior funkcije f u tački x_0. Ako je $m = \liminf\limits_{x \to x_0} f(x)$ postoji niz (x_n), $x_n \in \mathbb{R}$, takav da je $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ i $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = m$. Ako je $m' < m$ takav niz za m' ne postoji. Mogu se definisati četiri "broja":

(1) $\limsup\limits_{x \to x_0+} f(x) = \inf\limits_{\varepsilon > 0} \sup\limits_{x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)} \{f(x)\} = M^+$

(2) $\liminf\limits_{x \to x_0+} f(x) = \sup\limits_{\varepsilon > 0} \inf\limits_{x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)} \{f(x)\} = m^+$

(3) $\limsup\limits_{x \to x_0-} f(x) = \inf\limits_{\varepsilon > 0} \sup\limits_{x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)} \{f(x)\} = M^-$

(4) $\liminf\limits_{x \to x_0-} f(x) = \sup\limits_{\varepsilon > 0} \inf\limits_{x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)} \{f(x)\} = m^-$ Ako je $M^+ = m^+$, tada postoji granična vrijednost funkcije sa desne strane, a ako je $M^- = m^-$ tada postoji granična vrijednost sa lijeve strane. Ako su sve četiri vrijednosti iste, tada postoji granična vrijednost funkcije u toj tački, i obratno. Za funkciju $f(x)$ kažemo da ima izvod ako postoji $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, koji se označava sa $f'(x)$.

Posmatrajmo četiri broja (Dinijevi izvodni brojevi): (1) $D^+ f(x) = \limsup\limits_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

(2) $D^- f(x) = \limsup\limits_{h \to 0+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$

(3) $D_+ f(x) = \liminf\limits_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

(4) $D_- f(x) = \liminf\limits_{h \to 0+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$

Očito je $D^+ f(x) \geq D_+ f(x)$ i $D^- f(x) \geq D_- f(x)$. Ako je $D^+ f(x) = D_+ f(x) = D^- f(x) = D_- f(x) \neq \pm\infty$, tada kažemo da je funkcija $f(x)$ diferencijabilna u tački x i njihova zajednička vrijednost označava se da $f'(x)$ i predstavlja izvod funkcije u tački x.

Primjer. $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}$

Tada imamo:

$$D^+f(0) = \limsup_{h\to 0+} \tfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \limsup_{h\to 0+} \tfrac{h\sin\frac{1}{h}-0}{h} = \overline{\lim_{h\to 0+}} \sin\tfrac{1}{h} = 1$$

$$D^-f(0) = \limsup_{h\to 0+} \tfrac{f(x)-f(x-h)}{h} = \limsup_{h\to 0+} \tfrac{0-0}{h} = 0$$

$$D_+f(0) = \liminf_{h\to 0+} \tfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \liminf_{h\to 0+} \tfrac{h\sin\frac{1}{h}-0}{h} = \underline{\lim}_{h\to 0+} \sin\tfrac{1}{h} = -1$$

Primjer. $D_-f(0) = \liminf_{h\to 0+} \tfrac{f(x)-f(x-h)}{h} = \liminf_{h\to 0+} \tfrac{0-0}{h} = 0$

Teorem 3.3 (Lebesgue)**.** *Neka je f rastuća realna funkcija na intervalu $[a,b]$. Tada je f diferencijabilna skoro svuda. Izvod $f'(x)$ je mjerljiva funkcija i važi:*

$$\int_a^b f'(x)d\mu \leq f(b) - f(a)$$

Dokaz Lebesguove teoreme

Prvo trebamo pokazati da je skup gdje funkcija f nije diferencijabilna mjere nula. Pokazaćemo da skup gdje ta funkcija nema izvod je mjere nula (a nije diferencijabilna ni u tačkama gdje je izvod $\pm\infty$).

Skupova na kojem su svi Dinijevi izvodi konačni, ali se barem neka dva međusobno razlikuju (tada izvod ne postoji) ima konačno mnogo, te ako pokažemo da svaki od njih ima mjeru nula, i njihova unija - spomenuti skup u kojim funkcija f nema izvod - će biti mjere nula (kao konačna unija skupova mjere nula). Navedeno ćemo pokazati za jedan od tih skupova, a za ostale je dokaz analogan.

Posmatrajmo: $E = \{x \in [a,b] : D^+f(x) > D_-f(x)\}$. Pokazati ćemo da je $mE = 0$. Skup E je unija skupova

$$E_{u,v} = \big\{x : D^+f(x) > u > v > D_-f(x)\big\}$$

gdje su u i v racionalni brojevi. Dovoljno je dokazati $m^*E_{u,v} = 0 \; \forall u,v \in \mathbb{Q}$.
Pretpostavimo suprotno: $(\exists p,q \in \mathbb{Q})\; m^*E_{p,q} = 0$. Neka je $\varepsilon > 0$ dati broj, tada postoji otvoreni skup O, takav da $E_{u,v} \subseteq O$ i $mO < m^*E_{p,q} + \varepsilon$. Kako za tačku $x \in E_{p,q}$ vrijedi $D_-f(x) = \liminf_{h\to 0+} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} < q$, za svaku tačku $x \in E_{p,q}$ postoji segment $[x-h,x]$ sadržan u O takav da $f(x) - f(x-h) < qh$

Na osnovu teoreme Vitali, moguće je iz ovog Vitalijevog pokrivanja skupa $E_{p,q}$ odabrati konačnu disjunktnu familiju $\{I_1, I_2, ..., I_N\}$ t.d.

$$m^*\left(E_{u,v} \setminus \bigcup_{k=1}^{N} I_k\right) < \varepsilon$$

Dalje imamo:

$$\begin{aligned}
E_{p,q} &\subseteq \left(E_{p,q} \setminus \bigcup_{k=1}^{N} I_k\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{N} I_k\right) \\
&\implies m^*E_{p,q} \leq m^*\left(E_{p,q} \setminus \bigcup_{k=1}^{N} I_k\right) + m^*\left(\bigcup_{k=1}^{N} I_k\right) \\
&\implies m^*E_{p,q} \leq \varepsilon + m^*\left(\bigcup_{k=1}^{N} I_k\right) \\
&\implies m^*\left(\bigcup_{k=1}^{N} I_k\right) \geq m^*E_{p,q} - \varepsilon
\end{aligned}$$

Ako izvršimo sumiranje po svim ovim segmentima imamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} [f(x_n) - f(x_n - h_n)] < q\sum_{n=1}^{N} h_n = q\sum_{n=1}^{N} mI_n &\overset{\text{disj. int.} I_n}{=} \\
= qm\left(\bigcup_{k=1}^{N} I_k\right) \leq qmO < q(m^*E_{p,q} + \varepsilon)
\end{aligned}$$

Zbog $D^+f(x) = \limsup\limits_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} > p$ imamo da svaka tačka $y \in \bigcup\limits_{k=1}^{N} I_k$ je lijevi kraj proizvoljno malog intervala $[y, y+k]$ koji je sadržan u nekom I_n, takav da je

$$f(y+k) - f(y) > pk$$

Ponovno, na osnovu Teoreme Vitalija moguće je naći konačnu disjunktnu familiju intervala $\{J_1, J_2, ..., J_m\}$ takvu da:

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{N} I_k \setminus \bigcup_{i=1}^{m} J_i\right) < \varepsilon$$

pa dobijamo:

$$
\begin{aligned}
\bigcup_{k=1}^{N} I_k &= \left(\bigcup_{k=1}^{N} I_k \setminus \bigcup_{i=1}^{m} J_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} J_i\right) \\
&\Longrightarrow m^*\left(\bigcup_{k=1}^{N} I_k\right) \leq m^*\left(\bigcup_{k=1}^{N} I_k \setminus \bigcup_{i=1}^{m} J_i\right) + m^*\left(\bigcup_{i=1}^{m} J_i\right) \\
&\Longrightarrow m^*\left(\bigcup_{k=1}^{N} I_k\right) \leq \varepsilon + m^*\left(\bigcup_{i=1}^{m} J_i\right) \\
&\Longrightarrow m^*\left(\bigcup_{i=1}^{m} J_i\right) \geq m^*\left(\bigcup_{k=1}^{N} I_k\right) - \varepsilon \\
&\Longrightarrow m^*\left(\bigcup_{i=1}^{m} J_i\right) \geq m^* E_{p,q} - 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Izvršimo sumiranje po svim takvim intervalima i dobijamo:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} [f(y_i + k_i) - f(y_i)] > p \sum_{i=1}^{m} k_i = p \sum_{i=1}^{m} mJ_i &\overset{\text{disjunktnost intervala } J_i}{=} \\
= pm\left(\bigcup_{i=1}^{m} J_i\right) &\geq p(m^* E_{p,q} - 2\varepsilon)
\end{aligned}
$$

Svaki interval J_i je sadržan u nekom I_n i ako izvršimo sumiranje po svim indeksima i za koje je $J_i \subseteq I_n$ imamo:

$$
\sum_{i} [f(y_i + k_i) - f(y_i)] \leq f(x_n) - f(x_n - h_n),
$$

jer je funkcija $f(x)$ monotono rastuća.Tada:

$$
\sum_{n=1}^{N} [f(x_n) - f(x_n - h_n)] \geq \sum_{i=1}^{m} [f(y_i + k_i) - f(y_i)]
$$

odakle je

$$
\begin{aligned}
q(m^* E_{p,q} + \varepsilon) \geq \sum_{n=1}^{N} [f(x_n) - f(x_n - h_n)] &\geq \\
\geq \sum_{i=1}^{m} [f(y_i + k_i) - f(y_i)] &\geq p(m^* E_{p,q} - 2\varepsilon)
\end{aligned}
$$

Kako je posljednje tačno $\forall \varepsilon > 0$, vrijedi $qm^* E_{p,q} > pm^* E_{p,q}$ odakle je $p > q$ pa je $m^* E_{p,q} = 0$. Dokazali smo da je $g(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ definirana skoro svuda i da je $f(x)$ diferencijabilna u onim tačkama u kojim je $g(x)$ konačna. Neka je $g_n(x) = n\left[f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\right]$, gdje je $f(x) = f(b)$ za $x \geq b$. Tada $g_n(x) \to g(x)$ za skoro svako x i dobijamo da je $g(x)$ mjerljiva funkcija. Imamo $f'(x) = g(x)$ skoro svuda, te kako je $g(x)$ mjerljiva, onda je i $f'(x)$ mjerljiva Definirajmo $f'(x) = 0$ na skupu mjere nula (gdje $f'(x)$ ne postoji), a onda imamo:

$$\int_a^b f'(x)d\mu = \int_a^b g(x)d\mu$$

Zbog monotonosti funkcije f imamo $g_n(x) \geq 0$. Koristimo Fatouovu lemu:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f'(x)d\mu = \int_a^b g(x)d\mu = \int_a^b \lim_{n\to\infty} g_n(x)d\mu = \\
&= \int_a^b \underline{\lim}_{n\to\infty} g_n(x)d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)d\mu = \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_a^b n\left[f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\right]d\mu = \\
&= \underline{\lim}_{n\to\infty}\left[n\int_a^b f(x+\frac{1}{n})d\mu - n\int_a^b f(x)d\mu\right] = \underline{\lim}_{n\to\infty}\left[n\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(t)d\mu - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t)d\mu\right] \\
&= \underline{\lim}_{n\to\infty}\left[f(b) - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t)d\mu\right] \leq \lim_{n\to\infty}\left[f(b) - nf(a)\frac{1}{n}\right] \\
&= f(b) - f(a)
\end{aligned}$$

Dakle, $g(x)$ je integrabilna pa je konačna skoro svuda, pa je $f'(x)$ konačna skoro svuda. ∎

Primjedba. Drugi dio dokaza ove teoreme može se izvesti i na drugi način. Naime, umjesto da prvobitno pokazujemo da je skup u kojem funkcija f nema izvod mjere nula, a onda pokazujemo konačnost tog izvoda preko integrabilnosti pomoćne funkcije g, možemo to uraditi pokazujući i da će skupovi u kojima je neki Dinijev izvod $\pm\infty$ biti mjere nula, što je slično prvom dijelu prethodnog dokaza.

3.2 Funkcije ograničene varijacije

Funkcije ograničene varijacije

Pokazali smo da monotone funkcije imaju izvod skoro svuda. Pokazati ćemo da postoji šira klasa funkcija od njih koja ima izvod skoro svuda.

Primjetimo da razlika monotonih funkcija nije monotona, npr: $f(x) = x - x^2$ nije monotona na $[0, 1]$.

Definicija 3.4. Neka je konačan interval $[a, b]$ podijeljen tačkama x_0, x_1, ..., x_n na n dijelova tako da je $\pi = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$. Svakoj takvoj podjeli π

intervala $[a,b]$ dodijelimo zbir

$$V_\pi = \sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i) - f(x_{i-1}) \right| .$$

Ako postoji realan broj $K \geq 0$ takav da je $V_\pi \leq K$ za svaku podjelu π, tada se funkcija f naziva funkcija ograničene varijacije. Broj $\sup\limits_{\pi} \sum\limits_{i=1}^{n} \left| f(x_i) - f(x_{i-1}) \right|$ (supremum se uzima po svim mogućim podjelama intervala $[a,b]$) naziva se totalna varijacija funkcije f na $[a,b]$ i označava se sa $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$.

Primjer. Svaka monotona funkcija na segmentu $[a,b]$ je ograničene varijacije. Zaista, neka je f monotona rastuća funkcija. Tada, za bilo koju podjelu π segmenta $[a,b]$ imamo:

$$\sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i) - f(x_{i-1}) \right| = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1}) = f(b) - f(a).$$

Primjer. Posmatrajmo funkciju

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{c} x \sin \frac{1}{x}, x \in (0,1] \\ 0, x = 0 \end{array} \right. .$$

Data funkcija nije ograničene varijacije na $[0,1]$. Naime, uzmimo podjelu od $[0,1]$ pomoću tačaka

$$\left\{ x_0 = 1, x_1 = \frac{2}{\pi}, x_2 = \frac{2}{2\pi}, x_3 = \frac{2}{3\pi}, ..., x_{2n-1} = \frac{2}{(2n-1)\pi}, x_{2n} = \frac{2}{2n\pi} \right\}.$$

Imamo:

$$\begin{aligned} f(x_{2k}) &= \frac{2}{2k\pi} \sin \frac{2k\pi}{2} = 0 \\ f(x_{2k+1}) &= \frac{2}{(2k+1)\,\pi} \sin \frac{(2k+1)\,\pi}{2} = \pm \frac{2}{(2k+1)\,\pi} \end{aligned}$$

odakle je

$$\sum_{i=1}^{2n+1} \left| f(x_i) - f(x_{i-1}) \right| =$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|f(x_1) - f(x_{0)}\right| + \left|f(x_2) - f(x_{1)}\right| + \left|f(x_3) - f(x_{2)}\right| + ...+ \\
&+ \left|f(x_{2n}) - f(x_{2n-1)}\right| + \left|f(x_{2n+1}) - f(x_{2n)}\right| \\
&= \left|\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2} - 1\sin 1\right| + \left|\frac{2}{2\pi}\sin\pi - \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}\right| + \left|\frac{2}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{2} - \frac{2}{2\pi}\sin\pi\right| + ...+ \\
&+ \left|\frac{2}{2n\pi}\sin n\pi - \frac{2}{(2n-1)\pi}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}\right| + \left|0 - \frac{2}{2n\pi}\sin n\pi\right| \\
&= \left|\frac{2}{\pi} - 1\sin 1\right| + \left|0 - \frac{2}{\pi}\right| + \left|-\frac{2}{3\pi} - 0\right| + ... + \left|0 \pm \frac{2}{(2n-1)\pi}\right| + |0-0| = \\
&= \left|\frac{2}{\pi} - 1\sin 1\right| + \frac{2}{\pi} + \frac{2}{3\pi} + ... + \frac{2}{(2n-1)\pi} > \\
&> \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n-1}\right)
\end{aligned}
$$

kada $n \to \infty$. Tada $\sup \sum\limits_{i=1}^{n} \left|f(x_i) - f(x_{i-1)}\right| = +\infty$.

Teorem 3.5. *Svaka funkcija sa ograničenom varijacijom je ograničena. Zbir i proizvod funkcija sa ograničenom varijacijom je funkcija sa ograničenom varijacijom.*

Dokaz

Neka je x proizvoljna tačka na $[a,b]$. Imamo:

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &= |f(x) - f(a) + f(a)| \le |f(x) - f(a)| + |f(a)| \le \\
&\le |f(b) - f(x)| + |f(x) - f(a)| + |f(a)| \le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + |f(a)|
\end{aligned}
$$

što pokazuje da je f je ograničena funkcija. Neka su f i g funkcije ograničene varijacije. Posmatrajmo:

$$
\begin{aligned}
\overset{b}{\underset{a}{V}}(f+g) &= \sum_{i=1}^{n} \left|f(x_i) + g(x_i) - f(x_{i-1)} - g(x_{i-1})\right| \le \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \left|f(x_i) - f(x_{i-1)}\right| + \sum_{i=1}^{n} \left|g(x_i) - g(x_{i-1)}\right| \le \\
&\le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)
\end{aligned}
$$

što pokazuje da je $f+g$ je funkcija ograničene varijacije.Također imamo:

$$\begin{aligned}\overset{b}{\underset{a}{V}}(fg) &= \sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)g(x_i)-f(x_{i-1)}g(x_{i-1})\right| = \\ &= \sum_{i=1}^{n}|f(x_i)g(x_i)-f(x_i)g(x_{i-1})+ \\ &+f(x_i)g(x_{i-1})+f(x_{i-1)}g(x_{i-1})\big| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}|f(x_i)|\left|g(x_i)-g(x_{i-1)}\right| + \sum_{i=1}^{n}|g(x_{i-1})|\left|f(x_i)-f(x_{i-1)}\right|\end{aligned}$$

Na osnovu prethodnog teorema, f i g su ograničene funkcije (kao funkcije ograničene varijacije), tj.$(\exists M_1, M_2 \in \mathbb{R})$ tako da je $|f(x)| \leq M_1$ i $|g(x)| \leq M_2$ pa je

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(fg) \leq M_1\overset{b}{\underset{a}{V}}(g) + M_2\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$$

Dakle, fg je funkcija ograničene varijacije. ∎

Teorem 3.6. *Ako funkcija f ima ograničenu varijaciju na $[a,b]$ tada f ima ograničenu varijaciju na segmentima $[a,c]$ i $[c,b]$ za $a<c<b$. Obrnuto, ako je f funkcija ograničene varijacije na $[a,c]$ i $[c,b]$ tada je f funkcija ograničene varijacije na $[a,b]$ i važi jednakost:*

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f)$$

Dokaz

Neka je f ograničene varijacije na $[a,b]$. Uzmimo proizvoljnu podjelu segmenta $[a,c]$ pomoću: $a=x_0<x_1<...<x_m=c$. Dodavanjem proizvoljnih dodatnih tačaka $x_{m+1}<x_{m+2}<...<x_n=b$ na segmentu $[c,b]$ dobijamo

$$\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1)}\right| = \sum_{i=1}^{m}\left|f(x_i)-f(x_{i-1)}\right| + \sum_{i=m+1}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1)}\right|$$

pa je

$$\sum_{i=1}^{m}\left|f(x_i)-f(x_{i-1)}\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1)}\right| \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

Dakle, funkcija f je ograničene varijacije na $[a,c]$. Isto tako i na $[c,b]$.

Neka je sada f ograničene varijacije i na $[a,c]$ i na $[c,b]$. Želimo pokazati da je f ograničene varijacije na $[a,b]$. U tu svrhu posmatrajmo proizvoljnu podjelu segmenta $[a,b]$ $\pi = \{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$. Dodavanjem novih tačaka dijeljenja, tj.

profinjenjem podjele π suma $\sum\limits_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|$ se samo uvećava, tako da dodavanjem nove tačke $x'=c$ dobijamo:

$$\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right| \leq \sum_{x_i\leq c}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right| + \sum_{x_i>c}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right| \leq$$
$$\leq \mathop{V}_a^c(f)+\mathop{V}_c^b(f)$$

odakle je

$$\mathop{V}_a^b(f)=\sup_{\pi}\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right| \leq \mathop{V}_a^c(f)+\mathop{V}_c^b(f).$$

što pokazuje da je funkcija f ograničene varijacije na $[a,b]$.Ostalo je još da pokažemo jednakost iz tvrdnje teorema. Zbog definicije $\mathop{V}_a^b(f)$ imamo da vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{m}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right| + \sum_{i=m+1}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right| \leq \mathop{V}_a^b(f)$$

Ako fiksiramo brojeve x_1, x_2, ..., x_m i uzmemo supremum po svim mogućim podjelama $x_{m+1}<x_{m+2}<...<x_n$ dobijamo:

$$\sum_{i=1}^{m}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right| + \mathop{V}_c^b(f) \leq \mathop{V}_a^b(f)$$

Uzimajući sada supremum po svim mogućim podjelama x_1, x_2, ..., x_m, dobijamo:

$$\mathop{V}_a^c(f)+\mathop{V}_c^b(f)\leq \mathop{V}_a^b(f)$$

Kako vrijedi i $\mathop{V}_a^b(f)\leq \mathop{V}_a^c(f)+\mathop{V}_c^b(f)$ i $\mathop{V}_a^c(f)+\mathop{V}_c^b(f)\leq \mathop{V}_a^b(f)$, mora da vrijedi:

$$\mathop{V}_a^b(f)=\mathop{V}_a^c(f)+\mathop{V}_c^b(f)$$

∎

Posljedica 3.7. *Ako je f funkcija ograničene varijacije na segmentu $[a,b]$, tada je $\mathop{V}_a^x(f)$, $a\leq x\leq b$ monotono rastuća funkcija od x.*

Dokaz. Za $a<x<y$ imamo $\mathop{V}_a^y(f)=\mathop{V}_a^x(f)+\mathop{V}_x^y(f)$, a kako je $\mathop{V}_x^y(f)\geq 0$ to je $\mathop{V}_a^x(f)\leq \mathop{V}_a^y(f)$. ∎

Teorem 3.8. *Funkcija f ima ograničenu varijaciju na $[a,b]$ ako i samo ako je razlika dvaju monotono rastućih funkcija na $[a,b]$.*

$\Rightarrow$

Definišimo $\Phi(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$ i $\Psi(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}}(f) - f(x)$. Tada $f(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$, a zbog prethodne teoreme i njene posljedice imamo da $\Phi(x)$ monotono raste na $[a, b]$. Jedino treba dokazati monotonost funkcije Ψ. Neka je $y > x$.

$$\begin{aligned}
\Psi(y) - \Psi(x) &= \overset{y}{\underset{a}{V}}(f) - \overset{x}{\underset{a}{V}}(f) - [f(y) - f(x)] = \\
&= \overset{x}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{y}{\underset{x}{V}}(f) - \overset{x}{\underset{a}{V}}(f) - [f(y) - f(x)] = \\
&= \overset{y}{\underset{x}{V}}(f) - [f(y) - f(x)]
\end{aligned}$$

Kako je $P = \{x = x_0 < x_1 = y\}$ jedna podjela segmenta $[x, y]$, a $\overset{y}{\underset{x}{V}}(f)$ je po definiciji supremum po svim podjelama segmenta $[x, y]$, jasno je da vrijedi:

$$\begin{aligned}
f(y) - f(x) \leq |f(y) - f(x)| &\leq \overset{y}{\underset{x}{V}}(f) \\
&\Longrightarrow -[f(y) - f(x)] \geq -\overset{y}{\underset{x}{V}}(f) \\
&\Longrightarrow \Psi(y) - \Psi(x) = \overset{y}{\underset{x}{V}}(f) - [f(y) - f(x)] \geq 0 \\
&\Longrightarrow \Psi(y) \geq \Psi(x),
\end{aligned}$$

pa funkcija f je razlika dvije monotone funkcije.

$\Leftarrow$

Neka je f razlika dvije monotone funkcije. Dokazali smo da su monotone funkcije ograničene varijacije, te također da je zbir (pa i razlika) funkcija ograničene varijacije opet funkcija ograničene varijacije. Dakle, f je ograničene varijacije. ∎

Posljedica 3.9. *Ako je f funkcija ograničene varijacije na $[a, b]$, tada postoji $f'(x)$ skoro svuda na $[a, b]$.*

Dokaz. Zbog prethodne teoreme $f(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$, Φ, Ψ su monotone funkcije. Na osnovu Lebesgue-ove th. funkcije Φ i Ψ imaju izvod skoro svuda, odakle slijedi da f ima izvod skoro svuda. ∎

Primjer. Izračunati varijaciju funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x = 0 \\ 1 - x & ; \quad 0 < x < 1 \\ 5 & ; \quad x = 1 \end{cases}$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan.Posmatrajmo podjelu segmenta $[0,1]$ tačkama $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$, takvu da je $max_i |x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$. Sada imamo:

$$\sum |f(x_i) - f(x_{i-1})| = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \ldots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$
$$= |(1 - x_1) - 0| + |(1 - x_2) - (1 - x_1)| + \ldots + |5 - (1 - x_{n-1})|$$
$$= 1 - x_1 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \ldots + x_{n-1} - x_{n-2} + 5 - (1 - x_{n-1})$$
$$= 5 + 2(1 - (x_n - x_{n-1}) - (x_1 - x_0))$$
$$= 5 + 2(1 - 2\varepsilon)$$

Zbog proizvoljnosti ε, odnosno proizvoljnosti podjele, zaključujemo $V_0^1 f = 7$.

Primjer. Izračunati varijaciju funkcije na segmentu $[0,2]$:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & ; \quad x < 1 \\ 10 & ; \quad x = 1 \\ x^2 & ; \quad x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &V_0^2 f = V_0^1 f + V_1^2 f + |f(1) - f(1_-)| + |f(1_+) - f(1)| \\ &= |f(1_-) - f(0)| + |f(2) - f(1_+)| + |f(1) - f(1_-)| + |f(1_+) - f(1)| \\ &= |0 + 1| + |4 - 1| + |10 - 0| + |1 - 10| \\ &= 23 \end{aligned}$$

Primjer. Neka je $f \in V[a,b]$, i neka je $f(x) \geq c > 0$ svuda na $[a,b]$. Dokazati da je i funkcija $g(x) = \frac{1}{f(x)} \in V[a,b]$.

Neka je $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ proizvoljna podjela segmenta $[a,b]$. Za tu podjelu imamo:

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n |\frac{1}{f(x_i)} - \frac{1}{f(x_{i-1})}| \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{|f(x_{i-1}) - f(x_i)|}{|f(x_i)||f(x_{i-1})|} \\ &\leq \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{|f(x_{i-1}) - f(x_i)|}{c^2} \\ &= \textstyle\frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^n |f(x_{i-1}) - f(x_i)| \end{aligned}$$

Zbog proizvoljnosti podjele, odavde zaključujemo da važi $V_a^b g \leq \frac{1}{c^2} V_a^b f$. Kako je $V_a^b f < +\infty$ to je onda i $g \in V[a,b]$.

Primjer. (a) Dokazati da važi: $f \in V[a,b] \Rightarrow |f| \in V[a,b]$.

(b) Da li važi obrat u (a)?

(a) Na osnovu poznate nejednakosti: $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ ||x| - |y|| \leq |x - y|$, imamo za proizvoljnu podjelu

$$\sum_{i=1}^n ||f(x_i)| - |f(x_{i-1})|| \leq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

Odavdje, zbog proizvoljnosti podjele zaključujemo da važi $V_a^b |f| \leq V_a^b f < +\infty$, pa je $g \in V[a,b]$.

(b) Obrat ne važi. Posmatrajmo funkciju:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ -1 & ; \quad x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Tada je $|f|(x) = 1$ za svako $x \in [0,1]$ pa je $V_0^1 f = 0$. Medjutim, ako izaberemo n racionalnih tačaka x_i u rastućem nizu iz $[0,1]$ i izmedju svake dvije takve ubacimo po jednu iracionalnu tačku y_j , na taj način dobijamo podjelu segmenta $[0,1]$: $0 = x_0 < y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1$. Za tu podjelu imamo:

$$\sum_{k=0}^{n} |f(x_k) - f(y_k)| = (n+1)2$$

a ovo možemo učiniti po volji velikim, tj. $f \notin V[a,b]$.

Primjer. 1. Da li su skupovi $C[a,b]$ i $V[a,b]$ usporedivi?

2. Pokazati da je funkcija $f(x) = x - [x]$ ograničene varijacije, a zatim izračunati $V_0^3 f$.

3. Konstruisati graf funkcije $g(x) = V_{-1}^x f$, gdje je $f(x) = 1 - x^2$, na $[-1,1]$.

Primjer. Neka funkcija f ima ograničen izvod u svim tačkama segmenta $[a,b]$. Dokazati da je $f \in V[a,b]$.

Po pretpostavci zadatka $(\exists M < +\infty)\ |f'(x)| \leq M\ ,\ \forall x \in [a,b]$. Neka je $a = \eta_0 < \eta_1 < \ldots < \eta_n = b$ proizvoljna podjela segmenta $[a,b]$. Kako f ima izvod na svakom podrazmaku $[x_{k-1}, x_k]$, to onda vrijedi Lagrangeova teorema, tj.

$$(\exists y_i \in [\eta_{i-1}, \eta_i])\ f(\eta_k) - f(\eta_{k-1}) = f'(y_k)(\eta_k - \eta_{k-1})$$

Na osnovu ovoga onda slijedi

$$\sum_{k=1}^{n} |f(\eta_k) - f(\eta_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |f'(y_k)||\eta_k - \eta_{k-1}| \leq M \sum_{k=1}^{n} (\eta_k - \eta_{k-1}) = M(b-a)$$

Prelaskom na supremum po svim podjelama zaključujemo $V_a^b f < \infty$.

Primjer. Neka je funkcija f definisana na $[a, +\infty)$, i neka je $f \in V[a,t]$ $(\forall t > a)$.

1. Dokazati: Ako postoji $\lim\limits_{t \to +\infty} V_a^t f$ onda postoji i $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2. Navesti primjer da obrat ne važi.

Primjer. Dokazati da je funkcija $f \in V[a,b]$ ako i samo ako $(\exists g : [a,b] \to \mathbb{R}\ ,\ g \uparrow)|f(y) - f(x)| \leq g(y) - g(x)$ za proizvoljne $a \leq x \leq y \leq b$

3.3 Diferenciranje integrala

Diferenciranje integrala

U ovom odjeljku ćemo pokazati da izvod neodređenog integrala integrabilne funkcije je (skoro svuda) podintegralna funkcija.

Teorem 3.10. *Ako je f integrabilna funkcija na $[a,b]$ tada je funkcija F definisana sa:*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

neprekidna funkcija sa ograničenom varijacijom na $[a,b]$

Dokaz

Neprekidnost: Neka je $x \in [a,b]$ proizvoljno, i neka ja $\varepsilon > 0$ proizvoljno izabrano. Tada na osnovu ranije teoreme postoji $\delta > 0$ tako da za svaki skup $A \subseteq [a,b]$ za koji važi $m(A) < \delta$ imamo:

$$\int_A |f(t)|dt < \varepsilon$$

Tada za svako $y \in (x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2}) \cap [a,b]$ važi:

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq \int_{(x-\frac{\delta}{2}, x+\frac{\delta}{2})} |f(t)|dt < \varepsilon$$

Pokažimo da je F ograničene varijacije.
Posmatrajmo podjelu segmenta $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Tada:

$$\sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)dt| = \int_a^b |f(t)|dt$$

odakle

$$\bigvee_a^b (f) \leq \int_a^b |f(t)|dt < \infty$$

∎

Zaključak

Funkcija F ima izvod skoro svuda.

Primjer. Data je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

Pokazati da $\int_0^1 f(x)dx = \dfrac{1}{2}$ i $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ je neprekidna funkcija.

Podijelimo segment $[0,1]$ sa

$$0 = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < \frac{1}{2} < x_i < ... < x_n = 1.$$

Formirajmo integralnu sumu Rimana:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} f(\xi_k)\Delta x_k + f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{k=i+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \\
&= f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{k=i+1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i + x_n - x_i = \\
&= f(\xi_i)\Delta x_i + 1 - x_i = \begin{cases} 1 - x_i, & \text{za } \xi_i < \frac{1}{2} \\ \Delta x_i + 1 - x_i, & \text{za } \xi_i \geq \frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

No $|x_i - \frac{1}{2}| \leq \Delta x_i$ a kako $\Delta x_i \to 0 \implies x_i \to \frac{1}{2}$, pa je $\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.Slično se zaključuje da je

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{za } x < \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2}, & \text{za } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} .$$

Teorem 3.11. *Ako je f integrabilna na $[a,b]$ i ako je $\int\limits_a^x f(t)dt = 0$ za sve $x \in [a,b]$ tada je $f(x) = 0$ s.s na $[a,b]$.*

Dokaz

Kako je $\{x : f(x) \neq 0\} = \{x : f(x) > 0\} \cup \{x : f(x) < 0\}$ dokazat ćemo da je $m\{x : f(x) > 0\} = 0$. Pretpostavimo suprotno, tj. $f(x) > 0$ na skupu E pozitivne mjere. Zbog teoreme iz teorije mjere postoji zatvoren skup F, takav da $F \subseteq E$ i $mF > 0$.

Neka je $O = (a,b)\backslash F = (a,b) \cap F^C$. Skup O je otvoren skup. Tada:

$$0 = \int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_O f(t)dt + \int\limits_F f(t)dt$$

tj.

$$\int\limits_F f(t)dt = -\int\limits_O f(t)dt$$

Pošto je O otvoren skup, možemo pisati: $O = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$, gdje su (a_n, b_n) intervali, pa imamo

$$\int\limits_O f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{a_n}^{b_n} f(t)dt$$

Pokažimo da je $\int\limits_F f(t)dt \neq 0$. Naime, formirajmo skupove $F_n = \{x \in F : f(x) > \frac{1}{n}\}$. Tada je $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, pa je

$$\int\limits_F f(t)dt \geq \int\limits_{F_n} f(t)dt \geq \frac{1}{n}m(F_n)$$

pa ako bi bilo $\int\limits_F f(t)dt = 0$, tada bi moralo biti $m(F_n) = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ odnosno $m(F) = 0$, što je kontradikcija. Kako je $\int\limits_F f(t)dt \neq 0$ dobijamo da je $\int\limits_O f(t)dt \neq 0$, odnosno $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{a_n}^{b_n} f(t)dt \neq 0 \implies \exists n \in \mathbb{N}$ takav da je $\int\limits_{a_n}^{b_n} f(t)dt \neq 0$ jer u suprotnom, ako je $\int\limits_{a_n}^{b_n} f(t)dt = 0$ za $\forall n \in \mathbb{N}$ imamo $\int\limits_O f(t)dt = 0$, što je kontradikcija. Međutim, zbog

$$\int\limits_{a_n}^{b_n} f(t)dt = \int\limits_a^{b_n} f(t)dt - \int\limits_a^{a_n} f(t)dt$$

imamo $\int\limits_a^{b_n} f(t)dt \neq 0$ ili $\int\limits_a^{a_n} f(t)dt \neq 0$. U svakom slučaju dobijemo da postoji $x \in [a, b]$ takav da $\int\limits_a^x f(t)dt \neq 0$, što je suprotno pretpostavci teoreme. Na sličan način se pokaže i da je $m\{x : f(x) < 0\} = 0$

Teorem 3.12. *Neka je f ograničena i mjerljiva funkcija na segmentu $[a, b]$ i $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt + F(a)$ tada je $F'(x) = f(x)$ s.s. na $[a, b]$.*

Dokaz. Vježba! ∎

Primjedba. Kako je poznato, funkciju F zovemo neodređenim integralom funkcije f ako je $F'(x) = f(x)$.

Neodređeni integral je određen sa tačnošću do na konstantu. Mi smo dokazali ako je f integrabilna funkcija na segmentu $[a, b]$, tada funkcija:

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt + c$$

ima svojstvo da je $F'(x) = f(x)$ što znači da je $\int\limits_a^x f(t)dt$ neodređeni integral funkcije f.

3.4 Apsolutno neprekidne funkcije

Apsolutno neprekidne funkcije

Dat ćemo karakterizaciju funkcija koje imaju svojstvo da:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

Definicija 3.13. Realna funkcija f definisana na $[a, b]$ naziva se apsolutno neprekidna na $[a, b]$, ako za svaki dati broj $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ tako da je

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i') - f(x_i)| < \varepsilon$$

za svaku konačnu familiju disjunktnih intervala $(x_i', x_i) \subset [a, b]$ $i = 1, 2, ..., n$, takvu da je $\sum_{i=1}^{n} |x_i' - x_i| < \delta$.

Primjetimo da je svaka apsolutno neprekidna funkcija ujedno i neprekidna. Naime, ako uzmemo $n = 1$, dobijamo definiciju uniformne neprekidnosti, pa je svaka apsolutno neprekidna funkcija i uniformno neprekidna, a samim tim je i neprekidna. U opštem slučaju, obrat ne važi.

Primjer. Neka je data funkcija f definisana na $[a, b]$, i neka funkcija f zadovoljava uslov Lipšica na $[a, b]$, tada je funkcija f apsolutno neprekidna.
Pošto funkcija f zadovoljava uslov Lipšica na $[a, b]$, to znači da $\exists M > 0$ tako da

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \quad (\forall x, y \in [a, b])$$

Neka je sada dato $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Izaberimo da je $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$. Neka je sada data konačna familija disjunktnih intervala $(x_i', x_i) \subset [a, b]$ $i = 1, 2, ..., n$ takva da je $\sum_{i=1}^{n} |x_i' - x_i| < \delta$. Sada je:

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i') - f(x_i)| \leq M \sum_{i=1}^{n} |x_i' - x_i| < M \cdot \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon$$

Dakle, funkcija f je apsolutno neprekidna.

Teorem 3.14. *Ako je f apsolutno neprekidna funkcija, tada je f funkcija ograničene varijacije na $[a, b]$.*

Dokaz

Neka je δ pozitivan broj koji odgovara datom pozitivnom broju ε u definiciji apsolutne neprekidnosti funkcije f. Neka funkcija f ima neograničenu varijaciju na $[a, b]$. Podijelimo segment $[a, b]$ na n-podintervala

$$[a, x_1],\ [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, b]$$

takav da $\max |x_i - x_{i-1}| < \delta$. Totalna varijacija funkcije f bila bi beskonačna bar na jednom podintervalu, neka je to interval $[x_{i-1}, x_i]$.

Postoji podjela

$$x_{i-1} = x_i^{(0)} < x_i^{(1)} < ... < x_i^{(j)} < ... < x_i^{(m)} = x_i$$

intervala $[x_{i-1}, x_i]$ takva da je

$$\sum_{j=1}^{m} \left| f(x_i^{(j)}) - f(x_i^{(j-1)}) \right| > \varepsilon$$

i

$$\sum_{j=1}^{m} |x_i^{(j)} - x_i^{(j-1)}| < \delta$$

što je kontradikcija sa pretpostavkom da je f apsolutno neprekidna. Time je teorem dokazan.

Posljedica 3.15. *Apsolutno neprekidna funkcija f na $[a, b]$ ima izvod skoro svuda na $[a, b]$.*

Primjer. Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

je neprekidna ali nije apsolutno neprekidna.
Ranije smo dokazali da je ovako definisana funkcija neprekidna, ali da nije ograničene varijacije. Sada je jasno da ova funkcija nije apsolutno neprekidna, jer bi u protivnom imala ograničenu varijaciju.

Teorem 3.16. *Ako je f apsolutno neprekidna funkcija i ako je $f'(x) = 0$ skoro svuda, tada je $f(x) = c$ (c-konst).*

Primjer. Kantorova funkcija je neprekidna, ima ograničenu varijaciju, ali nije apsolutno neprekidna.

Kantorova funkcija je konstantna na komplementu Kantorovog skupa, koji ima mjeru 1, pa je dakle $f'(x) = 0$ s.s. na $[0, 1]$.

Ako bi funkcija f bila apsolutno neprekidna, onda bi na osnovu prethodne teoreme moralo biti $f(x) = c$ (c-konst), što nije ispunjeno. Dakle, Kantorova funkcija nije apsolutno neprekidna.

Teorem 3.17. *Funkcija F je neodređeni integral ako i samo ako je F apsolutno neprekidna funkcija.*

Dokaz

Ako je F neodređeni integral onda je F apsolutno neprekidna zbog apsolutne neprekidnosti integrala. Neka je funkcija F apsolutno neprekidna na $[a, b]$. Tada je funkcija F ograničene varijacije na $[a, b]$ i možemo pisati:

$$F(x) = F_1(x) - F_2(x)$$

gdje su F_1 i F_2 monotono rastuće funkcije na $[a, b]$.

Funkcija F ima izvod s.s. i važi:

$$F'(x) = F_1'(x) - F_2'(x)$$

i

$$|F'(x)| \leq |F_1'(x)| + |F_2'(x)| = F_1'(x) + F_2'(x) \text{ s.s na } [a, b]$$

Nadalje imamo:

$$\begin{aligned}\int_a^b |F'(x)|dx &\leq \int_a^b F_1'(x) + \int_a^b F_2'(x) \\ &\leq F_1(b) - F_1(a) + F_2(b) - F_2(a) \quad \text{(zbog th.1.2)}\end{aligned}$$

Dobili smo da je $|F'(x)|$ integrabilna funkcija. Definišimo:

$$G(x) = \int_a^x F'(t)dt$$

Imamo da je $G(x)$ apsolutno neprekidna funkcija, pa je takva i funkcija:

$$f(x) = F(x) - G(x)$$

Zbog ranije teoreme imamo:

$$f'(x) = F'(x) - G'(x) = F'(x) - F'(x) = 0 \text{ s.s. na } [a, b]$$

i dobijamo da je $f(x) = konst$. Dakle, imamo:

$$F(x) - \int_a^x F'(t)dt = c$$

U posljednju relaciju stavimo $x = a$, pa zbog

$$\int_a^a F'(t)dt = 0 \implies F(a) = c$$

imamo:

$$F(x) = \int_a^x F'(t)dt + F(a)$$

čime je dokaz gotov. ∎

Posljedica 3.18. *Svaka apsolutno neprekidna funkcija je neodređeni integral svoga izvoda.*

4 Stieltjesov integral

Stieltjesov integral

Posmatrajmo sad (još jednu!) generalizaciju koncepta integrala, tj. *Stieltjesov integral*.

Neka su f i g dvije funkcije definirane na segmentu $[a, b]$.

Segment $[a, b]$ dijelimo pomoću tačaka x_0, x_1, ..., x_n na n dijelova tako da je $\pi = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$.

U svakom od podsegmenata podjele $[x_{k-1}, x_k]$ uzmimo proizvoljnu tačku ξ_k i sastavimo sumu:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right].$$

Ako pri

$$\lambda(\pi) = \max_{1 \le k \le n} (x_k - x_{k-1}) \to 0$$

gornja suma konvergira konačnoj granici I, koja ne zavisi od izbora tačaka ξ_k i načina dijeljenja segmenta, tada se taj limes I naziva integral Stieltjesa funkcije f u odnosu na funkciju g u segmentu $[a, b]$ i označava se sa:

$$\int_a^b f(x)dg(x) \text{ ili } S\int_a^b f(x)dg(x).$$

Definicija 4.1. Ako postoji broj I takav da za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$, takvo da za svaki izbor tačaka ξ_k iz $[x_{k-1}, x_k]$, i za bilo koju podjelu π segmenta $[a, b]$, takvu da iz $\lambda(\pi) < \delta$ imamo:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)\left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right]\} - I\right| < \varepsilon$$

Tada broj I je Stieltjesov integral funkcije f u odnosu na funkciju g. Specijalno, ako je $g(x) = x$, dobijamo da je Riemannov integral specijalan slučaj Stieltjesovog integrala

Iz definicije Stieltjesovog integrala, neposredno slijede osnovne osobine:

1. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\, dg(x) = \int_a^b f_1(x)dg(x) + \int_a^b f_2(x)dg(x)$
2. $\int_a^b f(x)d\left[g_1(x) + g_2(x)\right] = \int_a^b f(x)dg_1(x) + \int_a^b f(x)dg_2(x)$
3. Ako su C_1 i C_2 konstante, tada je $\int_a^b C_1 f(x)d\left[C_2 g(x)\right] = C_1 C_2 \int_a^b f(x)dg(x)$.

4. Ako je funkcija g konstanta na $[a,b]$, tada je svaka funkcija f integrabilna u odnosu na g i važi: $\int\limits_a^b f(x)dg(x) = 0$

5. Ako je $a < c < b$ i ako postoje sva tri Stieltjesova integrala $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$, $\int\limits_a^c f(x)dg(x)$, $\int\limits_c^b f(x)dg(x)$, tada važi jednakost $\int\limits_a^b f(x)dg(x) = \int\limits_a^c f(x)dg(x) + \int\limits_c^b f(x)dg(x)$.

Primjedba. Ako postoji integral $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ tada postoje integrali $\int\limits_a^c f(x)dg(x)$ i $\int\limits_c^b f(x)dg(x)$, gdje je $a < c < b$. Međutim, obrat ne važi.

Primjer. Neka su f i g definirane sa:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in [-1,0] \\ 1, x \in (0,1] \end{cases} \quad \text{i } g(x) = \begin{cases} 0, x \in [-1,0) \\ 1, x \in [0,1] \end{cases}$$

Integrali $\int\limits_{-1}^0 f(x)dg(x)$ i $\int\limits_0^1 f(x)dg(x)$ postoje i jednaki su nuli, ali $\int\limits_{-1}^1 f(x)dg(x)$ ne postoji. Zaista, podijelimo segment $[-1,1]$ na dijelove tako da tačka 0 nije tačka podjele i posmatrajmo sumu:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\left[g(x_k) - g(x_{k-1)}\right].$$

Tada, ako je $x_{i-1} < 0 < x_i$ u sumi δ ostaje i-ti sabirak, jer za tačke x_k i x_{k-1} sa jedne strane nule imamo $g(x_k) = g(x_{k-1})$, pa je

$$\sigma = f(\xi_i)\left[g(x_i) - g(x_{i-1)}\right] = f(\xi_i).$$

Dakle, u zavisnosti od $\xi_i \leq 0$ ili $\xi_i > 0$ imamo $\sigma = 0$ ili $\sigma = 1$, pa δ nema granicu.

Pokazuje se da je nepoklapanje tačaka prekida funkcija f i g uz još neka ograničenja dovoljan uslov za egzistenciju Stieltjesovog integrala.

Iako i f i g zadovoljavaju te spomenute dodatne uslove - obje su ograničene varijacije na $[0,1]$, sasvim je jasno da imaju zajedničku tačku prekida $x = 0$.

Teorem 4.2 (Parcijalna integracija)**.** *Ako postoji jedan od integrala* $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ *ili*

$\int_a^b g(x)df(x)$, *postojati će i drugi, i vrijedi:*

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)df(x)$$

Dokaz

Pretpostavimo da postoji $\int_a^b f(x)dg(x)$. Podijelimo segment $[a, b]$ na dijelove i formirajmo sumu:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right] = \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(x_{k-1}) = \\ &= f(\xi_n)g(x_n) - f(\xi_1)g(x_0) - \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\left[f(\xi_{k+1})_- f(\xi_k)\right]\end{aligned}$$

Dodavanjem i oduzimanjem razlike $f(b)g(b) - f(a)g(a)$ dobijamo:

$$\begin{aligned}&\sigma = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \\ &\left\{ - \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\left[f(\xi_{k+1})_- f(\xi_k)\right] + \right. \\ &\left. + g(a)\left[f(\xi_1) - f(a)\right] + g(b)\left[f(b) - f(\xi_n)\right]\right\}\end{aligned}$$

Izraz u velikoj zagradi je integralna suma za Stieltjesov integral $\int_a^b g(x)df(x)$ (gdje su sada $[\xi_k, \xi_{k+1}]$ segmenti podjele, a x_k tačke unutar tih segmenata, ali to nije bitno, jer dijametri tih podjela istovremeno teže nuli), pa dobijamo:

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)df(x). \blacksquare$$

Teorem 4.3. *Neka je f neprekidna funkcija na $[a, b]$, a g ograničene varijacije, tada je funkcija f Stieltjes-integrabilna u odnosu na g, tj. postoji integral:*

$$\int_a^b f(x)dg(x).$$

Dokaz

Ranije je pokazana da je svaka funkcija ograničene varijacije razlika dvije monotone funkcije, pa je dovoljno posmatrati slučaj kada funkcija g monotono raste. Neka je $\pi = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ bilo koja podjela segmenta $[a, b]$ i neka je:

$$m_k = \min_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} \{f(x)\} \quad M_k = \min_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} \{f(x)\}$$

Neka je

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k \left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right]$$
$$S = \sum_{k=1}^{n} M_k \left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right]$$

Pri bilo kojem izboru tačaka $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ imamo $s \leq \sigma \leq S$. Dodavanjem novih tačaka dijeljenja suma s ne opada, a S ne raste. Neka su s_1, S_1, s_2, S_2 odgovarajuće sume za dvije podjele π_1 i π_2 segmenta $[a, b]$. Ako je $\pi_3 = \pi_1 \cup \pi_2$, a s_3 i S_3 odgovarajuće sume podjele π_3, imamo $s_1 \leq s_3 \leq S_3 \leq S_2$ odakle je $s_1 \leq S_2$.

Neka je $I = \sup\limits_{\pi} \{s\}$. Pri bilo kojoj podjeli imamo $s \leq I \leq S$ odakle je $|\sigma - I| \leq S - s$.

Poznato je da je neprekidna funkcija na zatvorenom i ograničenom skupu uniformno neprekidna, pa je tako i f uniformno neprekidna na $[a, b]$.

Zbog toga za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da iz $|x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

No tada pri $\lambda = \lambda(\pi) = \max |x_k - x_{k-1}| < \delta$ imamo da je $M_k - m_k < \varepsilon$ $(k = 1, 2, ..., n)$ odakle je $S - s \leq \varepsilon \left[g(b) - g(a)\right]$ pa je $|\sigma - I| < \varepsilon \left[g(b) - g(a)\right]$, tj. $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = I = \int\limits_a^b f(x) dg(x)$. ∎

Teorem 4.4. *Neka je f neprekidna na $[a, b]$, a funkcija g ima izvod skoro svuda na $[a, b]$. Ako je funkcija $g'(x)$ Riemann-integrabilna, tada je:*

$$S \int_a^b f(x) dg(x) = R \int_a^b f(x) g'(x) dx.$$

Dokaz

Iz uslova teoreme slijedi da funkcija g ispunjava Lipshitzov uslov, pa je g i funkcija ograničene varijacije. Funkcija $f(x)g'(x)$ je skoro svuda neprekidna, pa postoji Riemannov integral $R\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx$. Segment $[a,b]$ dijelimo na n dijelova tačkama: $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ i u svakom od segmenata $[x_{k-1}, x_k]$ primjenimo Lagrangeovu teoremu:

$$g(x_k) - g(x_{k-1)} = g'(\overline{x_k})(x_k - x_{k-1})$$

Ako izaberemo $\xi_k = \overline{x_k}$, dobijamo:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x_k})g'(\overline{x_k})(x_k - x_{k-1})$$

što predstavlja Riemannovu sumu za integral $R\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx$, a to je jednako sa $S\int\limits_a^b f(x)dg(x)$. ■

Teorem 4.5. *Neka je f neprekidna na $[a,b]$, a $g(x) = const$ na svakom od intervala (a, c_1), (c_1, c_2), ..., (c_m, b), gdje je $a < c_1 < c_2 < ... < c_m < b$. Tada je:*

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) = f(a)\left[g(a_+) - g(a)\right] + \sum_{k=1}^{m} f(c_k)\left[g(c_{k+}) - g(c_{k-})\right]$$
$$+ f(b)\left[g(b) - g(b_-)\right]$$

Dokaz

Može se pokazati da je:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(g) = |g(a_+) - g(a)| + \sum_{k=1}^{m} \{|g(c_k) - g(c_{k-}) + g(c_{k+}) - g(c_k)|\} + |g(b) - g(b_-)|$$

odakle je $g(x)$ ograničene varijacije na svakom dijelu od $[a,b]$. Dakle, $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ postoji, a zbog osobine (5) i primjedbe:

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \sum_{k=0}^{m} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dg(x)$$

gdje je $c_0 = a$ i $c_{m+1} = b$. Ostaje integral $\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dg(x)$.

Ako podijelimo svaki segment $[c_k, c_{k+1}]$ tačkama

$$c_k = c_0^{(k)} < c_1^{(k)} < ... < c_{m_k}^{(k)} = c_{k+1}$$

(i odgovarajućim međutačkama $\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, ... , \xi_{m_k}^{(k)}$) i posmatramo odgovarajuću sumu $\sigma^{(k)}$ imamo (jer je funkcija g konstantna na intervalima (c_k, c_{k+1})):

$$\sigma^{(k)} = f(\xi_1^{(k)}) \left[g(c_1^{(k)}) _- g(c_0^{(k)})\right] + f(\xi_{m_k}^{(k)}) \left[g(c_{m_k}^{(k)}) _- g(c_{m_k-1}^{(k)})\right]$$

što kada dijametar podjele teži nuli prelazi u:

$$\int\limits_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dg(x) = f(\xi_1^{(k)}) \left[g(c_{k+}) _- g(c_k)\right] + f(\xi_{m_k}^{(k)}) \left[g(c_{k+1}) _- g(c_{k+1-})\right]$$

odakle je

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) = f(a) \left[g(a_+) - g(a)\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} f(c_k) \left[g(c_{k+}) _- g(c_{k-})\right] + f(b) \left[g(b) - g(b_-)\right] .$$

■

Lema 4.6. *Neka je f neprekidna na $[a, b]$,a funkcija g ograničene varijacije, tada je:*

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dg(x) \right| \leq M \bigvee_a^b (g), \text{ gdje je } M = \max_{x \in [a,b]} \{f(x)\}$$

Dokaz. Za bilo koju podjelu segmenta $[a, b]$ i bilo koji izbor tačaka ξ_k, imamo:

$$|\sigma| = \left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right] \right| \leq M \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq M \bigvee_a^b (g)$$

odakle jasno slijedi tvrđenje teoreme. ■

Teorem 4.7. *Neka je g funkcija ograničene varijacije na $[a, b]$ i neka je dat niz neprekidnih funkcija (f_n) na $[a, b]$, koji uniformno konvergira funkciji f. Tada je:*

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_a^b f_n(x)dg(x) = \int\limits_a^b f(x)dg(x)$$

Dokaz. Neka je $M_n = \max\limits_{a \le x \le b} \{f_n(x) - f(x)\}$. Znamo da je granična funkcija $f(x)$ neprekidna, kao limes (uniformno) neprekidnih funkcija $f_n(x)$. Na osnovu prethodne th:

$$\left| \int_a^b f_n(x) dg(x) - \int_a^b f(x) dg(x) \right| = \left| \int_a^b \{f_n(x) - f(x)\} \, dg(x) \right| \le M_n \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$$

Zbog uniformne konvergencije $M_n \to 0$, pa vrijedi:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x) dg(x) = \int_a^b f(x) dg(x).$$

∎

Teorem 4.8 (Helly-Bray). *Neka je f neprekidna funkcija na $[a, b]$ i neka niz (g_n) konvergira funkciji g za svako $x \in [a, b]$. Ako je $\overset{b}{\underset{a}{V}}(g_n) \le K < +\infty$ za svako n, tada je:*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x) dg_n(x) = \int_a^b f(x) dg(x).$$

5 Kvadratno integrabilne funkcije

5.1 L_2 prostor

L_2 prostor

Jedan od najvažnijih prostora među mnogobrojnim linearnim normiranim prostorima na koje nailazimo u funkcionalnoj analizi je Hilbertov prostor.

Ime su dobili prema Davidu Hilbertu, njemačkom matematičaru, koji ih je uveo u svezi sa teorijom integralnih jednačina. Oni su prirodni beskonačnodimenzionalni analogoni n-dimenzionalnog Euklidskog prostora.

Koncept Lebesguevog integrala nam omogućava da uvedemo prostor kvadratno integrabilnih funkcija. Posmatrajmo funkcije $f(x)$, definisane na nekom skupu R, koji je mjerljiv, opskrbljen sa mjerom μ i gdje je $\mu(R) < \infty$. Funkcije $f(x)$ su mjerljive funkcije i definisane s.s. na R. Nećemo praviti distinkciju između ekvivalentnih funkcija na R.

Napomena

Dvije funkcije f i g, definisane na istom mjerljivom skupu R, su *ekvivalentne* ($f \sim g$) ako

$$\mu(\{x : f(x) \ne g(x)\}) = 0.$$

Definicija 5.1. Kažemo da je funkcija $f(x)$ kvadratno integrabilna (ili sumabilna) preko R ako integral

$$\int_R f^2(x)d\mu$$

postoji, tj. konačan je. Skup svih funkcija koje su kvadratno integrabilne označavamo sa L_2.

Teorem 5.2. *Proizvod dvije kvadratno integrabilne funkcije je integrabilna funkcija.*

Dokaz. Direktno slijedi iz nejednakosti

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{f^2(x) + g^2(x)}{2}$$

i osobina Lebesguevog integrala. ∎

Posljedica 5.3. *Svaka kvadratno integrabilna funkcija je integrabilna.*

Teorem 5.4. *Suma dvije L_2 funkcije je L_2 funkcija.*

Dokaz. Kako je

$$(f(x) + g(x))^2 \leq f^2(x) + 2|f(x)g(x)| + g^2(x),$$

i po prethodnoj teoremi svaka od tri funkcije na desnoj strani je sumabilna, rezultat slijedi. ∎

Teorem 5.5. *Ako je $f \in L_2$ i α je proizvoljan broj, onda je $\alpha f \in L_2$.*

Dokaz. Ako je $f \in L_2$, onda

$$\int (\alpha f(x))^2 d\mu = \alpha^2 \int f^2(x)d\mu < \infty.$$

∎

Prethodne dvije teoreme nam pokazuju da su linearne kombinacije funkcija iz L_2 također u L_2. Štaviše, očito su zadovoljeni svi uslovi definicije linearnog vektorskog prostora, pa je stoga skup L_2 kvadratno integrabilnih funkcija linearan vektorski prostor. Definišimo sada skalarni proizvod na L_2 funkcijama pomoću

$$\langle f, g \rangle = \int_R f(x)g(x)d\mu. \tag{6}$$

Skalarnim proizvodom se smatra bilo koja realna funkcija na paru vektora linearnog prostora koja zadovoljava slijedeće uslove :

1. $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$,

2. $\langle f_2 + f_1, g\rangle = \langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle$,

3. $\langle \lambda f, g\rangle = \lambda\langle f, g\rangle$,

4. $\langle f, f\rangle > 0 \; ako \; f \neq 0$.

Iz osnovnih značajki integrala direktno slijedi da izraz (6) zadovoljava uslove 1-3. S obzirom da smo se dogovorili ne razlikovati između ekvivalentnih funkcija, posebno uzevši kao jedinični element skup svih funkcije na R koje su ekvivalentne sa $f(x) \equiv 0$, uslov 4 je također zaddovoljen. Ovo nas vodi do

Definicija 5.6. Pod L_2 prostorom podrazumjevamo Euklidski prostor (linearni vektorski prostor sa skalarnim proizvodom), čiji su elementi klase ekvivaletnih kvadratno integrabilnih funkcija. Sabiranje elemenata i njihovo množenje skalarom se definiše kao obično sabiranje i množenje funkcija, a skalarni proizvod je dat sa jednačinom (6).

U L_2, kao i u bilo kojem drugom euklidskom prostoru, vrijede nejednakost Cauchy-Schartz-Bunjakovskii, koja ovdje ima oblik:

$$\left(\int f(x)g(x)d\mu\right)^2 \leq \int f^2(x)d\mu \cdot \int g^2(x)d\mu, \tag{7}$$

te nejednakost trougla, koja ima oblik

$$\sqrt{\int (f(x)+g(x))^2 d\mu} \leq \sqrt{\int f^2(x)d\mu} + \sqrt{\int g^2(x)d\mu}. \tag{8}$$

Posebno, ako uzmemo $g(x) \equiv 1$, nejednakost (7) implicira:

$$\left(\int f(x)d\mu\right)^2 \leq \mu(R)\int f^2(x)d\mu. \tag{9}$$

Uvedimo normu na L_2 sa

$$||f|| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int f^2(x)d\mu}, \qquad f \in L_2. \tag{10}$$

Za vježbu, koristeći se osobinama skalarnog proizvoda, pokažite da norma definisana jednačinom (10) zadovoljava uslove definicije norme:

1. $||af|| = |a|||f||$,
2. Ako je $||f|| = 0$, onda je f ekvivalentna nula funkciji,
3. $||f+g|| \leq ||f|| + ||g||$.

Teorem 5.7. *Prostor L_2 je kompletan.*

Primjedba. Prostor M je kompletan ako svaki Cauchyjev niz konvergira ka članu prostora M.

Dokaz. Koristeći se teoremom o ograničenoj konvergenciji i Fatouovom lemom. ∎

5.2 Uvod u metričke prostore

Metrički prostori

Definicija 5.8. Neka je X proizvoljan neprazan skup. Za funkciju $d : X \times X \to \mathbb{R}$ kažemo da je metrika ili metrička funkcija na X ako zadovoljava sljedeća četiri uslova za proizvoljne x, y i z iz X:

M1. $d(x, y) \geq 0$,

M2. $d(x, y) = 0$ ako i samo ako $x = y$,

M3. $d(x, y) = d(y, x)$,

M4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Tada kažemo da je skup X snabdjeven metrikom d i nazivamo ga metrički prostor. Elemente skupa X nazivamo tačkama, a realan broj $d(x, y)$ nazivamo rastojanjem izmedju tačaka x i y.

Dakle, metrički prostor je uredjeni par (X, d) koga čine skup X i na njemu uvedena metrika d.

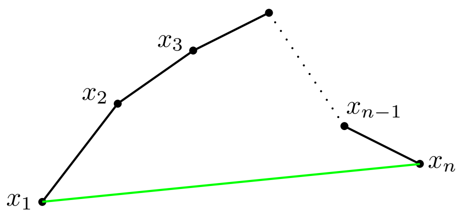
Uslovi M1.-M4. nazivaju se aksiomi metrike, a pojedinačno to su *pozitivna definitnost* (M1.), *strogost* (M2.), *simetričnost* (M3.) i *nejednakost trougla* (M4.).

Osobina(M4.), tj. nejednakost trougla se može generalizovati pravilom mnogougla.

Lema 5.9. *U svakom metričkom prostoru* (X, d) *vrijedi pravilo mnogougla, tj. za proizvoljne* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *(*$n \geq 3$*), vrijedi*

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) .$$

Dokaz. Dokaz se izvodi matematičkom indukcijom po $n \in \mathbb{N}$. ∎



Slika 1: Pravilo mnogougla

Primjer. Neka je X proizvoljan skup i neka je za $x, y \in X$ zadato

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \quad x = y \ , \\ 1 & ; \quad x \neq y \ . \end{cases}$$

Funkcija d jeste metrika i (X, d) nazivamo diskretni metrički prostor.

Primjer. Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ sa rastojanjem

$$d(x,y) = |x-y| \ ,$$

predstavlja dobro nam poznati Euklidov prostor realne prave.

Primjer. Sa $\mathbb{R}^n$ označavamo skup svih uredjenih n-torki realnih brojeva $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Metriku možemo uvesti sa

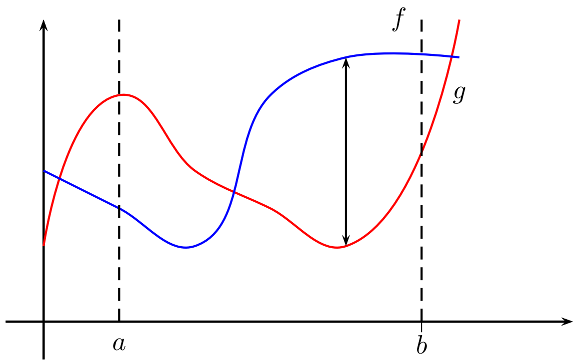
1. $d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
2. $d_p(x,y) = (\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^p)^{\frac{1}{p}}$ $(p \geq 1)$.
3. $d(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$

Ovim primjerom opravdavamo činjenicu da je nekada neophodno koristiti definiciju metričkog prostora kao uredjenog para, jer kao što vidimo, na istom skupu se mogu zadati različite metrike.

Primjer. Sa $C[a,b]$ označavamo skup svih neprekidnih realnih funkcija na segmentu $[a,b]$. Ako uvedemo funkciju

$$d(f,g) = \sup_{a\leq t\leq b} |f(t) - g(t)| \ ,$$

za proizvoljne $f, g \in C[a,b]$, dobijamo metrički prostor neprekidnih funkcija, koga kraće uobičajeno pišemo samo sa $C[a,b]$.



Slika 2: Metrika na $C[a,b]$

Definicija 5.10. Za skup A, podskup metričkog prostora (X,d), kažemo da je ograničen ili omedjen ako je skup rastojanja medju tačkama tog skupa ograničen skup, tj.

$$(\exists C > 0)(\forall x, y \in A)\ 0 \leq d(x,y) \leq C \ .$$

Primjer. Jedinični krug $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ je ograničen skup u $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

Definicija 5.11. Neka je A podskup metričkog prostora (X,d). Nenegativan broj

$$diamA = \sup\{d(x,y)|\ x,y \in A\}\ ,$$

nazivamo dijametrom skupa A.

Jasno je da ako vrijedi $diamA = \infty$, da je tada skup neograničen, tj. vrijedi,

Lema 5.12. *Skup je ograničen ako i samo ako mu je dijametar konačan.*

Lema 5.13. *Unija konačno mnogo ograničenih skupova je ograničen skup.*

Definicija 5.14. Neka je (X,d) metrički prostor. Za proizvoljno $a \in X$ i za proizvoljno $r > 0$ skup

$$B(a,r) = \{x \in X|\ d(a,x) < r\}\ ,$$

nazivamo otvorena kugla u X, sa centrom u tački a, poluprečnika r.

Skup

$$K(x,r) = \{x \in X|\ d(a,x) \leq r\}\ ,$$

nazivamo zatvorena kugla sa centrom u a i poluprečnika r, a skup

$$S(x,r) = \{x \in X|\ d(a,x) = r\}\ ,$$

nazivamo sfera sa centrom u a, poluprečnika r.

Lema 5.15. *Neka je (X,d) metrički prostor i neka je $A \subseteq X$. Skup A je ograničen ako i samo ako postoje $x \in X$ i $r > 0$, takvi da je $A \subseteq B(x,r)$.*

Definicija 5.16. Za skup G podskup metričkog prostora (X,d) kažemo da je otvoren ako vrijedi

$$(\forall x \in G)(\exists \varepsilon > 0)\ B(x,\varepsilon) \subseteq G\ .$$

Definicija 5.17. Skup je zatvoren ako je njegov komplement otvoren skup.

Teorem 5.18. *Neka je (X,d) metrički prostor. Kolekcija $\mathcal{T}$ svih otvorenih podskupova od X ima slijedeće osobine.*

1. $\emptyset,\ X \in \mathcal{T}$.
2. $U,V \in \mathcal{T}$ *onda* $U \cap V \in \mathcal{T}$.
3. $(\forall i \in I) O_i \in \mathcal{T}\ \Rightarrow\ \cup_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$.
4. $(\forall x,y \in X,\ x \neq y)(\exists U,V \in \mathcal{T})(x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \emptyset)$.

Familija $\mathcal{T}$ koja zadovoljava osobine 1., 2. i 3. naziva se topologija na X, a ako zadovoljava još i osobinu 4., naziva se Hausdorffova topologija na X.

Definicija 5.19. Za skup A, podskup metričkog prostora (X,d), kažemo da je okolina tačke $x \in X$, ako postoji otvoren skup O, takav da je

$$x \in O \subseteq A\ .$$

Uobičajeno u gornjoj definiciji umjesto bilo kog otvorenog skupa, zahtjevamo postojanje neke kugle, tako da je

$$x \in B(x, \varepsilon) \subseteq A \ .$$

Tako na realnoj pravoj, za skup A kažemo da je okolina tačke x, ako postoji $\varepsilon > 0$, takav da je

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A \ .$$

Definicija 5.20. Neka je (X, d) metrički prostor. Tačku $x \in A \subseteq X$ nazivamo izolovanom tačkom skupa A, ako postoji okolina tačke x u kojoj osim tačke x nema drugih tačaka iz skupa A.

Definicija 5.21. Tačka $x \in A$ je tačka nagomilavanja skupa A, ako se u svakoj okolini tačke x nalazi bar jedna tačka skupa A različita od x. Skup svih tačaka nagomilavanja skupa A nazivamo izvodni skup i označavamo ga sa A'.

Ako skup sadrži sve svoje tačke nagomilavanja, on je onda zatvoren skup. Inače, ako skupu A "dodamo" sve njegove tačke nagomilavanja, dobijamo novi skup koga nazivamo adherencija ili zatvorenje skupa, a označavamo ga sa $\overline{A}$. Pri tome dakle vrijedi

$$\overline{A} = A \cup A' \ .$$

5.3 Konvergencija u metričkim prostorima

Konvergencija u metričkim prostorima

Definicija 5.22. Neka je (X, d) metrički prostor. Za niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ kažemo da konvergira ka $x_0 \in X$, ako vrijedi

$$d(x_n, x_0) \to 0 \ , \ (n \to \infty) \ .$$

Činjenicu da niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka tački x_0 uobičajeno zapisujemo sa $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ ili

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \ .$$

Gore definisanu konvergenciju nazivamo *konvergencija po metrici*.

Teorem 5.23. *U metričkom prostoru, konvergentan niz može konvergirati samo jednoj tački.*

Dokaz. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ za koga vrijedi $x_n \to x'$ i $x_n \to x''$ $(n \to \infty)$. Na osnovu relacije trougla imamo

$$0 \leq d(x', x'') \leq d(x', x_n) + d(x_n, x'') \ ,$$

za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$. Desna strana teži 0 kada $n \to \infty$, pa očigledno mora vrijediti $d(x', x'') = 0$, odnosno $x' = x''$. ∎

Teorem 5.24. *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

Dokaz. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ i neka $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Uzimajući da je $\varepsilon = 1$, imamo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za svako $n \geq n_0$, vrijedi

$$d(x_n, x_0) < 1 \ .$$

Označimo sa $R' = \max\{d(x_0, x_1), d(x_0, x_2), ..., d(x_0, x_{n_0-1})\}$. Neka je sada $R = R' + 1$. Tada očigledno vrijedi

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \in B(x_0, R) \ ,$$

tj. niz je ograničen. ∎

Definicija 5.25. Neka je (X, d) metrički prostor. Za niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ kažemo da je Cauchyjev niz ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})(n, m \geq n_0 \ \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon) \ .$$

Drugačije rečeno, niz je Cauchyjev ako vrijedi

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0 \ .$$

Teorem 5.26. *Svaki Cauchyjev niz je ograničen.*

Teorem 5.27. *Svaki konvergentan niz je Cauchyjev.*

Dokaz. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan niz i neka $x_n \to x$ $(n \to \infty)$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Na osnovu definicije konvergencije imamo

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \ \left(n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}\right) \ .$$

Neka su sada $m, n \in \mathbb{N}$ i neka je $m, n \geq n_0$. Tada je

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon \ ,$$

a ovo znači da je niz Cauchyjev. ∎

Da Cauchyjev niz nemora biti konvergentan, dovoljno je posmatrati niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$, gdje je x_n decimalni zapis broja $\sqrt{2}$ na n decimala. Jasno je da niz nije konvergentan u $\mathbb{Q}$, tj. $x_n \to \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Medjutim, očigledno je za $n > m$, $d(x_n, x_m) \leq \frac{1}{10^n} \to 0$ kada $n, m \to \infty$, tj. niz je Cauchyjev.

Definicija 5.28. Za metrički prostor u kome je svaki Cauchyjev niz konvergentan kažemo da je kompletan ili potpun metrički prostor.

Teorem 5.29. *Metrički prostor (X, d) je kompletan ako i samo ako presjek proizvoljnog monotono opadajućeg niza zatvorenih kugli, čiji niz dijametara teži ka 0, sadrži tačno jednu tačku.*

5.4 Kompaktnost u metričkim prostorima

Kompaktnost u metričkim prostorima

Definicija 5.30. Neka je M podskup metričkog prostora X. Za skup M kažemo da je relativno kompaktan ako se iz svakog niza u M može izdvojiti konvergentan podniz, tj.

$$(\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M)(\exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}})\; x_{n_k} \to x_0 \;,\; (k\to\infty)\;,\; x_0 \in X\;.$$

Ako je pri tome $x_0 \in M$, kažemo da je M kompaktan skup.

Teorem 5.31. *Svaki kompaktan metrički prostor je i kompletan.*

Dokaz. Neka je X kompaktan metrički prostor i neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan Cauchyjev niz u X. Zbog kompaktnosti, postoji podniz (x_{n_k}) našeg niza koji je konvergentan, $x_{n_k} \to x_0 \in X$ $(k \to \infty)$. Sada imamo

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0)\;.$$

Prvi sabirak na desnoj strani možemo učiniti proizvoljno malim jer je niz Caucyjev, a drugi takodje, zbog konvergencije podniza. Dakle,

$$d(x_n, x_0) \to 0\;,\; (n\to\infty)\;,$$

tj. niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan, pa zbog proizvoljnosti niza, prostor X je kompletan. ∎

Teorem 5.32. *Svaki kompaktan skup je zatvoren.*

Dokaz. Neka je M kompaktan skup i neka je $(x_n) \subset M$, takav da $x_n \to x_0$ kada $n \to \infty$. Zbog kompaktnosti skupa, postoji $(x_{n_k}) \subset (x_n)$, takav da $x_{n_k} \to x'$ $(k \to \infty)$ i pri tome je $x' \in M$. Zbog jedinstvenosti tačke konvergencije, zaključujemo da je $x_0 = x'$, odnosno $x_0 \in M$, pa dakle M sadrži sve svoje tačke nagomilavanje te je kao takav, zatvoren skup. ∎

Teorem 5.33. *Svaki relativno kompaktan skup je ograničen.*

Dokaz. Neka je M relativno kompaktan podskup metričkog prostora X. Pretpostavimo da M nije ograničen. M nije prazan, pa postoji $x_0 \in M$. Kako M nije ograničen, to M nije sadržan u kugli $B(x_0, 1)$, te zaključujemo da postoji $x_1 \in M$, takav da $x_1 \notin B(x_0, 1)$ odnosno, $d(x_0, x_1) \geq 1$. Označimo sa $r = d(x_0, x_1) + 1$, pa opet zbog neograničenosti rezonujemo da M nije sadržan ni u kugli $B(x_0, r)$, tj. postoji $x_2 \in M$ takav da je $d(x_0, x_2) \geq r \geq 1$. Kako je

$$1 + d(x_0, x_1) = r \leq d(x_0, x_2) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)\;,$$

zaključujemo da je $d(x_1, x_2) \geq 1$. Jasno je da sada ovaj postupak možemo produžiti i na taj način formirati niz (x_n) sa osobino da za proizvoljne $n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi

$d(x_n, x_m) \geq 1$. Ovo znači da se iz datog niza ne može izdvojiti niti jedan konvergentan podniz, a to se opet kosi sa pretpostavkom o relativnoj kompaktnosti skupa M. Dakle, M mora biti ograničen skup. ∎

Na osnovu Teorema 5.32 i Teorema 5.33, vidimo da u proizvoljnom metričkom prostoru kompaktnost skupa imlicira njegovu ograničenost i zatvorenost.

U opštem slučaju, ograničenost i zatvorenost skupa ne dovode do njegove kompaktnosti, ali u nekim specijalnim slučajevima do toga ipak dolazi.

Teorem 5.34. *U svakom konačno dimenzionalnom metričkom prostoru vrijedi, ako je skup ograničen i zatvoren, onda je on kompaktan.*

Definicija 5.35. Neka su M i N podskupovi metričkog prostora X. Neka je $\varepsilon > 0$ fiksiran realan broj. Za skup N kažemo da je ε-mreža skupa M ako za svako $x \in M$, postoji $y \in N$, tako da je $d(x, y) < \varepsilon$. Ako je N kompaktan skup, kažemo da je N kompaktna ε-mreža, a ako je konačan skup, kažemo da je konačna ε-mreža.

Lema 5.36. *Skup N je ε-mreža ($\varepsilon > 0$) skupa M ako i samo ako vrijedi*

$$M \subseteq \bigcup_{x \in N} B(x, \varepsilon) \ .$$

Teorem 5.37. *Potreban uslov za relativnu kompaktnost skupa $M \subseteq X$ jeste da za svako $\varepsilon > 0$, postoji konačna ε-mreža skupa M. Ako je metrički prostor X kompletan, gornji uslov je i dovoljan.*

Neprekidne funkcije u metričkim prostorima

Definicija 5.38. Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori. Za preslikavanje $f : X \to Y$ kažemo da je neprekidno u tački $x_0 \in X$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in X)(d_X(x_0, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon) \ .$$

Preslikavanje je neprekidno na X ako je neprekidno u svakoj tački $x \in X$.

Teorem 5.39. *Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori i $f : X \to Y$. Sljedeća tvrdjenja su ekvivalentna.*

1. *f je neprekidna na X.*
2. $(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$.
3. *Za svaki otvoreni skup $V \subseteq Y$ je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u X.*

5.5 Uvod u normirane prostore

Normirani prostori

Definicija 5.40. Neka je X linearan vektorski prostor, na kome je definisana funkcija $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, sa sljedećim osobinama

1. $(\forall x \in X)\ \|x\| \geq 0$.
2. Ako je $\|x\| = 0$, onda je $x = 0$.
3. $(\forall \lambda \in \Phi)(\forall x \in X)\ \|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|$.
4. $(\forall x, y \in X)\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Tada za funkciju $\|\cdot\|$ kažemo da je norma na X, a za X kažemo da je normiran linearan vektorski prostor.

Lema 5.41. *Neka je X normiran linearan vektorski prostor. Tada za proizvoljne $x, y \in X$ vrijedi*

$$|\ \|x\| - \|y\|\ | \leq \|x - y\|\ .$$

Dokaz. Neka su $x, y \in X$ proizvoljni. Iz relacije trougla imamo

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|\ ,$$

odnosno,

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|\ . \tag{11}$$

Prostom zamjenom uloga x i y, dobijamo

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|\ ,$$

ili

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\|\ . \tag{12}$$

Iz (11) i (12) dobijamo traženu nejednakost. ∎

Definišimo sada pomoću norme, funkciju $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, na sljedeći način

$$d(x, y) = \|x - y\|\ \ ,\ \ x, y \in X\ .$$

Nije teško provjeriti da ovako definisana funkcija zadovoljava sve uslove Definicije 5.8, pa je na ovaj način uvedena metrika na X, za koju kažemo da je inducirana normom u datom prostoru.

Samim tim imamo da je svaki normiran linearan vektorski prostor ujedno i metrički prostor, te sve što je rečeno za metričke prostore vrijedi i za normirane prostore.

5.6 Euklidovi prostori

Euklidovi prostori

Ranije smo definisali pojam uredjene n-torke. Descartesov proizvod skupova X_i $(i = 1, 2, ..., n)$ smo obilježavali sa

$$X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) :\ x_i \in X_i,\ i = 1, 2, ..., n\} .$$

Specijalno, ako uzmemo da je $X_i = \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, ..., n)$, koristimo kraću oznaku

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) :\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., n\} .$$

Za dvije tačke $X, Y \in \mathbb{R}^n$ kažemo da su jednake ako su im jednake odgovarajuće koordinate i pišemo $X = Y$. U suprotnom su tačke različite, $X \neq Y$. Neka su na $\mathbb{R}^n$ definisane sljedeće funkcije: za $X(x_1, x_2, ..., x_n)$ i $Y(y_1, y_2, ..., y_n)$ iz $\mathbb{R}^n$

$$d_2(X, Y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\ ;\ d_\infty(X, Y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| .$$

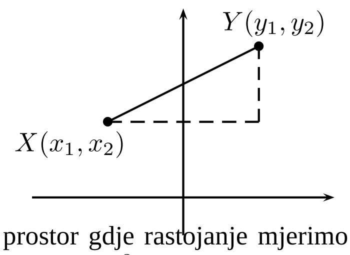
Obje funkcije zadovoljavaju osobine metrike, pa su one metrike na $\mathbb{R}^n$ i tada prostor $\mathbb{R}^n$ sa jednom od tih metrika nazivamo n-dimenzionalni euklidski prostor. Za $n = 1$ imamo 1-dimenzionalni euklidski prostor (realna prava) u kome rastojanje izmedju dvije tačke mjerimo sa

$$d(x, y) = |x - y| .$$

Za $n = 2$ imamo 2-dimenzionalni euklidski prostor koga geometrijski interpretiramo kao realnu ravan, u kome rastojanje računamo sa npr.

$$d_2(X, Y) = \left(\sum_{i=1}^{2}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} .$$

Za $n = 3$ imamo 3-dimenzionalni euklidski prostor koga geometrijski interpretiramo



kao uobičajeni realni prostor gdje rastojanje mjerimo metrikom d_2. Pri tome je za $X(x_1, y_1, z_1)$ i $Y(x_2, y_2, z_2)$ iz $\mathbb{R}^3$,

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} .$$

Definicija 5.42. Uredjena n-torka realnih brojeva $x_1, x_2, ..., x_n$ naziva se tačkom n-dimenzionalnog realnog prostora i označavamo je sa $X = X(x_1, x_2, ..., x_n)$. Realne brojeve $x_1, x_2, ..., x_n$ nazivamo koordinatama tačke X.

Za realan niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, poznat nam je Cauchyjev kriterij konvergencije, tj. dati niz je konvergentan ako i samo ako vrijedi

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon)\ .$$

Definišimo na $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) funkciju $||\cdot||$, koja će svakom elementu iz $\mathbb{R}^n$ pridružiti nenegativan broj, na sljedeći način

$$||X|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\ ,\ X(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n\ . \tag{13}$$

Nije teško provjeriti da ovako uvedena funkcija zadovoljava sve osobine iz Definicije 5.40, pa ona predstavlja normu na linearnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$. Jasno, normu na $\mathbb{R}^n$ smo mogli uvesti i na neki drugi način, a zašto smo baš ovako, odgovor leži u sljedećem. Pomoću norme sada možemo definisati rastojanje na $\mathbb{R}^n$, a ono je za ovu normu dato sa

$$d(X,Y) = ||X - Y|| = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\ ,$$

gdje su $X(x_1, x_2, ..., x_n)$ i $Y(y_1, y_2, ..., y_n)$ iz $\mathbb{R}^n$. Uočimo da je indukovana metrika normom (13), upravo euklidska metrika d_2.

Nije teško primjetiti da norma tačke u prostoru $\mathbb{R}^n$, nije ništa drugo do udaljenost te tačke od koordinatnog početka, odnosno to je intenzitet radijus vektora te tačke.

5.7 Jaka konvergencija

Jaka (srednja) konvergencija

Uvodeći normu u L_2, također smo uveli i tip konvergencije na kvadratno integrabilnim funkcijama, naime

$$f_n \to f \qquad (u\ L_2)$$

znači da

$$\lim_{n\to\infty} \int [f_n(x) - f(x)]^2 d\mu = 0.$$

Takva konvergencija funkcija se naziva jaka konvergencija, odnosno nekad srednja kvadratna konvergencija.

Sada nas interesuje veza između koncepta jake i uniformne konvergenicje.

Teorem 5.43. *Ako niz $[f_n(x)]$ funkcija u L_2 konvergira uniformno ka $f(x)$, onda je $f \in L_2$ i niz $\{f_n(x)\}$ jako konvergira ka $f(x)$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Ako je $n \in \mathbb{N}$ dovoljno veliko, onda je

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

odakle je

$$\int (f_n(x) - f(x))^2 d\mu < \varepsilon^2 \mu(R).$$

Ova nejednakost odmah daje rezultat teoreme. ∎

Iz ove teoreme slijedi da ako se svaka funkcija $f \in L_2$ može proizvoljno precizno aproksimirati funkcijama $f_n \in M \subseteq L_2$ u smislu uniformne konvergencije, onda ih se moće iskoristiti da se aproksimira bilo koja funkcija iz L_2 u smislu jake konvergencije.

Stoga možemo aproksimirati bilo koju funkciju $f \in L_2$ do proizvoljnog stepena preciznosti pomoću prostih funkcija koje pripadaju L_2.

Neka stoga prosta funkcija $f(x)$ uzima vrijednosti $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ na skupovima $E_1, \ldots, E_n, \ldots$. Kako je f^2 integrabilna, red

$$\sum_n y_n^2 \mu(E_n) = \int f^2(x) d\mu$$

konvergira. Izaberimo broj $N \in \mathbb{N}$ tako da

$$\sum_{n>N} y_n^2 \mu(E_n) < \varepsilon$$

i stavimo

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x) & za \quad x \in E_i, i \leq N, \\ 0 & za \quad x \in E_i, i > N. \end{cases}$$

Onda imamo

$$\int (f(x) - f_N(x))^2 d\mu = \sum_{n>N} y_n^2 \mu(E_n) < \varepsilon,$$

tj. funkcije f_N, koje uzimaju konačno mnogo vrijednosti, aproksimiraju funkciju f proizvoljno precizno. Neka je R mjerljiv prostor koji ima mjeru koja zadovoljava uslov : svi otvoreni i svi zatvoreni skupovi u R su mjerljivi i za bilo koje $M \subseteq R$,

$$\mu^*(M) = \inf_{M \subseteq G} \mu(G).$$

Onda vrijedi slijedeća teorema:

Teorem 5.44. *Skup svih neprekidnih funkcija je kompletan u L_2.*

Teorem 5.45. *Ako niz $\{f_n(x)\}$ jako konvergira ka $f(x)$, onda se može izabrati podniz $f_{n_k}(x)$ koji konvergira ka $f(x)$ skoro svuda.*

Primjedba. S druge strane konvergencija skoro svuda (ili čak svuda) ne implicira jaku konvergenciju.

$$f_n(x) = \begin{cases} n & za \quad x \in \left(0, \frac{1}{n}\right), \\ 0 & \quad inae. \end{cases}$$

Ovaj niz konvergira nuli svuda na $[0,1]$, međutim

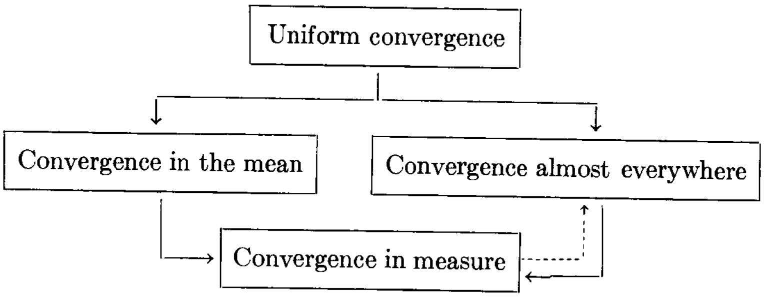
$$\int_0^1 f_n^2(x)dx = n \to \infty.$$

Nejednakost Tchebisheva (ako je $\phi(x) \geq 0$ na A, onda je

$$\mu\{x : x \in A, \phi(x) \geq c\} \leq \frac{1}{c}\int_A \phi(x)d\mu)$$

implicira da ako niz jako konvergira, on konvergira po mjeri.

Odnosi između različitih vrsta konvergencije je prikazana ispod:



5.8 L_2 prostori sa prebrojivom bazom

L_2 prostori sa prebrojivom bazom

Uopšteno govoreći, L_2 prostor funkcija koje su kvadratno integrabilne zavisi od izbora prostora R i mjere μ. Puna notacija bi trebala biti $L_2(R, \mu)$.

Samo je u eksepcionalnim slučajevima prostor $L_2(R, \mu)$ konačnodimenzionalan.

Od veće važnosti u analiu su prostori $L_2(R, \mu)$ u kojima je dimenzija *prebrojiva*, šta god to sad značilo ;) Kako bismo mogli okarakterisati ove prostore, trebamo još jedan koncept iz teorije mjere. U skupu $\mathfrak{M}$ mjerljivih skupova prostora R (čija je mjera po pretpostavci konačna), možemo uvesti pojam *udaljenosti* stavljajući

$$\rho(A, B) = \mu(A \triangle B).$$

Ako identificiramo one skupove A i B za koje je $\mu(A\triangle B) = 0$, onda skup $\mathfrak{M}$ sa funkcijom udaljenosti zadovoljava sve uslove metričkog prostora. Napomena:

$$A\triangle B = (B \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Prebrojiva baza

Definicija 5.46. Kažemo da mjera μ ima *prebrojivu bazu* ako metrički prostor $\mathfrak{M}$ sadrži svuda prebrojiv gust skup.

Primjedba. U topologiji, podskup A skupa topološkog prostora X naziva se *gustim* u X ako je svaka tačka x u X ili član A ili tačka nagomilavanja A.

Neformalno, svaka tačka iz X je ili u A ili je proizvoljno blizu nekoj tački u A.

Drugim riječima, mjera μ ima prebrojivu bazu ako postoji prebrojiv sistem

$$\Delta = \{A_n\}, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

mjerljivih skupova prostora R (koji čine bazu), takvih da, za bilo koji mjerljiv $M \subseteq R$ i bilo koje $\varepsilon > 0$, možemo naći $A_k \in \Delta$ za koje

$$\mu(M\triangle A_k) < \varepsilon.$$

Konkretno, Lebesgueova mjera na segmentu realne prave je generisana sistemom intevala, sa krajevima koji su racionalni brojevi, kao elementarnim skupovima. Budući da je skup takvih intervala prebrojiv, Lebesgueova mjera ima prebrojivu bazu! Proizvod $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ dvije mjere sa prebrojivom bazom ima prebrojivu bazu, jer konanbe sume parnih proizvoda elemenata baze mjere μ_1 sa elementima baze mjere μ_2 formiraju bazu mjere $\mu_1 \times \mu_2$, što je lako provjeriti.

Stoga je Lebesgueova mjera ravni, a i $n-$dimenzionalnog prostora, sa prebrojivom bazom. Neka

$$A_1^*, A_2^*, \cdots, A_n^*, \cdots \tag{14}$$

čine prebrojivu bazu mjere μ. Lako je provjeriti da, povećavajući gornji sistem skupova, možemo formirati prebrojiva baza mjere μ

$$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots, \tag{15}$$

koja zadovoljava uslove:

1. sistem skupova (**??**) je zatvoren u odnosu na operaciju oduzimanja;
2. sistem skupova (**??**) sadrži R.

Iz uslova 1 i 2 slijedi da je sistem (**??**) zatvoren u odnosu na konačan broj unija i presjeka skupova.

Teorem 5.47. *Ako mjera μ ima prebrojivu bazu, onda postoji u prostoru $L_2(R, \mu)$ svuda prebrojiv gust skup funkcija*

$$f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots .$$

Za poseban slučaj kada je R segment na realnoj pravoj i μ Lebesgueova mjera, prebrojiva baza u $L_2(R, \mu)$ se može dobiti klasičnijom metodom: kao takvu bazu možemo uzeti, npr. skup svih polimona sa racionalnim koeficijentima. On je svuda gust (čak i u smislu uniformne konvergencije - vježba) - u skupu neprekidnih funkcija, a ove formiraju svuda gust skup u $L_2(R, \mu)$.