Prirodno-matematički fakultet
Odsjek matematika

Mjera i integral - Finalni dio ispita

20.01.2016.

Ispit traje 2 sata. Zabranjeno je napuštanje ispita u prvih 30 te u zadnjih 15 minuta trajanja ispita. Pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne boje. Prepisivanje ili pokušaji varanja bilo kakve vrste povlače maksimalne posljedice.

1. (a) Definisati pojam *mjerljivog skupa* po Carathéodoryju i po Lebesgueu.
   (b) Dokazati da svaka familija $\mathcal{M}$ mjerljivih skupova čini σ-algebru.
2. Dokazati da postoje nemjerljivi skupovi.
3. (a) Definisati mjerljive funkcije.
   (b) Navesti i dokazati slabi teorem Egorova.
4. (a) Definsati integral proste funkcije na skupu konačne mjere, ograničene izmjerljive funkcije na skopu konačne mjere, nenegativne mjerljive funkcije, te Lebesgueov integral mjerljive funkcije.
   (b) Navesti i dokazati teorem o ograničenoj konvergenciji niza ograničenih funkcija definisanih na skupu konačne mjere.
   (c) Dokazati da ako je f nengativna funkcija koja je integrabilna na skupu E, za dato $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da za svaki podskup A konačne mjere skupa E ($\mu(A) < \delta$) imamo
   $$\int_A f d\mu < \varepsilon.$$
5. (a) Definisati funkcije ograničene varijacije.
   (b) Dokazati da je svaka funkcija sa ograničenom varijacijom ograničena, te da su zbir i proizvod dvije funkcije ograničene varijacije ponovo funkcije ograničene varijacije.
   (c) Dokazati da, ako je f integrabilna funkcija na $[a, b]$, funkcija F definisana sa
   $$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$
   je neprekidna funkcija ograničene varijacije na $[a, b]$.
   (d) Koje funkcije su neodređeni integral svoga izvoda i zašto?

Ime i prezime studentice/studenta : ....

Broj indeksa : ....