

Mjera i integral - Popravni ispit

07.07.2016.

Ispit traje 2 sata. Zabranjeno je napuštanje ispita u prvih 15 te u zadnjih 15 minuta trajanja ispita. Pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne boje. Prepisivanje ili pokušaji varanja bilo kakve vrste povlače maksimalne posljedice.

1. (a) Definirati spoljašnju mjeru m^* skupa i dokazati iskaz: Neka je $\{A_n\}$ prebrojiva familija skupova realnih brojeva. Tada je

$$m^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^* A_n.$$

(b) Ako je A ograničen skup, tada je $m^* A < \infty$. Zašto? Dati primjer da obrat ne važi.

2. (a) Definisati mjerljive skupove po Caratheodoryju (\mathcal{M}_K) i po Lebesgueu (\mathcal{M}_L).
(b) Ako je (E_n) beskonačno opadajući niz izmjerljivih skupova (tj. $\forall i mE_{i+1} \subset E_i$) i neka je mE_1 konačan broj. Dozati da tada važi

$$m \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} mE_n.$$

3. (a) Definirati mjerljive funkcije i dokazati da ako je f mjerljiva funkcija i $f = g$ skoro svuda, tada je g mjerljiva funkcija.
(b) Navesti i dokazati slabi teorem Egorova.
4. (a) Navesti i dokazati Fatouovu lemu i teorem o monotonij konvergenciji.
(b) Navesti i dokazati Lebesgueov teorem o ograničenoj konvergenciji.
(c) Navesti i dokazati teorem o vezi između Riemannovog i Lebesgueovog integrala.
5. (a) Da li su skupovi $V[a, b]$ i $C[a, b]$ usporedivi?
(b) Navesti i dokazati vezu između apsolutno neprekidnih funkcija i funkcija ograničene varijacije.
(c) Neka je f neprekidna funkcija na $[a, b]$, a g ograničene varijacije, tada je funkcija f Stieltjes-integrabilna u odnosu na g , tj. postoji integral: $\int_a^b f(x) dg(x)$. Dokazati.
(d) Iskazati i dokazati teorem o vezi Stieltjesovog i Riemannovog integrala.

Ime i prezime studentice/studenta :

Broj indeksa :