Prirodno-matematički fakultet
Odsjek matematika

Mjera i integral - Zadaća

03.01.2018.

Riješene zadatke predati do kraja semestra

1. (a) Ako je funkcija f Riemann-integrabilna na svakom segmentu $[\alpha, \beta], a < \alpha < \beta < b$, da li je f integrabilna i na $[a, b]$.
Rješenje. Ne mora biti! Posmatrajmo funkciju :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$$

Jasno je za proizvoljno $\delta > 0$ važi

$$(R) \int_{\delta}^{1} f(x)dx = -\ln \delta,$$

dok je (R) $\int_0^1 f(x)dx = +\infty$.

(b) Data je funkcija:

$$f(x) = \begin{cases} 1; & x \in K \\ 2; & x \in K^C \end{cases}$$

gdje je K Cantor-ov skup. Dokazati da je $f(x)$ Lebesgue integrabilna i izračunati (L)$\int_0^1 f(x)dm$.
Rješenje. Očigledno je funkcija f ograničena. Osim toga za proizvoljno $c \in \mathbb{R}$ skup $\{x \in [0,1] : f(x) > c\}$ je mjerljiv, pa je funkcija f mjerljiva. Iz ograničenosti funcije f tj. $f(x) \leq M < \infty$ imamo

$$(L) \int_0^1 f(x)dm \leq (L) \int_0^1 M dm = M < \infty$$

dakle f je Lebesgue integrabilna.
Označimo sa K Cantor-ov skup. Tada važi $[0, 1] = K \cup K^C$. Na osnovu aditivnosti Lebesgue-ovog integrala po granici, imamo

$$(L) \int_0^1 f(X)dm = (L) \int_K f(x)dm + (L) \int_{K^C} f(x)dm$$

Kako je $m(K) = 0$ slijedi $(L) \int_K f(x)dm = 0$.
Na K^C je $f(x) = 2$ odakle je

$$(L) \int_{K^C} f(x)dm = (L) \int_{K^C} 2dm = 2m(K^C) = 2$$

Dakle: $(L) \int_0^1 f(x)dm = 0 + 2 = 2$

(c) Data je funkcija $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(x)$ gdje je $d_n(x)$, n-ta cifra u decimalnom razvoju broja $x \in [0, 1]$. Dokazati da je funkcija integrabilna na $[0, 1]$ i izračunati $(L) \int_0^1 f(x)dm$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, je d_n jednostavna funkcija (na $[0, 1]$) jer uzima samo konačno mnogo različitih vrijednosti. Zbog toga je:

$$\int_0^1 d_n(x)dm = \sum_{i=0}^{9} c_i m(E_i) = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \ldots + \frac{9}{10} = \frac{9}{2}$$

Odatle je onda

$$\int_0^1 f(x)dm = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} d_n(x)dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 d_n(x)dm = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{2} = \infty$$

(d) Izračunati: $\int_0^1 f(x)dm$ gdje je

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^n; & \frac{1}{2^{n+1}} < x \leq \frac{1}{2^n}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ 0; & x = 0 \end{cases}$$

(e) Da bi nenegativna izmjeriva funkcija $f(x)$ na skupu E konačne mjere bila integrabilna na tom skupu, potrebno je i dovoljno da red $\sum_{k=0}^{\infty} km(E_k)$ konvergira, gdje je $E_k = \{x \in E : k \leq f(x) \leq k+1\}$.

(f) Konstruisati na $[0,1]$ niz integrabilnih funkcija (f_n) koje konvergiraju s.s. na $[0,1]$ nekoj integrabilnoj funkciji f, tako da je

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dm \neq \int_0^1 f(x)dm.$$

(g) Konstruisati na proizvoljnom skupu E konačne mjere niz integrabilnih funkcija (f_n), takav da

i. Niz (f_n) konvergira s.s. ka integrabilnoj funkciji f.

ii. $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n dm = \int_E f dm$

iii. Ne postoji nenegativna integrabilna funkcija $g(x)$ takva da je $\forall n \in \mathbb{N}, \ |f_n(x)| \leq g(x)$ s.s. na E.

2. (a) Ako je f integrabilna na $[a,b]$ i ako je $\int_a^x f(t)dt = 0, \ \forall x \in [a,b]$ tada je $f(x) = 0$ s.s. na $[a,b]$.

   (b) Neka je f ograničena i mjerljiva funkcija na $[a,b]$ i neka je $F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a)$. Tada je $F'(x) = f(s)$ s.s. na $[a,b]$.

3. (a) Da li su skupovi $C[a,b]$ i $V[a,b]$ uporedivi?

   (b) Neka je $f \in V[0,1]$ i neka je $\phi(x)$ strogo monotono rastuća i neprekidna funkcija na $[\alpha,\beta]$, takva da je $\phi(\alpha) = 0$, $\phi(\beta) = 1$. Dokazati da je funkcija $F(x) = (f\phi)(x)$ ograničene varijacije na $[\alpha,\beta]$ i da je $V_0^1 f = V_\alpha^\beta F$.

   (c) Neka je funkcija f ograničene varijacije na segmentu $[a,b]$ i neka je $f(x) \geq c > 0$ svuda na $[a,b]$. Dokazati da je i funkcija $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ ograničene varijacije na $[a,b]$.

4. (a) Iskazati i dokazati teorem o vezi Stieltjesovog integrala i Riemannovog integrala.

   (b) Neka je $f(x) = x^3$ i neka je

$$g(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 1 \\ x^2 & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$$

   Izračunati $\int_0^2 f dg$.