```
\documentclass[12pt,a4paper]{article}
\usepackage{times}
\usepackage{amsfonts,amsgen,amssymb,amsmath,amsthm,amsbsy}
%\usepackage{hyperref}
\usepackage{latexsym}
%\usepackage{pgf}
\usepackage[enc=cp1250]{hrlatex}
\usepackage[croatian]{babel}
\author{Vedad Pa\v si\' c}
\title{Parcijalne diferencijalne jednačine \thanks{Sva prava zadržana.
Svako objavljivanje, štampanje ili umnožavanje zahtjeva odobrenje autora}}
\date{Prirodno-matematički fakultet \\ Univerzitet u Tuzli}
%%%%%%%%%%%%%%%%
%NEW COMMANDS
\theoremstyle{plain}
\newtheorem{theorem}{Theorem}[section]
\newtheorem{thm}[theorem]{Teorema}
\newtheorem{prop}[theorem]{Prijedlog}
\newtheorem{lemma}[theorem]{Lema}
\newtheorem{cor}[theorem]{Posljedica}
\theoremstyle{definition}
\newtheorem{defn}[theorem]{Definicija}
\newtheorem{remark}[theorem]{Primjedba}
\newcommand{\dpa}{\partial}

\renewcommand{\qed}{\hfill \mbox{\raggedright \rule{.07in}{.1in}}}
\renewenvironment{proof}{\vspace{1ex}\noindent{\bf Dokaz}\hspace{0.5em}}
    {\hfill\qed\\} \vspace{1cm}
\renewcommand{\proofname}{Dokaz}

\newcounter{example}[section]
  \newenvironment{example}{\refstepcounter{example}
    \subsubsection{Primjer
      \thechapter.\arabic{example}}\sf}{$\qed$ \\}

  \renewcommand{\theexample}{\thechapter.\arabic{example}}
%\newenvironment{pfof}[1]{\vspace{1ex}\noindent{\bf Proof of #1}\hspace{0.5em}}
%    {\hfill\qed\vspace{1ex}}
\newcommand{\rmd}{\textrm d}
\newcommand{\rmi}{\textrm i}
\newcommand{\xx}{{\bf x}}
\newcommand{\rr}{\mathbb{R}}

\renewcommand\qedsymbol{\hbox{\vrule width 0.7em height 0.8em}}
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
\begin{document}
{\Large
\begin{center}
Parcijalne diferencijalne jednačine - Vježbe 2
\end{center}}
\vspace{0.5cm}
\begin{center}
{\it
Predati rad predmetnom nastavniku} (27.10.2008.)
\end{center}
\vspace{2cm}
```

```
Kako ovo još nismo definisali na predavanjima, evo ga:
\begin{defn}
Funkcija koja je rješenje Laplaceove jednačine (1.9) se naziva \emph{harmonična funkcija}.
\end{defn}
\begin{enumerate}
\item Dokažite da je za svako $\xx^0\in \rr^n$ funkcija
\[
v(\xx) := \left\{ \begin{array}{rcl}
|\xx-\xx^0|^{2-n} & ako & n>2 \\
\log |\xx-\xx^0| & ako & n=2
\end{array}
\right.
\] harmonična u $\rr^n\setminus \{\xx^0\}$, tj. $v$ je $C^2$ glatka i $\Delta v(\xx) = 0$,
$\forall \xx\in \rr^n \setminus \{\xx^0\}$.

{\bf Rješenje. } Neka je $n>2$. Onda
\[
\partial_k |\xx-\xx^0|^{2-n} = (2-n) (x_k - x_k^0) |\xx - \xx^0|^{-n},
\]
\[
\partial^2_k |\xx-\xx^0|^{2-n} = (2-n)|\xx-\xx^0|^{-n}
- n (2-n)(x_k-x_k^0)^2 |\xx-\xx^0|^{-2-n}.
\]
Sumirajući zadnju jednakost za $k=1,\ldots,n$ daje željeni rezultat.
Neka je $n=2$. Onda
\[
\partial_k \log |\xx-\xx^0| = (x_k-x_k^0) |\xx-\xx^0|^{-2},
\]
\[
\partial_k^2 \log |\xx-\xx^0| = |\xx-\xx^0|^{-2} - 2(x_k-x_k^0)^2 |\xx-\xx^0|^{-4}.
\] Ponovo, sumirajući preko $k=1,2$ dobivamo željeni rezultat.
\item Dokažite da za bilo koje dvije $C^2$ glatke funkcije $u$ i $v$ imamo
\[
v\Delta u = \textrm{div } (v\nabla u) - \nabla v \nabla u.
\]

{\bf Rješenje. }
\[
\textrm{div } (v\nabla u) = \sum_{k=1}^n \partial_k (v \dpa_k u)
= \sum_{k=1}^n \dpa_k v \dpa_k u +
 \sum_{k=1}^n v\dpa^2_k u = \nabla v \nabla u + v\Delta u.
\]
\item Dokažite da u sferičnim koordinatama
\[
x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \ x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \ x_3 = r\cos \varphi,
\]
\[
r>0, \ 0\le \theta \le \pi, \ 0\le \varphi < 2\pi,
\] Laplaceova jednačina $\partial_1^2 u +\partial_2^2 u +\partial_3^2 u =0$ ima slijedeću formu
\[
\left(
\partial_r^2 + \frac2r \partial_r + \frac{1}{r^2 \sin\theta}
\partial_{\theta} \sin\theta \partial_{\theta} +
\frac{1}{r^2\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2
\right) u = 0.
\]
```

```
[
SAVJET: Koristeći reprezantaciju Laplaceovog operatora u polarnim koordinatama nađite
$\partial_3^2 u + \partial_s^2 u$ i $\partial_1^2 u + \partial^2_2 u$, gdje je $s=r\sin\theta$
i konzekventno $x_1=s\cos \varphi$, $x_2 = s\sin\varphi$.
]

{\bf Rješenje. } Neka je $s=r\sin \theta$. Onda koristeći polarnu reprezentaciju Laplaceovog
operatora dobivamo
\[
\partial_3^2 u + \partial_s^2 u = \dpa^2_r u + r^{-1} \dpa_r u + r^{-2} \dpa_\theta^2 u.
\] Kako su $x_1 = s\cos \varphi, x_2 = s\sin \varphi$, takodjer imamo:
\[
\dpa_1^2 u + \dpa_2^2 u = \dpa_s^2 u + s^{-1} \dpa_s u + s^{-2} \dpa_{\varphi}^2 u.
\]
Odavdje imamo
\begin{equation}\label{1}
\dpa_1^2 u + \dpa_2^2 + \dpa_3^2 u = \dpa_r^2 u + r^{-1} \dpa_r u + r^{-2} \dpa_\theta^2 u
+ s^{-1} \dpa_s u + s^{-2} \dpa_\varphi^2 u.
\end{equation} Iz jednakosti $x_3=r\cos \theta, s=r\sin\theta$ imamo kao iz zadatka 2 sa prošlih vježbi
\[
\frac{\dpa r}{\dpa s} = \sin \theta, \ \frac{\dpa \theta}{\dpa s} = \frac{\cos \theta}{r}.
\] Takodjer je jasno da
\[
\frac{\dpa \varphi}{\dpa s} = 0.
\] Lančano pravilo implicira
\[
\dpa_s u = (\dpa_r u) \frac{\dpa r}{\dpa s} + (\dpa_\theta u) \frac{\dpa \theta}{\dpa s}
+ (\dpa_\varphi u) \frac{\dpa \varphi}{\dpa s} =
(\dpa_r u) \sin \theta + (\dpa_\theta u) \frac{\cos \theta}{r}.
\] Željeni rezultat slijedi iz jednačine (\ref{1}) i jednakosti $s=r\sin \theta$.
\end{enumerate}
\end{document}
```