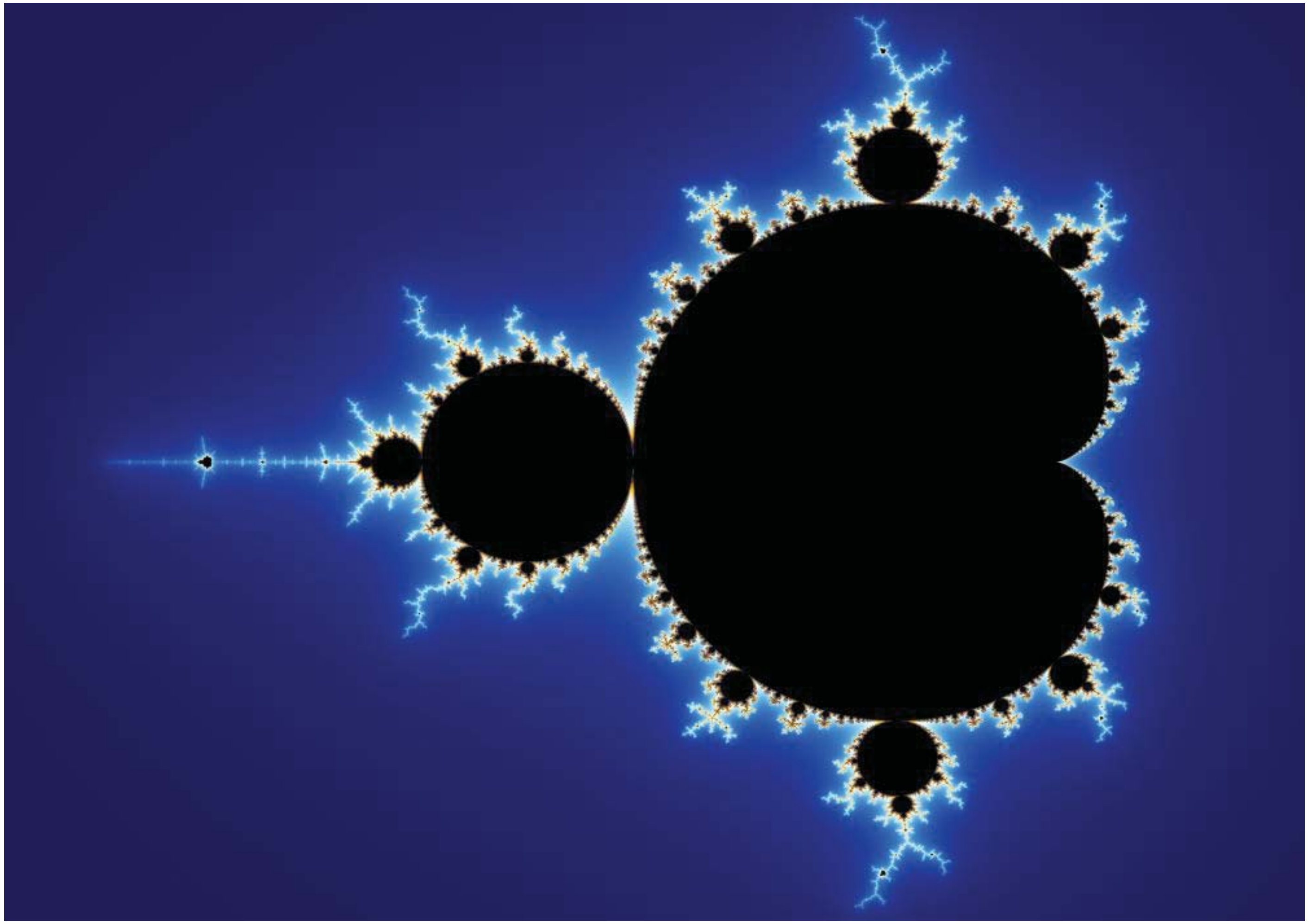
Popularna matematika

Vedad Pašić

7. lipnja 2009.

Mandelbrotov skup



Definicija fraktala

Rečeno informalno, fraktal je grub ili fragmentiran geometrijski oblik koji se može podijeliti u dijelove od kojih je svaki (baem približno) umanjena kopija originala.
Ova osobina se naziva 'samo-sličnost'.
Riječ dolazi od latinskog *fractus*, što znači slomljen i termin je 1975. godine izmislio Benoît Mandelbrot.
Matematički fraktal je zasnovan na jednačini koja prolazi kroz iteraciju.

Definicija fraktala

Fraktal obično ima slijedeće osobine:

- Ima finu strukturu do proizvoljno malih skaliranja.
- Previše je iregularan da bi bio opisan Euclidskom geometrijom.
- Samo-sličnost.
- Njegova Hausdorffova dimenzija je veća od topološke dimenzije.
- Ima jednostavnu rekurzivnu definiciju.

Definicija fraktala

Prirodni primjeri fraktala uključuju:

- Oblaci;
- Planinski lanci;
- Munje;
- Obalni pojasevi;
- Snježne pahuljice;
- Određeno povrće (karfiol ili brokula)...

Historija fraktala

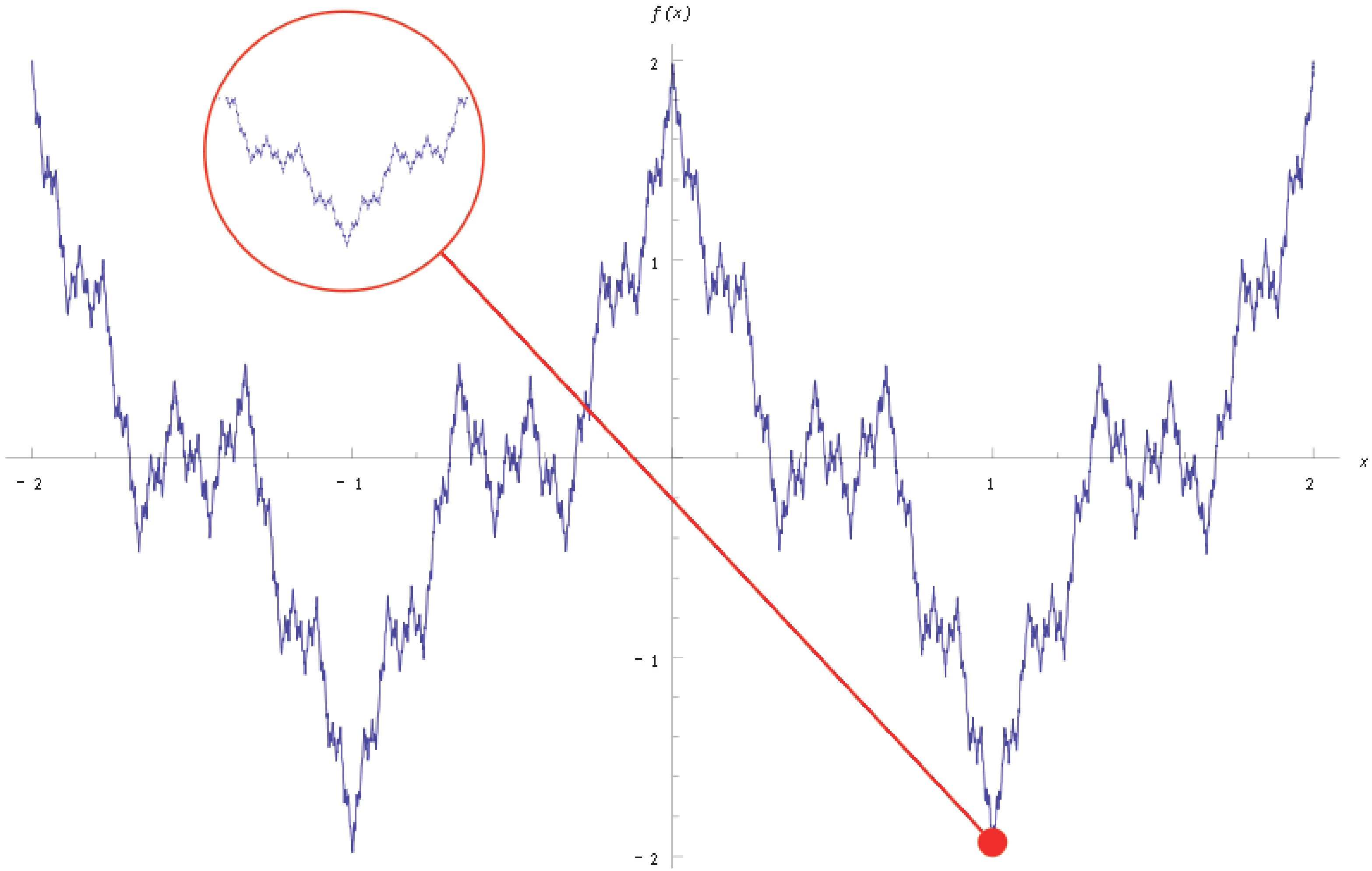
1872. se pojavljuje funkcija čiji se graf može smatrati fraktalom. Karl Weierstrass daje primjer funkcije sa neintuitivnom osobinom da je svugdje neprekidna, a nigdje diferencijabilna!

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

gdje je $0 < a < 1$, b pozitivan neparan cijeli broj i

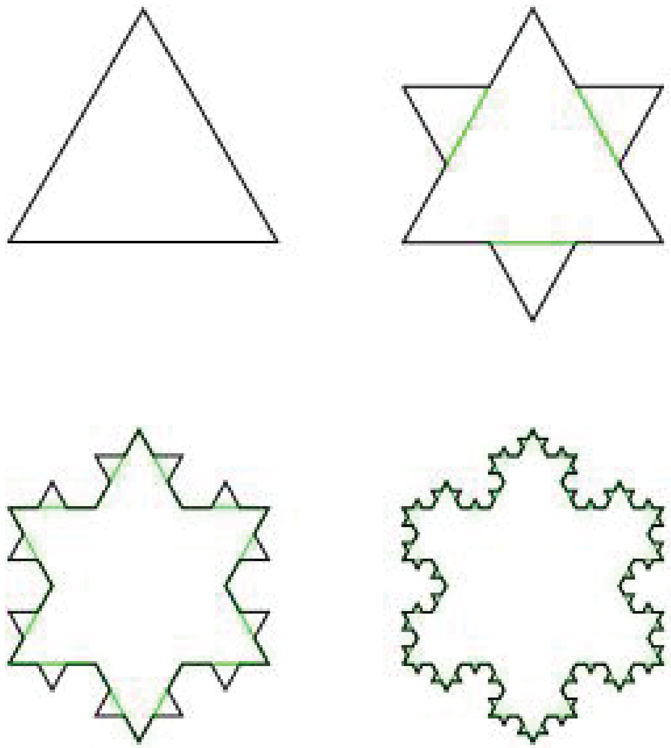
$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi.$$

Weierstrassova funkcija



Kochova pahuljica

1904. Helge von Koch, nezadovoljan Weierstrassovom definicijom, daje mnogo više geometrijski primjer fraktala.



Kochova pahuljica

Površina Kochove pahuljice je

$$\frac{2s^2\sqrt{3}}{5}$$

gdje je s dužina jedne stranice originalnog trougla. Dakle, Kochova pahuljica ima beskonačnu granicu, a konačnu površinu! 1918 godine Bertrand Russell je priznao 'vrhunsku ljepotu' unutar nastajuće matematike fraktala.

Fraktali kompleksne ravni

Iterirane funkcije u kompleksnoj ravni su ispitivane u kasnom 19om i ranom 20om stoljeću.
Taj rad je bio djelo Henri Poincaréa, Felixa Kleina, Pierrea Fatoua i Gastona Julia-e.
Međutim bez pomoći kompjuterske grafike, nismo imali mogućnost vizeulizacije ljepote mnogih objekata koji su bili otkriveni.

Mandelbrotov skup

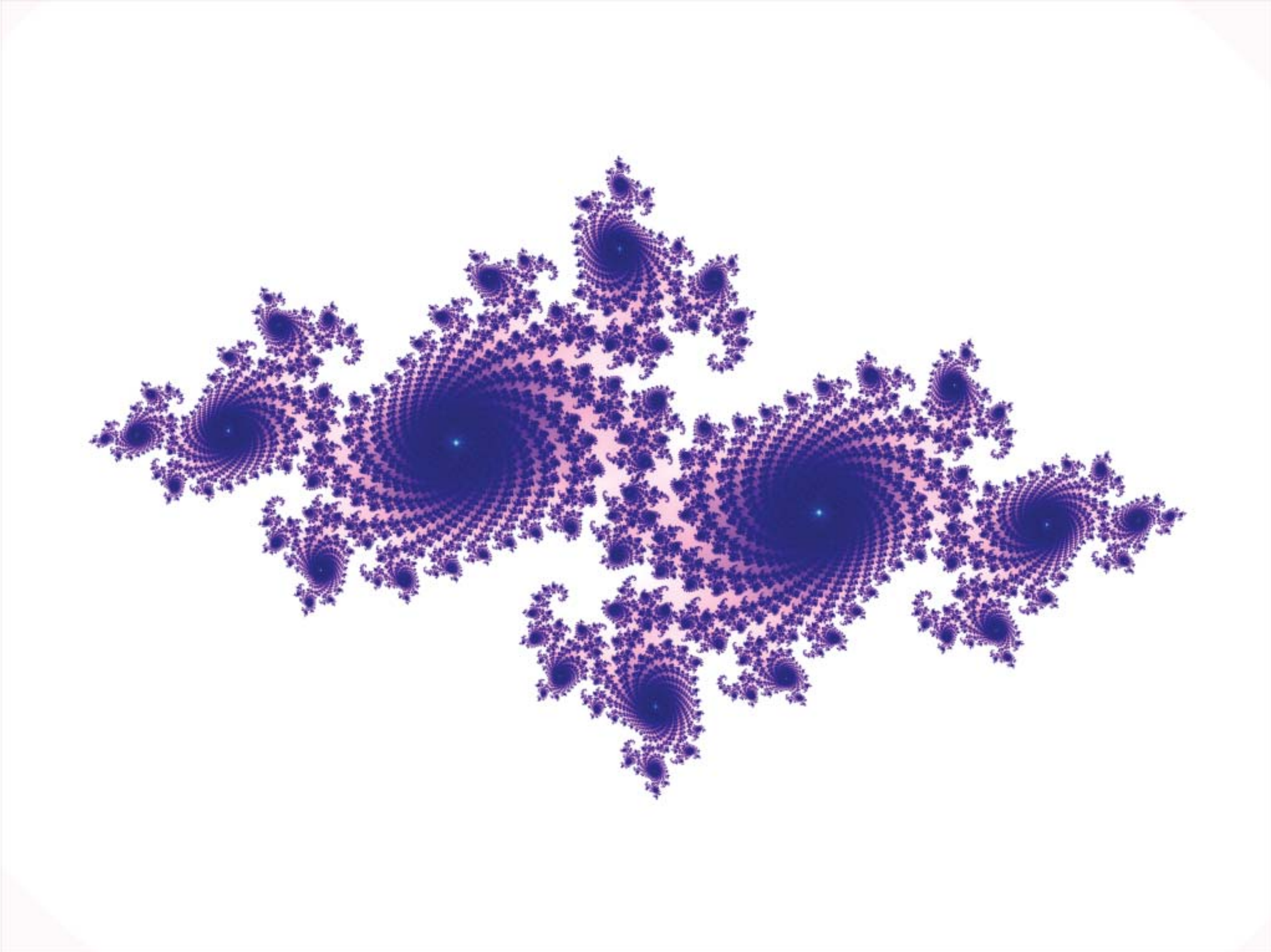
Mandebrotov skup je skup tačaka u kompleksnoj ravni čija granica formira fraktal. Matematički, ovaj skup se definiše kao skup kompleksnih tačaka $c \in \mathbb{C}$, za koje orbita nule pod iteracijama kvadratnog kompleksnog polinoma $z_{n+1} = z_n^2 + c$ ostaje ograničena. Jasnije, kompleksni broj $c \in \mathbb{C}$ se nalazi u Mandebrotovom skupu ako, počevši od $z_0 = 0$, $|z_n|$ pod gornjom iteracijom nikada ne prelazi određeni broj, ma koliko veliko n postalo! Broj 1 nije u Mandelbrotovom skupu. No, broj i jeste!

$$0, i, (-1+i), -i, -1+i, -i, \ldots$$

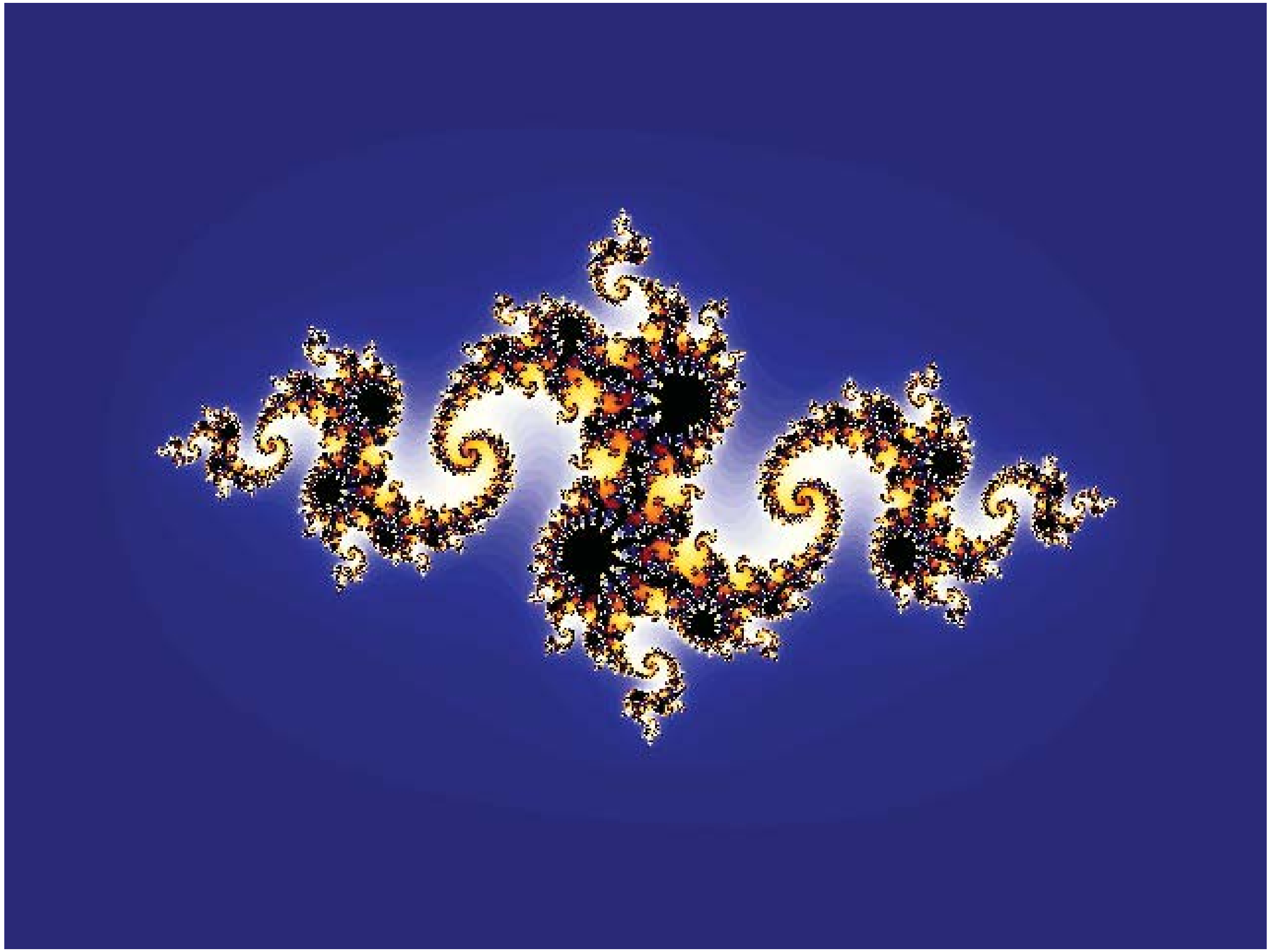
Julia skup

U kompleksnoj dinamici, Julia skup $J(f)$ holomorfične funkcije f se informalno sastoji od onih tačaka čije se dugoročno ponašanje pod ponovljenim iteracijama funkcije f može drastično promjeniti pod proizvoljno malim perturbacijama.Pogledajmo bolje malo lijepih sličica!! :)

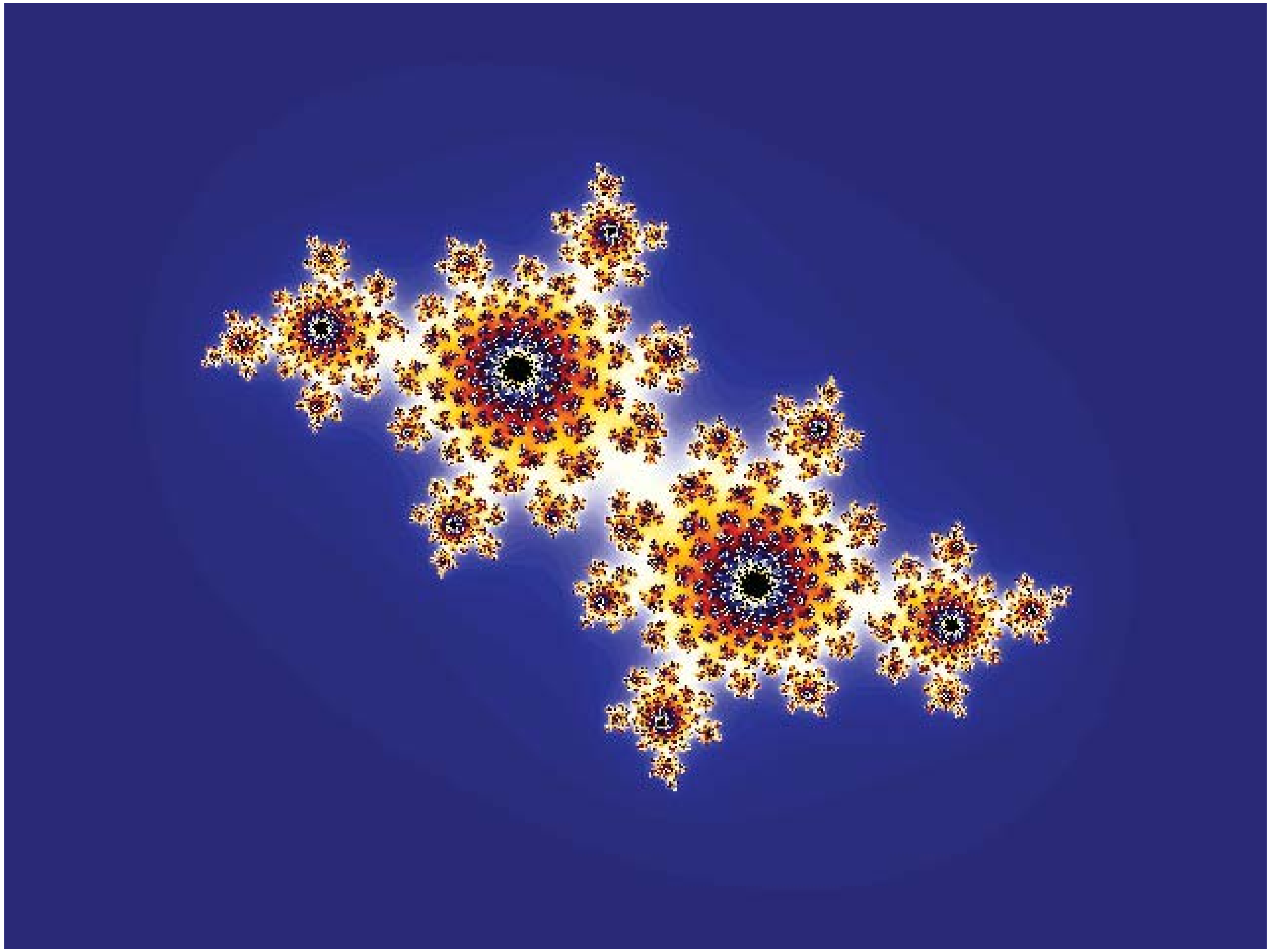
Julia skup



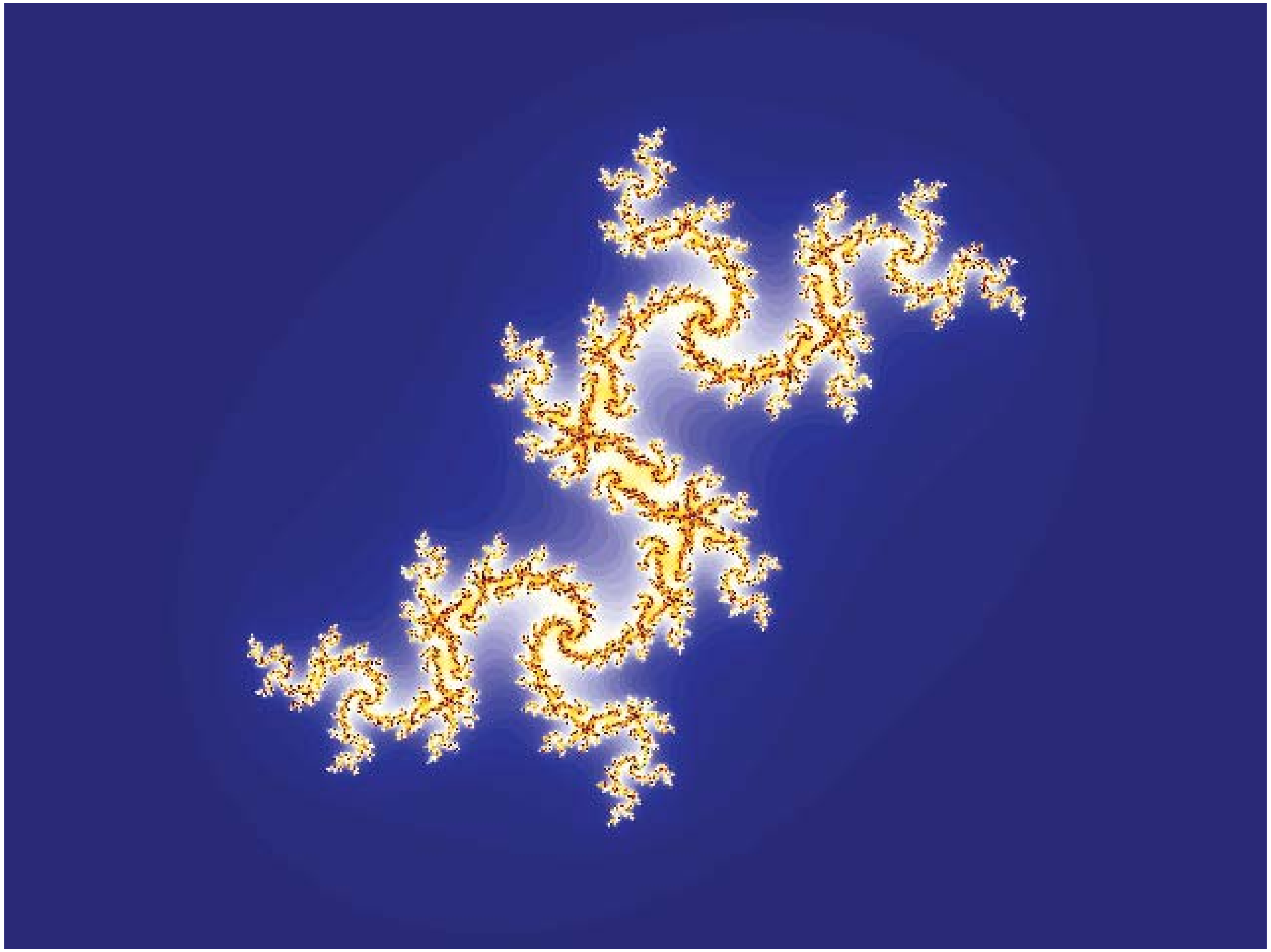
Julia skup



Julia skup



Julia skup



Fibonacci - Leonardo Pižanin

Fibonacci - Leonardo Pižanin

Leonardo Fibonacci (1170?-1250) je takođe poznat i kao Leonardo Pižanin ili Leonardo Pizano.
Bio je talijanski matematičar koji je u svom radu iz aritmetike i algebre 'Racun', tj. 'Knjiga o abakusu' (Liber abaci, 1202.), glorifikovao hindusko-arapski sistem brojeva. Jedno od njegovih otkrića je tzv. Fibonaccijev niz. U kasnijem radu, knjizi o kvadratnim brojevima (Liber quadratorum, 1225) učinio je prvi napredak zapadne civilizacije u aritmetici još od vremena Diofanta.

Fibonacci - Leonardo Pižanin

Njegov otac Guglielmo je imao nadimak Bonacio (ili dobroćudni), pa je stoga i Leonardov nadimak postao 'filius Bonacci', tj. Fibonacci.
Guglielmo je bio šef trgovinske luke u Alžiru, tada dijelu Sultanata almohadske dinastije u sjevernoj Africi, te je od rane dobi bio izložen arapskoj i islamskoj kulturi. Još je kao dječak putovao na Bliski Istok, gdje je naučio hindusko-arapski sistem brojeva.
Spoznavajući da je ovaj sistem daleko superiorniji od rimskog, Fibonacci je putovao širom Mediterana kako bi naučio sto više arapske matematike.
Sa svojih putovanja se vratio oko 1200. godine, te nakon objavljivanja *Liber Abaci* uvodi arapske brojeve u Europu.

Liber Abaci

U svojoj knjizi Fibonacci uvodi takozvanu modus Indorum (indijsku metodu), koje danas nazivamo arapskim brojevima.
Ova je knjiga podržavala numeraciju sa brojkama $0 - 9$ i vrijednost po mjestu.
Knjiga je također pokazala praktičnu važnost novog brojčanog sistema koristeći latično množenje (stari algoritam za izvođenje množenja, ekvivalentan dugom množenju) i egipatske razlomke, primjenjujući ga na knjigovodstvo, konverziju težina i mjera, računanje kamate, razmjenu novca itd.
Knjiga je odlično prihvaćena od strane obrazovane Europe i imala nevjerovatan uticaj na europsku misao.

Fibonaccijev niz

Liber Abaci je također postavila i riješila problem rasta hipotetske populacije zečeva zasnovan na idealisanim pretpostavkama.
Rješenje, generaciju po generaciju, je bio niz brojeva koje se poslije nazvao *Fibonaccijev niz*.
U nultom mjesecu, imamo nula novih parova zečeva.
U prvom mjesecu, ovaj par dobije još jedan par zečeva.
U drugom mjesecu, oba para dobiju jedan par, dok prvi par zečeva umre.
U trećem mjesecu, tri para dobiju još po jedan par, dok drugi par umre.

Fibonaccijev niz

Dakle, svaki par može dobiti tačno dva para novih zečeva prije smrti.
Neka je broj parova zečeva u n-tom mjesecu $F(n)$. U ovom slučaju, samo zečevi koji su bili živi u mjesecu $n-2$ su plodni i imaju potmstvo. Stoga $F(n-2)$ parova se dodaje postojećoj populaciji od $F(n-1)$. Dobivamo

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2), F(0) = 0, F(1) = 1.$$

Ovo producira niz:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, \ldots$$

što se naziva *Fibonaccijev niz*!

Zlatni rez

Kao svaki niz dofinisan linearnim ponavljanjem, Fibonaccijev niz ima rješenje u zatvorenoj formi.
Ovo je znano kao Binetova formula:

$$\frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

gdje je φ *zlatni rez*!

Definicija

Zlatni rez je jedinstveno pozitino rješenje algebarskog izraza

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$

i iznosi tačno

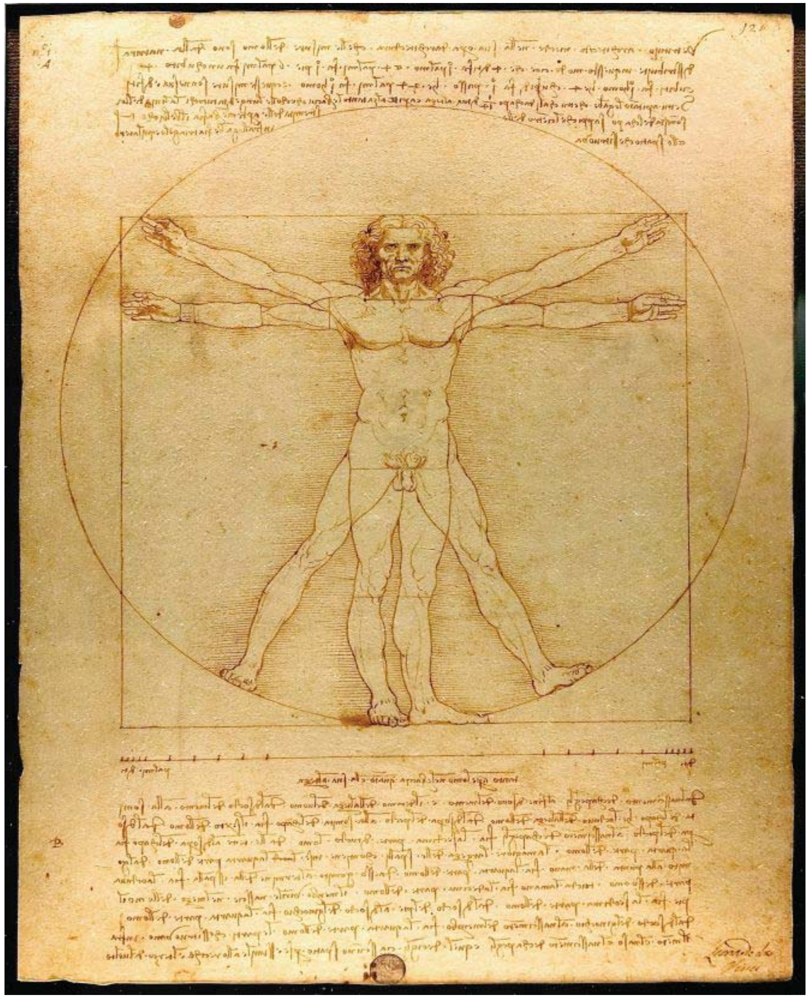
Zlatni rez

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887\ldots.$$

Dakle onaj odnos gdje se manji dio odnosi prema većem kao veći dio prema zbiru! Interesantno je da je

$$\frac{1}{\varphi} = 1 - \varphi \approx 0.6180339887\ldots$$

L'uomo vitruviano



Zlatni rez

Alternativno, zlatni rez se može predstaviti kao

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$$

Konvergenti ovih razlomaka su

$$1, 2, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, \ldots, \ \textit{ili}\ 1, 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 8/13, \ldots$$

su odnosi Fibonaccijevih brojeva.

Zlatni rez

Jednačina $\varphi^2 = 1 + \varphi$ daje formu u obliku

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

Zlatni rez

Jednačina $\varphi^2 = 1 + \varphi$ daje formu u obliku

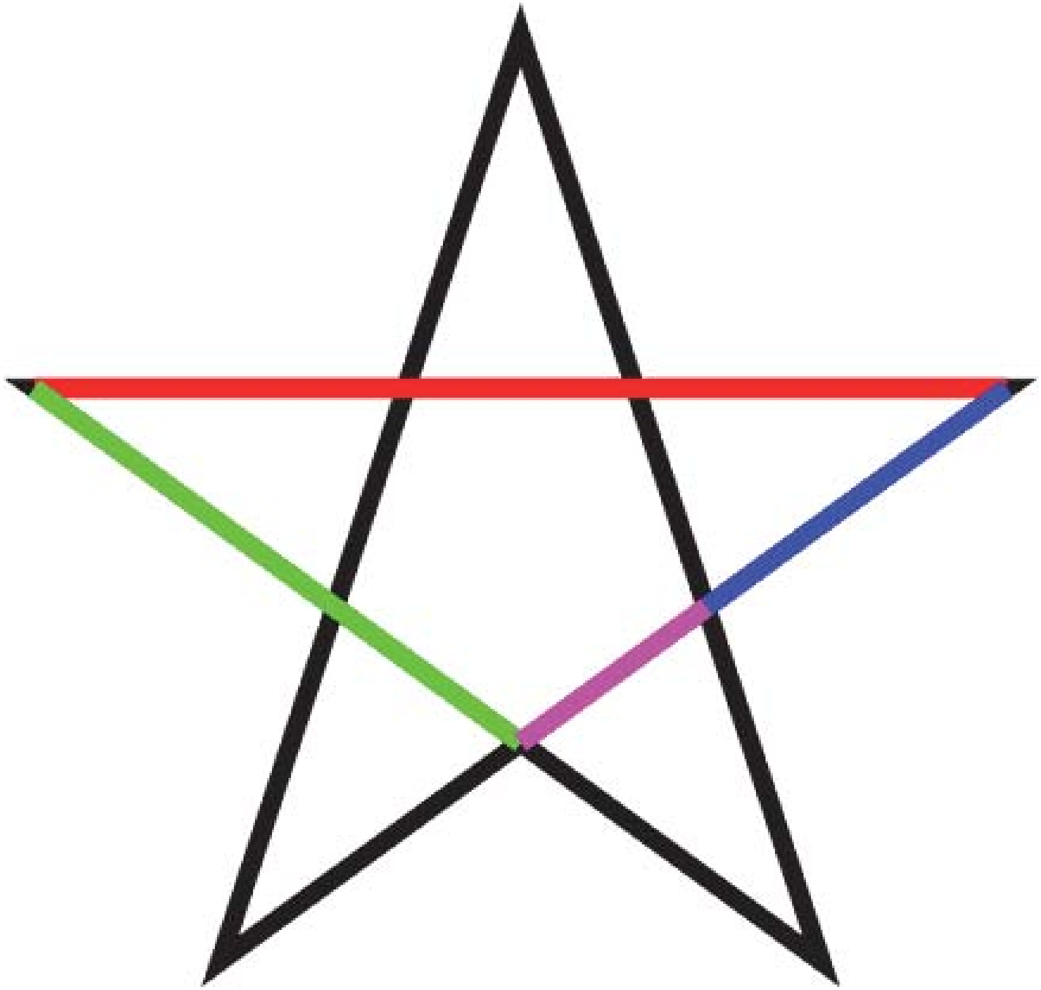
$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

Konvergenti ovih razlomaka su

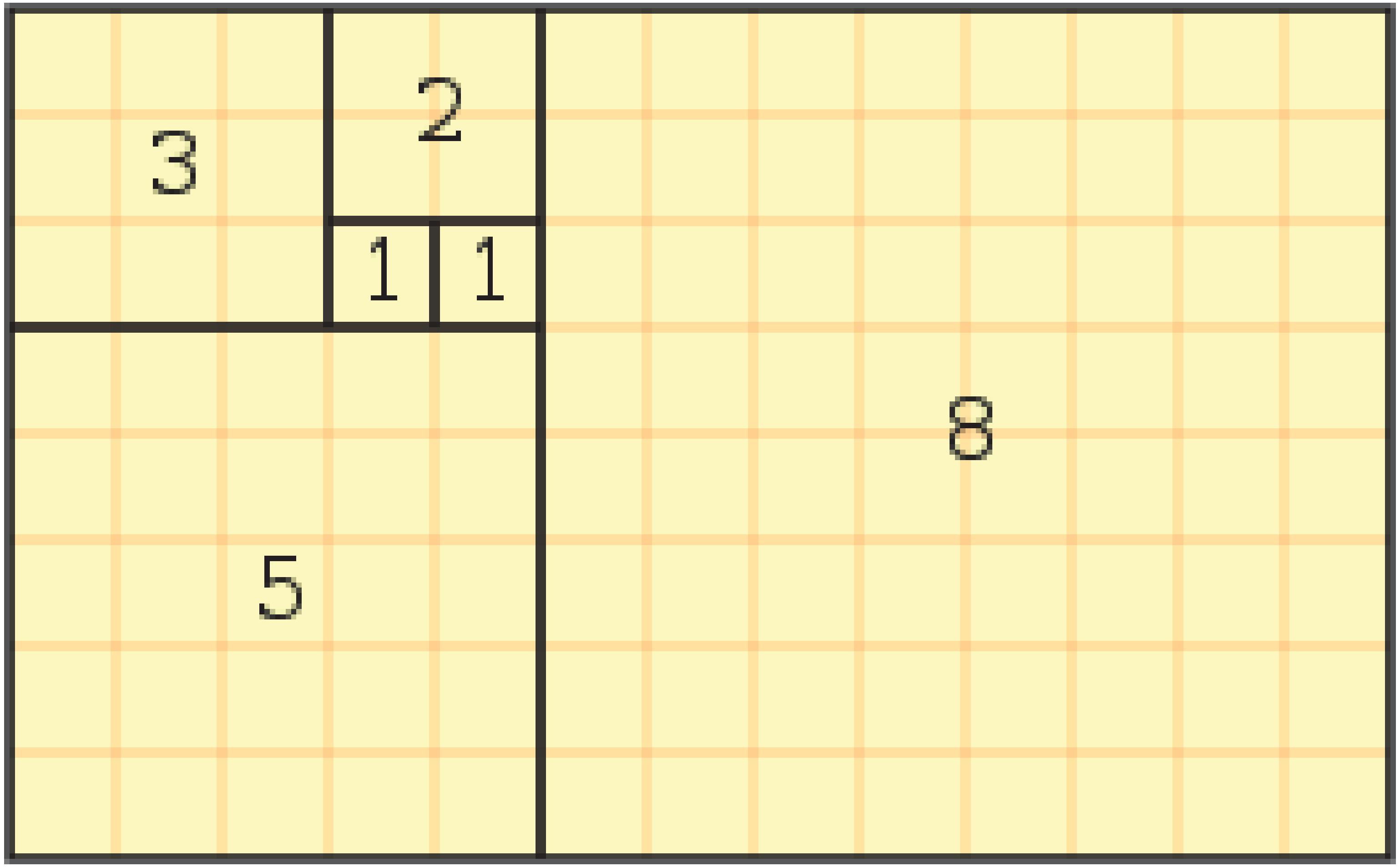
$$1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \dots, \quad \textit{ili} \; 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \dots$$

su odnosi Fibonaccijevih brojeva.
Pentagram je simbol zlatnog reza.

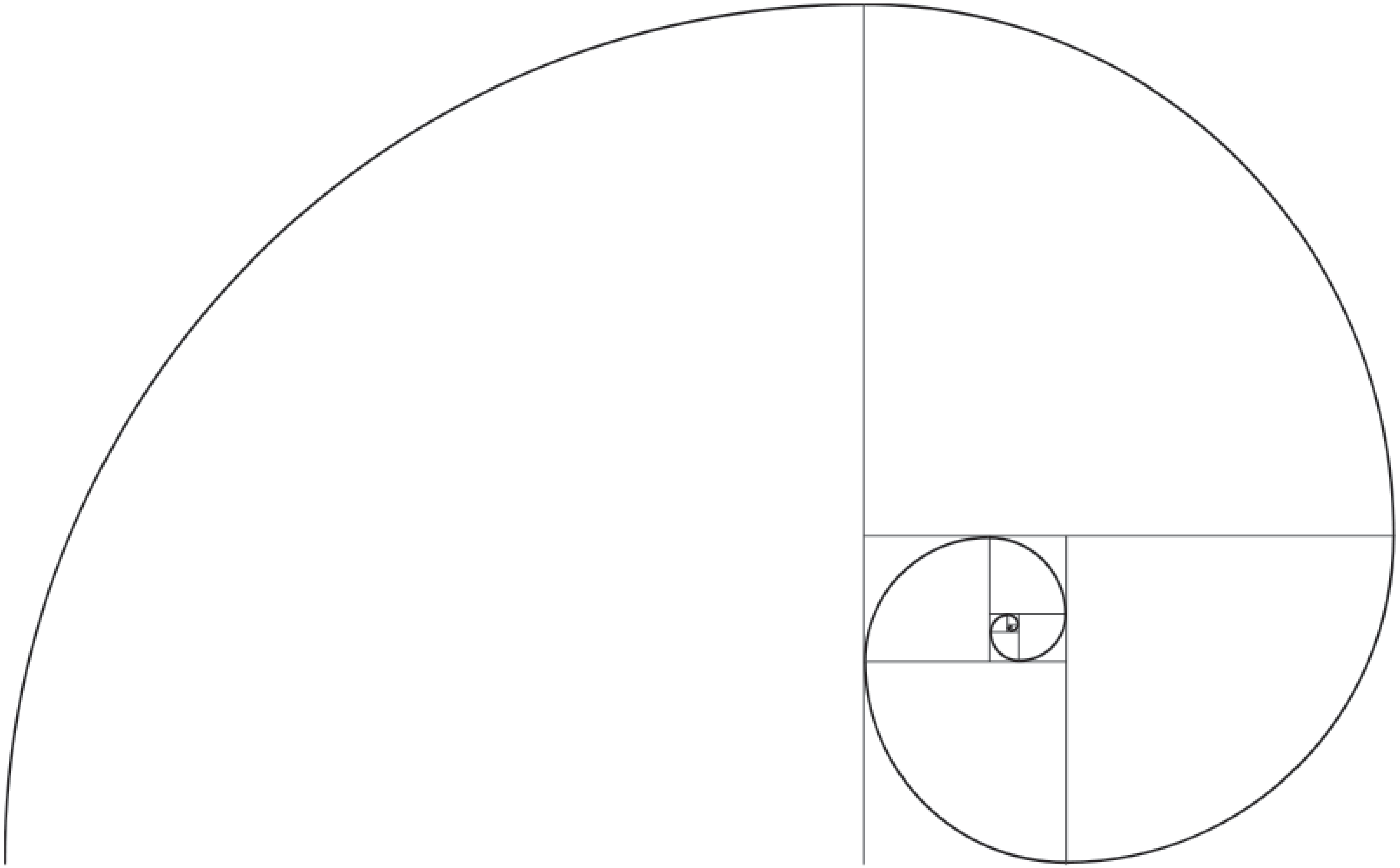
Pentagram



Zlatna spirala



Zlatna spirala



Primjene Fibonaccijevih brojeva

- Fibonaccijevi brojevi su važni u izračunavanju kompleksnosti Euclidovog algoritma za pronalaženje najmanjeg zajedničkog djelioca, jer algoritam radi najgore ako su data dva susjedna Fibonaccijeva broja!
- Yuri Matiyasevich je pokazao da se Fibonaccijevi brojevi mogu definisati pomoću Diofantinske jednačine, time dajući originalno rješenje 10. Hilbertovog problema.
- Svaki prirodni broj se može iskazati jedinstveno kao suma jednog ili više različitih Fibonaccijevih brojeva na takav način da ta suma ne uključuje dva susjedna Fibonaccijeva broja.
- Fibonaccijev niz se koristi u tržištima dionicama - Fibonaccijeva lepeza, Fibonaccijev luk, Fibonaccijeva vremenska ekstenzija itd.

Primjene Fibonaccijevih brojeva

- Odnos između milja i kilometara je veoma blizu zlatnog reza.
- U muzici, Fibonaccijevi brojevi se koriste da odrede štimanja. Uobičajeno je mišljenje da je prvi stav Muzike za gudače, perkusiju i Celestu Bele bartoka struktuiran pomoću ovog niza.

Primjeri u prirodi

Fibonaccijevi brojevi se pojavljuju u biologiji kao dva susjedna člana niza kod

- grananje stabala drveća;
- raspored listova na grani;
- plodovi ananasa;
- cvjetanje artičoke;
- raspored na borovoj šišarci;
- broj trutova u odnosu na radilice u košnici;
- izmjerimo li čovječju dužinu od vrha glave do poda, zatim to podijelimo s dužinom od pupka do poda, dobijamo φ.

Primjeri u prirodi