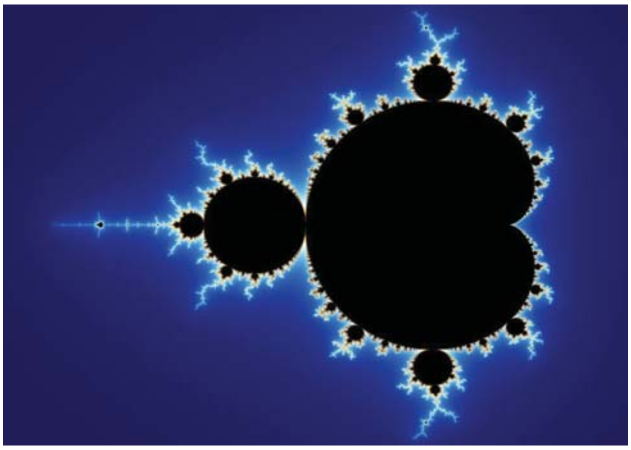


1 Fraktali

1.1 Uvod u fraktale

Mandelbrotov skup

U prošlosti, matematika se pretežno bavila skupovima i funkcijama na koje se pretežno mogu primjeniti metode klasičnog diferencijalnog računa. Skupovi funkcija koje nisu dovoljno glatke ili regularne se se pretežno ignorirali.

Posljednih decenija ovaj se način razmišljanja promijenio. Shvatilo se da se veoma mnogo može reći o matematici na neglatkim skupovima.

Fraktalna geometrija daje generalni okvir unutar kojeg se izučavaju takvi iregularni skupovi. Iako realtivno često čujemo o "fraktalima", većina ne razumije šta oni predstavljaju i uopće šta su.

Mnogi su pokušaji napravljeni kako bi se fraktali definisali u čisto matematičkom smislu, ali su se takve definicije često ispostavile nezadovoljavajućim u općem kontekstu.

Ipak, fraktalna geometrija daje dosta tehnika za upravljanje fraktalima.

Definicija fraktala

Rečeno informalno, fraktal je grub ili fragmentiran geometrijski oblik koji se može podijeliti u dijelove od kojih je svaki (barem približno) umanjena kopija originala.

Ova osobina se naziva 'samo-sličnost'.

Riječ dolazi od latinskog *fractus*, što znači slomljen i termin je 1975. godine izmislio Benoît Mandelbrot.

Matematički fraktal je zasnovan na jednačini koja prolazi kroz iteraciju.

Definicija fraktala

Fraktal obično ima slijedeće osobine:

- Ima finu strukturu do proizvoljno malih skaliranja.
- Previše je iregularan da bi bio opisan Euclidskom geometrijom.
- Samo-sličnost.
- Njegova Hausdorffova dimenzija je veća od topološke dimenzije.
- Ima jednostavnu rekurzivnu definiciju.

Definicija fraktala

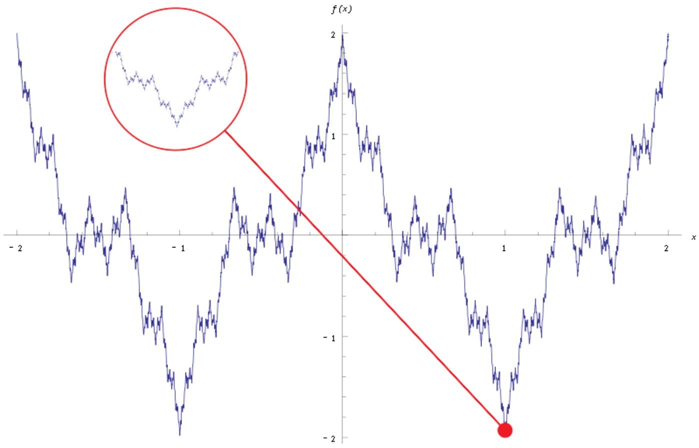
Prirodni primjeri fraktala uključuju:

- Oblaci;
- Planinski lanci;
- Munje;
- Obalni pojasevi;
- Snježne pahuljice;
- Određeno povrće (karfiol ili brokula)...

Historija fraktala

1872. se pojavljuje funkcija čiji se graf može smatrati fraktalom.

Karl Weierstrass daje primjer funkcije sa neintuitivnom osobinom da je svugdje neprekidna, a nigdje diferencijabilna!



$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

gdje je $0 < a < 1$, b pozitivan neparan cijeli broj i

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi.$$

Weierstrassova funkcija

Kochova pahuljica

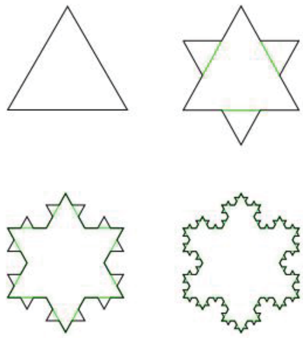
1904. Helge von Koch, nezadovoljan Weierstrassovom definicijom, daje mnogo više geometrijski primjer fraktala.

Kochova pahuljica

Površina Kochove pahuljice je

$$\frac{2s^2\sqrt{3}}{5}$$

gdje je s dužina jedne stranice originalnog trougla. Dakle, Kochova pahuljica ima beskonačnu granicu, a konačnu površinu! 1918 godine Bertrand Russell je priznao 'vrhunsku ljepotu' unutar nastajuće matematike fraktala. Slijedeći argument daje



relativno grubu interpretaciju šta bi bila dimenzija ovog skupa, što pokazuje kako ona reflektira osobine skaliranja i samo-sličnosti.

Kao što vidimo na slici, Kochova kriva (jedna strana trougla) se sastoji od četiri kopije same sebe, skalirane faktorom $1/3$, pa stoga ima dimenziju

$$d = -\frac{\ln 4}{\ln \frac{1}{3}} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,262.$$

Generalno, skup koji se sastoji od m kopija samog sebe skaliranih faktorom r smatramo da ima dimenziju $d = -\ln m / \ln r$. Broj koji dobijemo na ovaj način se obično naziva dimenzijom sličnosti skupa.

Fraktali kompleksne ravni

Iterirane funkcije u kompleksnoj ravni su ispitivane u kasnom 19om i ranom 20om stoljeću.

Taj rad je bio djelo Henri Poincaréa, Felixa Kleina, Pierrea Fatoua i Gastona Julia-e.

Međutim bez pomoći kompjuterske grafike, nismo imali mogućnost vizeulizacije ljepote mnogih objekata koji su bili otkriveni.

Mandelbrotov skup

Mandebrotov skup je skup tačaka u kompleksnoj ravni čija granica formira fraktal. Matematički, ovaj skup se definiše kao skup kompleksnih tačaka $c \in \mathbb{C}$, za koje orbita nule pod iteracijama kvadratnog kompleksnog polinoma $z_{n+1} = z_n^2 + c$ ostaje ograničena. Jasnije, kompleksni broj $c \in \mathbb{C}$ se nalazi u Mandebrotovom skupu ako, počevši od $z_0 = 0$, $|z_n|$ pod gornjom iteracijom nikada ne prelazi određeni broj, ma koliko veliko n postalo! Broj 1 nije u Mandelbrotovom skupu. No, broj i jeste!

$$0, i, (-1+i), -i, -1+i, -i, \ldots$$

Možemo li ovo vizuelizirati? Koristimo Mathematica-u!

Pa prije svega trebamo definisati funkciju Mandelbrot, koja vraća broj iteracija kojih moramo proći kako bi $|z_n|$ pod gornjom iteracijom prešao određenu vrijednost.

Pošto smo naravno ograničeni, neka je taj ograničavajući broj 2, a maksimalni broj iteracija 100.

Dakle, recimo

$$Mandelbrot[zc\_] := Module[\{z = 0, i = 0\},$$

$$While[i < 100\&\&Abs[z] < 2, z = z^2 + zc; i++]; i];$$

Probajmo ovu funkciju na gornjim primjerima. Očito, od interesa su nam u stvari oni brojevi koji su "ni tamo, ni ovamo" dakle koji dosta dugo ne divergiraju, pa onda to učine! Recimo, broj

$$c = -1.2 + 0.193i$$

tek poslije 83 iteracije pređe vrijednost 2, dok već broj $c = -1.2 + 0.2i$ poslije 18 iteracija učini isto. Ovi granični brojevi su oni koji u stvari formiraju granicu Mandelbrotovog skupa! No kako ih prikazati?

Funkcija $DensityPlot$ - veoma slična $ContourPlot$-u.

Julia skup

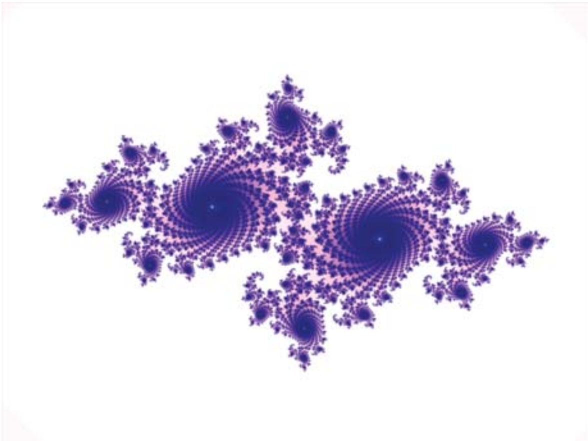
U kompleksnoj dinamici, Julia skup $J(f)$ holomorfične funkcije f se informalno sastoji od onih tačaka čije se dugoročno ponašanje pod ponovljenim iteracijama funkcije f može drastično promjeniti pod proizvoljno malim perturbacijama.

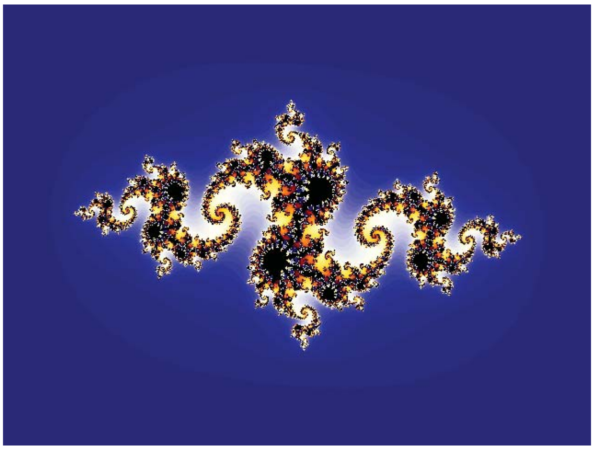
Veoma popularan dinamički sistem je dat sa porodicom kvadratnih polinoma, koji su naravno poseban slučaj racionalnih preslikavanja. Kvadratni polinomi se izražavaju kao

$$f_c(z) = z^2 + c,$$

gdje je c kompleksan parametar. Ovo se fundamentalno dakako razlikuje od prethodnog skupa i proizvodi čitav niz različitih skupova. Primjenimo sličan pristup kao maloprije.

Julia skup





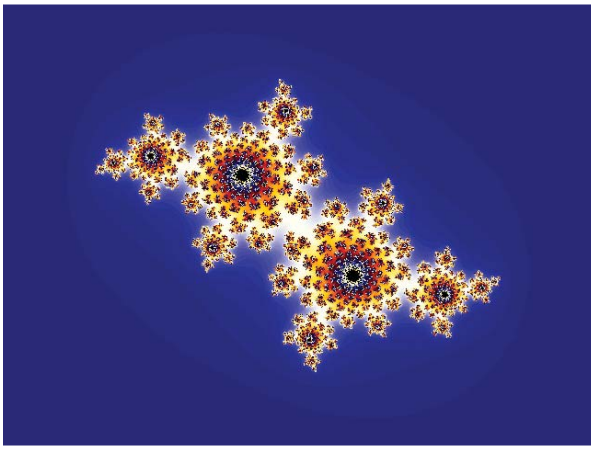
Julia skup

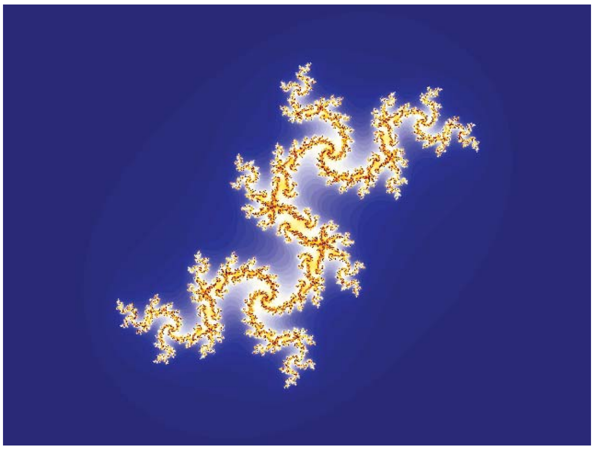
Julia skup

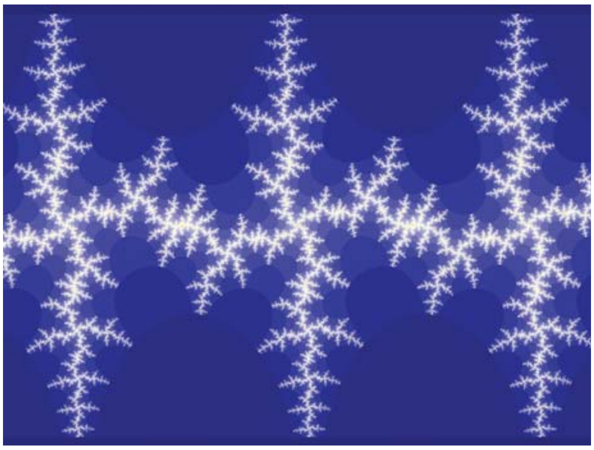
Julia skup

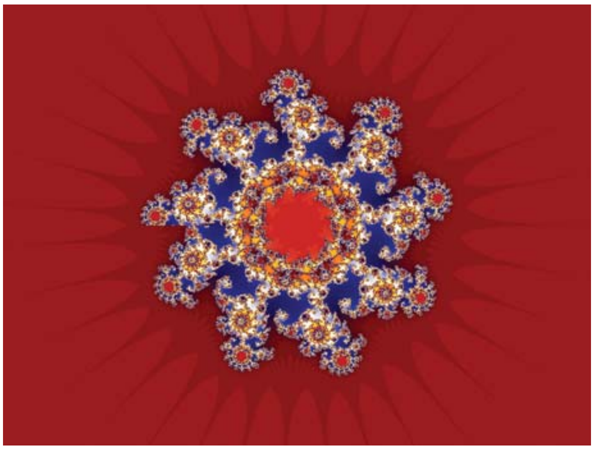
1.2 Fraktalna dimenzija

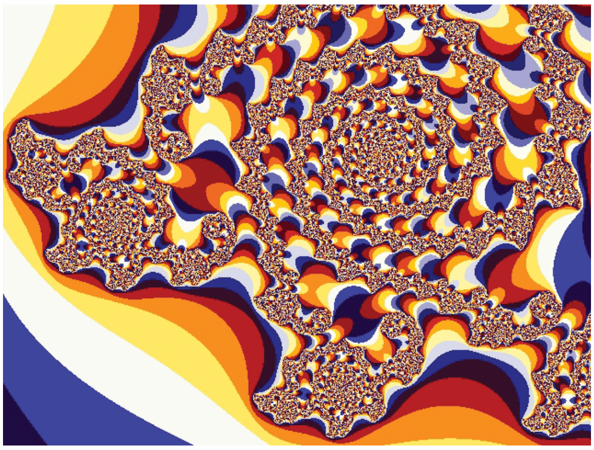
Hausdorffova mjera i dimenzija

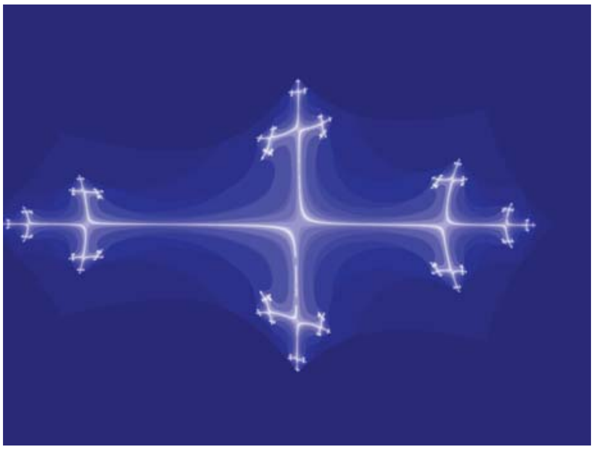


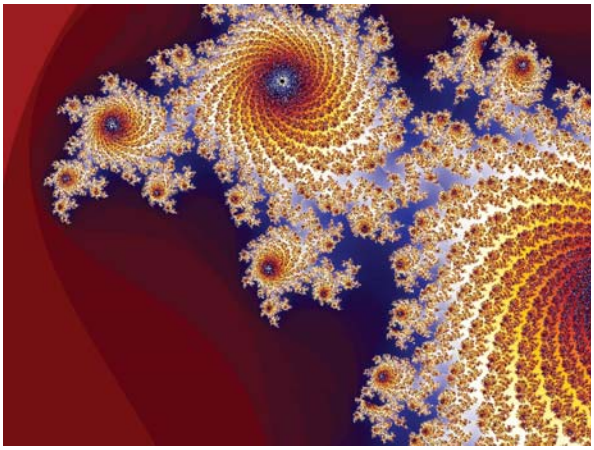












Od raznih vrsta fraktalnih dimenzija, Hausdorffova dimenzija je vjerovatno najstarija i ima tu prednost da se može definisati za bilo koji skup!

Ona je također matematički pogodna, jer koristi pojam mjere, sa kojima možemo relativno lako upravljati. Za razumjevanje fraktalne dimenzije i uopće fraktalne geometrije, razumjevanje Hausdorffove dimenzije je veoma bitno.

Hausdorffova mjera

Sjetimo se da ako je U neprazan podskup n-dimenzionalnog Euklidovog prostora $\mathbb{R}^n$, dijametar skupa U definišemo kao

$$|U| = \text{diam } (U) = \sup\{|x-y| : x, y \in U\}.$$

Ako je $\{U_i\}$ prebrojiva ili konačna kolekcija skupova dijametra ε koji pokrivaju F, tj.

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i,$$

gdje je $0 < |U_i| < \varepsilon$ za svako i, akžemo da je $\{U_i\}$ ε-pokrivač skupa F. Pretpostavimo da je $F \subseteq \mathbb{R}^n$ i da je s nenegativan broj. Za $\varepsilon > 0$, definišemo

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(F) = \inf \left\{ \sum_i |U_i|^s : U_i \text{ je } \varepsilon \text{ pokrivač od } F \right\}.$$

Pišemo da je

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}^s_\varepsilon(F).$$

Kažemo da je $\mathcal{H}^s(F)$ s-dimenzionalna Hausdorffova mjera skupa F. Hausdorffova mjera generalizira pojmove dužine, površine, zapremina, itd. Može se pokazati da je, za podskupe $\mathbb{R}^n$, n-dimenzionalna Hausdorffova mjera, do konstantnog faktora, samo n-dimenzionalna Lebesgueova mjera, tj. n-dimenzionalna zapremina.

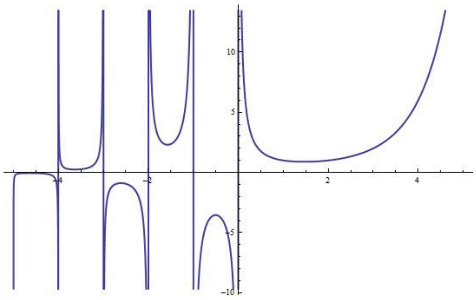
Stoga je $\mathcal{H}^n(F) = c_n \text{vol}^n(F)$, gdje je konstanta

$$c_n = \frac{\pi^{n/2}}{2^n \Gamma(n/2+1)},$$

gdje je Γ gama funkcija u stvari samo zapremina n-dimenzionalne lopte radijusa 1.

Gamma funkcija

Gama funkcija je ekstenzija faktorijela, tj. $\Gamma(n) = (n-1)!$. Međutim, ona se definiše pomoću konvergentnog nasvojstvenog integrala $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$.



Računajući $\Gamma(n/2+1)$ za parno n, dobijamo $\Gamma(n/2+1) = (n/2)!$, tj. za parno n imamo

$$C_n = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!}.$$

Za neparno n, jer je $\Gamma(n/2+1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, \frac{15\sqrt{\pi}}{8}, \frac{105\sqrt{\pi}}{16}, \frac{945\sqrt{\pi}}{32}, \ldots$, vidimo da je

$$\Gamma(n/2+1) = \frac{n!!\sqrt{\pi}}{2^{(n+1)/2}},$$

pa je

$$C_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n!!}.$$

Stoga imamo da je $\mathcal{H}^0(F)$ samo broj tačaka u F.

$\mathcal{H}^1(F)$ daje dužinu glatke krive F.

$\mathcal{H}^2(F)$ je $\pi/4\cdot$ površina glatke površi F.

$\mathcal{H}^3(F)$ je $\pi/6\cdot$ zapremina glatkog solida F.

$\mathcal{H}^m(F) = c_m \cdot vol^n(F)$ ako je F glatka m-dimenzionalna mnogostrukost u $\mathbb{R}^n$, tj. m-dimenzionalna površ u klasičnom smislu. Slijedeća jednakost se naziva skalirajućom osobinom Hausdorffove mjere.

Ukoliko je $F \subseteq \mathbb{R}^n$ i $\lambda > 0$, onda

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F),$$

gdje je $\lambda F := \{\lambda x : x \in F\}$, tj. skup F skaliran pozitivnim brojem λ.

Dokaz. Ako je $\{U_i\}$ δ-pokrivač skupa F, onda je $\{\lambda U_i\}$ $\lambda\delta$-pokrivač skupa λF. Stoga je

$$\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda F) \leq \sum |\lambda U_i|^s = \lambda^s \sum |U_i|^s \leq \lambda^s \mathcal{H}^s_\delta(F).$$

jer ovo vrijedi za proizvoljan δ-pokrivač $\{U_i\}$. Ako pustimo da $\delta \to 0$, dobivamo da je

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

Ako λ zamjenimo sa $1/\lambda$ i F zamjenimo sa λF, dobivamo drugu potrebnu nejednakost. $\square$

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova dimenzija, koja se nekad naziva i Hausdorff–Besikovičeva dimenzija, definiše se formalno na slijedeće način:

$$\dim_H F = \inf\{s : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\},$$

tako da je $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ ako je $s < \dim_H F$, a $\mathcal{H}^s(F) = 0$ ako je $s > \dim_H F$.

Ovo znači da postoji kritična vrijednost s u kojoj $\mathcal{H}^s(F)$ 'skače' sa ∞ na 0 i ova vrijednost s predstavlja Hausdorffovu dimenziju skupa F.

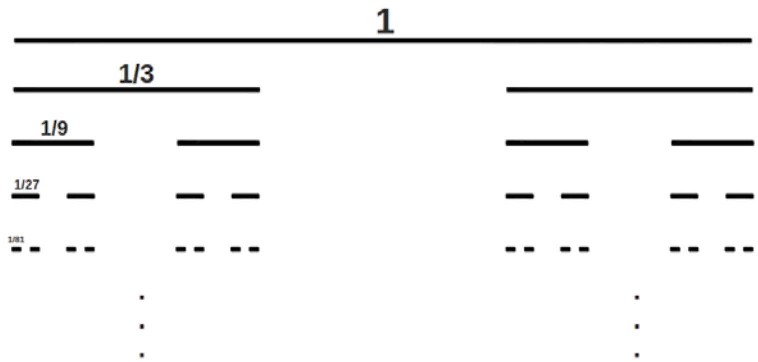
Osobine Hausdorffove dimenzije

1. Ako je $F \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, onda je $\dim_H F = n$, jer F sadrži loptu pozitivne n-dimenzionalne zapremine.
2. Ako je F neprekidno diferencijabilna m-dimenzionalna podmnogostrukost (tj. m-dimenzionalna površ) od $\mathbb{R}^n$,onda je $\dim_H F = m$.
3. Ako je $E \subseteq F$, tada je $\dim_H E \leq \dim_H F$.
4. Ako je $F_1, F_2, \ldots$ prebrojiv niz skupova, onda je
$$\dim_H \cup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1<i<\infty} \{\dim_H F_i\}.$$
5. Ako je F prebrojiv skup, onda je $\dim_H F = 0$.

Primjer 1.1. *Izračunati dimenziju Haussdorffa skupova*

1. $F = \{0\} \subset \mathbb{R}^n$.
2. $F = [0, 1] \subset \mathbb{R}$.
3. $F = \{1/n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.
4. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [0, 1], y = 0\}$.

Definicija 1.2 (Cantorov skup srednjih trećina)**.** Konstrukcija ovog skupa teče na slijedeći način:



- Neka je $E_0 = [0,1]$. Neka je E_1 skup koji se dobije iz E_0 brisanjem njegove srednje trećine, tj. $E_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$.
- Neka je E_2 skup koji se dobije iz E_1 brisanjem njegovih srednjih trećina, tj. $E_2 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$.
- Nastavimo na ovaj način, gdje se E_k dobije iz E_{k-1} brisanjem srednjih trećina intervala koji ga čine. E_k se sastoji od 2^k intervala čija je dužina 3^{-k}.

- Cantorov skup srednjih trećina F se definiše kao skup svih brojeva koji su u E_k za sva $k \in \mathbb{N}$, tj.
$$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k.$$
- F je beskonačan skup, čak šta više, neprebrojiv skup, koji sadrži beskonačno mnogo tačaka u susjedstvu svake svoje tačke.
- Cantorov skup se sastoji tačno od svih onih brojeva u $[0,1]$ čiji zapis u bazi 3 ne sadrži cifru 1, tj. sve brojeve
$$a_1 3^{-1} + a_2 3^{-2} + a_3 3^{-3} + \dots,$$
gdje su $a_1 = 0$ ili 2 za svako i.

Primjer 1.3. *Ako je F Cantorov skup, dokazati da mu je dimenzija Hausdorffa $\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.6309297536$.*

Cantorov skup se dijeli na dva dijela, naime $F_L = F \cap [0,1/3]$ i $F_D = F \cap [2/3,1]$. Očito su oba ova skupa geometrijski slični skupu F, ali skalirani faktorom $1/3$ i $F = F_L \cup F_D$, gdje je unija disjunktna. Stoga, za bilo koje $s \in \mathbb{R}$,
$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(F_L) + \mathcal{H}^s(F_D) = \frac{1}{3^s}\mathcal{H}^s(F) + \frac{1}{3^s}\mathcal{H}^s(F),$$

po skalirajućem svojstvu Hausdorffove mjere.

Pod pretpostavkom da u kritičnoj vrijednosti $s = \dim_H F$ imamo da je $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ (netrivijalna pretpostavka!), možemo gornju nejednakost podijeliti sa $\mathcal{H}^s(F)$ i dobiti

$$1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^s \iff s = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Kochova pahuljica

Kochova pahuljica se dobija na sličan način kao Cantorov skup, s tim da skup uvećevamo, a ne smanjujemo. Uvjerimo se da Kochova pahuljica ima konačnu površinu. Na početku je površina pahulice je površina jednakostraničnog trougla, tj. $A_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

1. Na prvom koraku dodamo 3 trokuta površine $\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cdot 3^2}$, tj. imamo $A_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.
2. Na drugom koraku dodamo 12 trokuta površine $\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cdot 3^4}$, tj. imamo $A_3 = \frac{10\sqrt{3}a^2}{27}$.
3. Na trećem koraku dodamo 48 trokuta površine $\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cdot 3^6}$, tj. imamo $A_4 = \frac{94\sqrt{3}a^2}{243}$.

Na n-tom koraku dodat ćemo $3 \cdot 4^{n-1}$ trokuta površine $\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cdot 3^{2n}}$, tj. ukupna površina je, kada pustimo $n \to \infty$

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \cdot \frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

Za geometrijski red koji smo dobili lako se pokaže da je jednak $4/5$, tj.

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{8}{5} = \frac{2\sqrt{3}a^2}{5}.$$

S druge strane, ako posmatramo granicu, na početku je obim pahuljice 3.

1. Na prvom koraku, oduzmemo od obima tri puta po jednu trećinu, no dodamo tri puta po dvije trećine.
2. Na drugom koraku, oduzmemo od obima 12 puta po jednu devetinu, no dodamo 12 puta po dvije devetine.
3. Na trećem koraku, oduzmemo od obima 48 puta po jednu dvadesetsedminu, no dodamo 48 puta po dvije dvadesetsedmine.

4. Na n-tom koraku, oduzmemo od obima $3 \cdot 4^{n-1}$ puta po $\frac{1}{3^n}$, no dodamo $3 \cdot 4^{n-1}$ puta po $\frac{2}{3^n}$, tj. dodamo $3 \cdot 4^{n-1}$ puta po $\frac{1}{3^n}$.

Dakle, ako pustimo da $n \to \infty$, imamo da je obim

$$O = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^{n-1}}{3^n} = 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty.$$

Dimenzija Minkowskog

U prošloj sekciji, vidjeli smo da je kalkulacija Hausdorffovih mjera dosta zamoran posao, čak i za dosta jednostave skupove. Sada smo zainteresovani za pronalaženje definicije dimenzije koja može biti više aplikativna u izračunavanju dimenzije skupa F.

Medjutim, nema brzih i lakih pravila za određivanje da li se neka vrijednost može racionalno smatrati dimenzijom. Faktori koji određuju prihvatljivost definicije dimenzije se pretežno prepoznaju pomoću iskustva i intuicije.

Ne trebamo pretpostaviti da različite definicije dimenzije daju istu vrijednost dimenzije za sve skupove, čak i za one koji bi se mogli smatrati 'finim'. Stoga, pojam dimenzije se treba odvojiti od pojma definicije dimenzije!

Dimenzija Minkowskog je jedna od najšire korištenih definicija. Relativno je jednostavna za izračuanti i pojam mjere se izbjegava. Ima nekoliko različitih verzija ove definicije. Prva je

Definicija 1.4. Neka je F neprazan ograničen skup u $\mathbb{R}^{\ltimes}$. Gornja i donja dimenzija Minkowskog skupa F su date sa

$$\underline{\dim}_M F = \underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon},$$

$$\overline{\dim}_M F = \overline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon},$$

a dimenzija Minkowskog sa

$$\dim_M F = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon},$$

ukoliko ovaj limes postoji, gdje je $N_\varepsilon(F)$ jedno od slijedećih

1. Najmanji broj zatvorenih kugli radijusa ε koji pokriva F;

2. Najmanji broj kocki stranice ε koje pokrivaju F;
3. Broj ε-mrežnih kocki koje presjecaju F;
4. najmanji broj skupova dijametra najviše ε koji pokrivaju F;
5. najveći broj disjunktnih lopti radijusa ε sa centrima u F.

Ovo je veoma korisna definicija, ali nije previše fina kada se treba doista izračunati dimenzija Minkowskog. Međutim, postoji ekvivalentna definicija ove dimenzije koja je dosta različite forme. Prije svega sjetimo se šta je to ε-okolina F_ε skupa F

$$F_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, F) < \varepsilon\},$$

gdje je

$$d(x, F) = \inf_{y \in F}\{d(x, y)\}.$$

Stoga je ε-susjedstvo skupa F, F_ε, skup svih tačaka udaljenih od F najviše ε - nekad se ovo naziva Minkowski kobasicom!

Lema 1.5. *Ako je $F \subseteq \mathbb{R}^n$, onda je*

$$\underline{\dim}_M F = n - \overline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln vol^n(F_\varepsilon)}{\ln \varepsilon},$$

$$\overline{\dim}_M F = n - \underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln vol^n(F_\varepsilon)}{\ln \varepsilon},$$

gdje je F_ε ε-susjedstvo skupa F, a $vol^n F_\varepsilon$ njegova n-dimenzionalna zapremina.

Postoji veoma važan odnos između dimenzija Minkowskog i Hausdorffa. Ako F možemo pokriti sa $N_\varepsilon(F)$ skupova dijametra ε, iz skalirajućeg svojstva Hausdorffove mjere, slijedi

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon \leq N_\varepsilon(F)\varepsilon^s.$$

ako je $1 < \mathcal{H}^s(F) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}^s_\varepsilon(F)$, onda je

$$\ln N_\varepsilon(F) + s \ln \varepsilon > 0,$$

ako je ε dovoljno malo.Stoga je

$$s \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{N_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon},$$

pa očito imamo

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_M \leq \overline{\dim}_M$$

Primjer 1.6. *Naći dimenziju Minkowskog za slijedeće skupova:*

1. $F = \{x \in \mathbb{R}^2 | ||x|| = 1\}$.
2. $F = \{x \in \mathbb{R}^2 | ||x|| \leq 1\}$.
3. $F = \{1/n | n \in \mathbb{N}\}$.