Viša Geometrija [1]

Vedad Pašić

Prirodno-matematički fakultet
Univerzitet u Tuzli

Predmet: Viša geometrija

Predavač: Vedad Pašić

Semestar: Zimski 2014/2015.

Kabinet: PMF 313

Email: vedad.pasic@untz.ba

Web: http://www.frontslobode.org/vedad/vg/

Organizacija

- 2h predavanja (ponedjeljak 11-13) i 2h vježbi
- Kabinetski sati: ponedjeljak 10-11, utorak 12-13

Literatura

- M. do Carmo: Differential geometry of curves and surfaces; Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1976)
- Mileva Prvanović: Neeuklidske geometrije, Savez studenata Prirodno-matematičkog fakulteta, Novi Sad (1971)
- Zoran Lučić: Euklidska i hiperbolička geometrija (drugo izdanje), Total design i Matematički fakultet, Beograd (1997).
- Takashi Sakai: Riemannian Geometry, American Mathematical Society (1992)
- Euclid: Elementi, Aleksandrija, (300. pne)

Poglavlje 1

Uvod

1.1 Manifest

Naša misija:

Izučavati druge, ne-Euclidske, geometrije i time (nadam se) spoznati više o samoj strukturi ove grane matematike s aksiomatske perspektive.

Šta znači riječ "*geometrija*"?

"Geometrija" dolazi od grčkog $\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$ i složena je riječ od "$\gamma\eta$" = "Zemlja" i "$\mu\epsilon\tau\rho\acute{\omega}$" = "mjera". Stoga "geometrija" je potekla od nauke mjerenja zemlje (npr, kako bi se izmjerila poljoprivredna polja). Grci su pretvorili ovu "primjenjenu nauku" u "čistu matematiku" proučavajući geometrijske objekte na abstraktnom nivou (Euclidovi "Elementi" su najpoznatiji primjer prvog udžbenika iz ove oblasti, koji se koristio u učionicama sve do prošlog vijeka - više o Elementima jako brzo).

Kakav će ovaj predmet biti: Ovo će biti "čisti" kurs, ali plan je da se možda isključe veoma teoretski ili žestoki dokazi kako bismo se fokusirali na "fine" geometrijske teoreme. Međutim, biće dosta definicija, teorema i njihovih dokaza.

Predznanje:

- Osnovna linearna algebra;
- Euclidska geometrija (osnovna i diferencijalna);
- Osnovi logike

1.2 Program ukratko

1. Uvod u historijsku višu geometriju

2. Hilbertov sistem aksioma
3. Hiperbolična geometrija
4. Riemannova geometrija
5. Neke posebne teme (ako ima vremena)
6. ...otvoreno diskusiji

Poglavlje 2

Euclidski i Hilbertov sistem aksioma

2.1 Euclidska aksiomatika

U ovoj sekciji ćemo se baviti ukratko pozadinom ovog predmeta – historijskim razvojem aksiomatike u geometriji. Najznačajnije djelo ove oblasti je svakako skup knjiga Euclida iz Aleksandrije – "Elementi".

Ovaj dio predavanja dosta vjerno prati Lučićevu Euklidsku i hiperboličku geometriju.

2.1.1 Deduktivna metoda

U izgradnji bilo koje valjano zasnovane načne teorije nije moguće da sve pojmove definišemo i sve stavove dokažemo. Da bi se odredio sadržaj nekog pojma koriste se drugi pojmovi, a da bi se odredio sadržaj tih pojmova nužno se koriste drugi pojmovi , mora se pribjegavati korištenju drugih pojmova, itd. Moramo priznati da proces definisanja neophodno počinje pojmovima koji nisu definisani i takvi pojmove nazivamo *osnovnim* ili *nedefinisanim pojmovima*. Sve ostale pojmove nazivamo *izvedenim ili definisanim pojmovima*, a iskaze kojima se određuje sadržaj izvedenih pojmova zovemo *definicijama*.

Proces utvrđivanja istinitosti nekog stavova neke teorije započinjemo stavovima čiju istinitost pretpostavljamo. Takve stavove zovemo *osnovnim stavovima - aksiomima*. Sve ostale stavove čiju istinitost izvodimo iz aksioma zvaćemo *teoremama* ili *dokazanim stavovima*, a postupak njihovog dokazivanja zvaćemo *dokazom*.

Jedna od važnih disciplina koja se može zasnovati u skladu sa navedenim principima je logika. Pojmove logike koristimo u formulacijama aksioma, definicija i teorema bez bližeg određenja, a logičke stavove primjenjujemo u dokazima ne izvodeći njihovu istinitost. Prilikom izgradnje neke matematičke discipline po-nekad je veoma zgodno koristiti ne samo logiku već i neku na istim principima prethodno zasnovanu matematičku disciplinu. Ove discipline zvaćemo *pretpostavljenim disciplinama*.

Metoda izgradnje neke discipline u strogoj saglasnosti sa prethodnim principima se naziva *deduktivnom* ili *aksiomatskom metodom*, a na taj način zasnovane discipline se nazivaju *deduktivnim* ili *aksiomatskim teorijama*. Sam skup osnovnih pojmova i aksioma se naziva *aksiomatskim sistemom*.

Prilikom izgradnje neke deduktivne teorije u velikoj mjeri postoji sloboda izbora osnovnih pojmova i aksioma te teorije. Dva aksiomatska sistema date teorije smatraćemo ekvivalentnim ako se svaki pojam jednog od tih dvaju sistema može definisati pomoću pojmova drugog sistema i ako se svaki stav jednog od tih sistema može dedukovati iz stavova drugog.

Postoje tri osnovna svojstva skupa aksioma neke deduktivne teorije koji se uvijek zahtijevaju:

1. Konzistentnost ili saglasnost

2. Potpunost

3. Nezavisnost aksioma i osnovnih pojmova

Prvi pojam zahtjeva da se se iz sistema ne može dedukovati i pojam i njegova negacija. Drugi pojam zahtjeva da se za svaka dva protivrječna stava bar jedan može dokazati. Treći pojam zahtjeva da se nijedan askiom ne može deducirati iz drugih. Za detalje vidjeti literaturu.

2.1.2 Euclidovi Elementi

Prvi pokušaji stvaranja deduktivnih teorija sežu 2000 godina u prošlost. **Elementi** Hipokrata sa Chiosam bapisani sredinom petog vijeka pne je prvi pokušaj sistematizacije geometrijskih znanja. Na–žalost, ovo djelo nije sačuvano, no komentariše se u mnogim drugim sličnim antičkim djelima i smatra se osnovom svih poduhvata tog tipa. Naslov Elementi latinski je prevod grčkog $\Sigma\tau o\iota\chi\epsilon\iota\alpha$ i u antičko vrijeme je uobičajeno ime za deduktivno zasnovanu geometriju. Postojalo je dosta djela u antičkoj Grčkoj koja su se bavila ovom tematikom, pogledajte Wikipediju za više hstorijskih detalja ukoliko ste zainteresirani.

Neusporedivo najčitaniju, najčuveniju i najutjecajniju raspravu sa naslovom Elementi napisao je oko 300. godine pne Euclid (oko 365 do 275 pne), učenik Platonove akademije i osnivač geometrijske škole u Aleksandriji. Uticaj ovog djela je nemjerljiv i svakako je najznačajniji udždbenik svih vremena (bez pretjerivanja!). Stoljećima niko nije ni pokušao poslije Euclida da geometriju drugačije

Slika 2.1: Euklid Aleksandrijski

utemenlji, a i dan-danas se u modernim školama isključivo radi upravo ta geometrija. Euclidovi elementi se sastoje iz 13 knjiga i možete ih naći na engleskom jeziku na sajtu kursa (mislim da je copyright davno istekao!).

Prvu knjigu Elemenata Euclid počinje nizom definicija (ukupno 23) kojima se uvode prvi geometrijski pojmovi poput tačke, prave, ravni, ugla, kruga itd. Navest ćemo neke od njih.

Euclidove definicije.

(1) Tačka je ono što nema dijelova.

(2) Linija je dužina bez širine.

(3) Krajevi linije su tačke.

(4) Prava je linija ona, koja za tačke na njoj podjednako leži.

(5) Površina je ono što ima samo dužinu i širinu.

(6) Krajevi površine su linije.

(7) Ravan je površina koja za prave na njoj podjednako leži.

(8) Ugao u ravni je uzajamni nagib dviju linija u ravni koje se sijeku i koje ne leže u istoj pravoj.

(9) Ako su linije koje obrazuju ugao prave, ugao se zove pravolinijski

(10) Ako prava, koja stoji na drugoj pravoj, obrazuje sa ovom sva susjedna jednaka ugla, svaki od njih je prav, a podignuta prava zove se normala na onoj na kojoj stoji

(11) Tup ugao je onaj koji je veći od pravog

(12) Oštar je onaj koji je manji od pravog

(13) Granica je ono što je kraj ma čega.

(14) Figura je ono što je omeđeno ili jednom ili sa više granica.

...

(23) paralelne su one prave koje se nalaze na istoj ravni i koje se produžene u beskrajnost na obje strane ne sijeku jedna sa drugom.

Za ostale definicije vidite literaturu. Nije teško primjetiti da ovo nisu stroge definicije već samo kratka objašnjenja elementarnih geometrijskih pojmova izložene s namjerom da u svjesti čitaoca stvore intuitivne predstave. Osnovne stavove geometrije Euclid je podijelio na aksiome i postulate i obično se prihvata da je Euclid zasnovao geometriju na 5 postulata i 9 aksioma (pogledati literaturu). Svojom složenošću se ističe peti postulat, koji je izazvao podozrenje poznavalaca Euclidovog djela koji su smatrali da zbog svoje neelementarnosti, peti postulat treba dedukovati iz ostalih aksioma geometrije, a nikako ne prihvatiti da bude jedan od osnovnih stavova geometrije. Zbog njegove važnosti, ovdje ga i eksplicitno dajemo:

Euclidov V postulat.

Ako jedna prava u presjeku sa drugim dvjema obrazuje sa iste strane dva unutrašnja ugla čiji je zbir manji od dva prava ugla, te dvije prave će se sjeći i to sa one strane sa koje su ovi uglovi manji od dva prava.

Mnogi su matematičari i naučnici nastavili Euclidov rad, i već neki od prvih uviđaju da Euclidovi aksiomi i postulati nisu dovoljni da se iz njih izvedu sva geometrijska tvrđenja. Arhimed je tako dopunio skup aksioma sa pet novih.

Međutim, sve do 19tog vijeka niko značajno nije nadopunio Elemente na pravi način. Naročito se izdvajaju ispitivanja iz teorije paralelnih koja se odnose na Euclidov V postulat. Nakon mnoštva pokušaja koji su trajali preko 2000 (!) godina da se ovaj postulat dokaže iz već postojećih, u 19tom vijeku je dokazano da je *Euclidov V postulat nezavisan od ostalih aksioma geometrije*. U djelu Nikolaja Lobačevskog i Janosza Bolyaia je prvi put izražena misao da je V postululat nezavisan te da se ne može izvesti iz ostalih postulata.

David Hilbert je u svom djelu "Osnove geometrije" koje je izdato 1899. godine, geometriju zasnovao na neprotivrječnom, nezavisnom i potpunom sistemu aksioma.

2.1.3 Hilbertov sistem aksioma ukratko

Za razliku od Euclida, Hilbert ne opisuje osnovne geometrijske pojmove. Hilbert kaže:

"Mi zamišljamo tri različita sistema stvari: stvari prvog sistema nazivamo tačkama i označavamo ih sa $A, B, C, ...$; stvari drugog sistema nazivamo pravama i označavamo ih sa $a, b, c, ...$; stvari trećeg sistema nazivamo ravnima i označavamo ih sa $\alpha, \beta, \gamma, ...$. Tačke se nazivaju elementima linearne geometrije, a tačke, prave i ravni se nazivaju elementima prostorne geometrije. ... Aksiome geometrije možemo podijeliti u pet grupa: svaka pojedinačno od ovih grupa izražava izvjesne povezane osnovne činjenice našeg opažanja. Mi ćemo ove grupe aksioma nazvati na slijedećei način:

I 1-8. aksiomi veze;

II 1-4. aksiomi rasporeda;

III 1-5. aksiomi podudarnosti;

IV . aksiom paralelnosti;

V 1-2. aksiomi neprekidnosti."

Poglavlje 3

Hilbertov sistem aksioma

U ovoj sekciji ćemo se detaljno pozabaviti Hilbertovim sistemom aksioma.

3.1 Aksiomi veze/pripadanja

Za Hilberta su tačke, prave i ravni tri sistema stvari koje se ne definišu, a njihovi se međusobni odnosi označavaju, između ostalog, i riječju "ležati", pri čemu se "tačan i za matematičke svrhe potpun" opis ovog odnosa postiže pomoću aksioma prve grupe ili aksioma veze ili pripadanja.

Ako tri ili više tačaka pripada jednoj pravoj, onda se nazivaju *kolinearne*, inače su *nekolinearne*. Dalje, ako četiri ili više tačaka pripada jednoj ravni, onda ćemo reći da su *koplanarne*, inače su *nekoplanarne*. Dvije prave su *koplanarne* ako se nalaze na istoj ravni, inače su *nekoplanarne*, ili *mimoilazne*. Dvije ili više pravih ćemo zvati *konkurentnim* ako sve sadrže istu tačku. Z advije ili više ravni ćemo reći da su *koaksijalne* ako je njihov presjek neka prava.

Aksiom I 3.1.1. Ma koje bile tačke A i B uvijek postoji prava a, kojoj pripada svaka od tačaka A i B.

Aksiom I 3.1.2. Ma koje bile dvije tačke A i B, postoji najviše jedna prava kojoj pripada svaka od tačaka A i B.

Aksiom I 3.1.3. Svakoj pravoj pripadaju najmanje dvije tačke. Postoje najmanje tri tačke, koje ne pripadaju istoj pravoj.

Aksiom I 3.1.4. Neka su A, B i C tri tačke, koje ne pripadaju istoj pravoj. Tada postoji ravan α kojoj pripada svaka od tih tačaka.

Aksiom I 3.1.5. Neka su A, B i C tri tačke, koje ne pripadaju istoj pravoj. Tada postoji najviše jedna ravan α, kojoj pripada svaka od tačaka A, B i C.

Aksiom I 3.1.6. Ako dvije tačke A i B prave a pripadaju ravni α, onda svaka tačka prave a pripada ravni α.

Aksiom I 3.1.7. Ako dvije ravni α i β imaju zajedničku tačku A, onda one imaju zajedničku najmanje još jednu tačku B.

Aksiom I 3.1.8. Postoje najmanje četiri tačke koje ne pripadaju istoj ravni.

3.1.1 Posljedice aksioma veze/pripadanja

Postoje brojne posljedice ovih aksioma, većina je i više nego dobro znana iz srednje škole. Evo nekih od njih.

Teorema 3.1.9. *Ako su tri tačke nekolinearne, tada su svake dvije od njih međusobno različite.*

Teorema 3.1.10. *Ako su četiri tačke nekoplanarne, tada su svake dvije od njih međusobno različite.*

Teorema 3.1.11. *Postoji jedinstvena prava koja sadrži dvije različite tačke.*

Teorema 3.1.12. *Postoji jedinstvena ravan koja sadrži tri različite tačke.*

Teorema 3.1.13. *Postoji jedinstvena ravan koja sadrži dvije različite prave koje se sijeku.*

Teorema 3.1.14. *Presjek dvaju pravih je najviše edna tačka.*

Teorema 3.1.15. *Postoje dvije prave koje se ne sijeku.*

Teorema 3.1.16. *Dvije ravni ili nemaju zajedničkih tačaka ili imaju zajedničku pravu, kojoj pripadaju sve zajedničke tačke te dvije ravni.*

Teorema 3.1.17. *Ravan i prava, koja ne pripada toj ravni, mogu imati najviše jednu zajedničku tačku.*

3.2 Aksiomi rasporeda

U euclidovim Elementima poredak tačaka na pravoj nigdje nije izdvojen već se podrazumjevao budući da je intuitivno bio jasno određen zahvaljujući poređenju dužina. Tek je C.F. Gauss primjetio 1832. godine da neke prostije stavove o rasporedu tačaka na pravoj treba usvojiti kao aksiome, a da pojam "između" treba rigorozno definisati.

Hilbert je pojam "između" prihvatio kao jedan od osnovnih pojmova geometrije, a njegov potpun opis postigao pomoću druge grupe aksioma. Primjetite da se u literaturi koristi oznaka $\mathcal{B}$ za tročlanu relaciju "između". Mi ćemo je izbjegavati kad god je to moguće.

Aksiom II 3.2.1. Ako se tačka B nalazi između tačaka A i C, onda su A, B i C tri razne tačke neke prave i tačka B se takođe nalazi između C i A (nekad navedeno kao odvojeni aksiom: $\mathcal{B}(A,B,C) \Rightarrow \mathcal{B}(C,B,A)$).

Aksiom II 3.2.2. Ma koje bile dvije tačke A i B, postoji najmanje jedna tačka C, takva da je B između A i C.

Aksiom II 3.2.3. Od tri tačke jedne prave, najviše jedna se nalazi između ostale dvije.

Aksiom II 3.2.4. Neka su A, B i C tri tačke koje ne pripadaju istoj pravoj i neka je a neka prava ravni ABC, kojoj ne pripada ni jedna od tačaka A, B i C. Ako prava a sadrži tačku, koja je između A i B, onda onda, takođe, sadrži tačku koja je ili između A i C ili između B i C.

Samo se zadnji od ovih aksioma odnosi na geometriju ravni, dok se ostali odnose na geometriju prave i nazivaju se *linearnim*.

3.2.1 Posljedice aksioma rasporeda

Definicija 3.2.5. Posmatrajmo na pravoj a dvije tačke A i B. Sistem tačaka između A i B se zove *duž* i označava sa AB ili BA. Tačke između A i B su tačke duži AB, a same tačke A i B su *krajnje tačke* te duži. Sve ostale su *spoljašnje tačke* duži AB.

Primjedba 3.2.6. Nekad ćemo, radi jednostavnosti, pravu koja sadrži duz AB označavati isto tako, tj, sa AB.

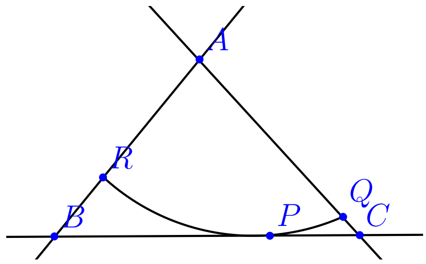
Teorema 3.2.7. *Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke, a P, Q, R tačke takve da je $\mathcal{B}(B,P,C), \mathcal{B}(C,Q,A), \mathcal{B}(A,R,B)$, tada su P, Q, R nekolinearne tačke.*

Dokaz Kako je $\mathcal{B}(C,Q,A), \mathcal{B}(A,R,B)$ na osnovu aksioma II1 slijedi da su tačke Q i R različite od A pa, kako se nalaze na različitim pravama, na osnovu aksiome $I2$ i one će biti medjusobno različite. Na isti način se dokazuje da se tačka P razlikuje i od Q i od R.

Pretpostavimo da su tačke P, Q, R kolinearne. Tada, na osnovu aksioma II3, važi tačno jedna od relacija

$$\mathcal{B}(P,Q,R),\ \mathcal{B}(Q,R,P),\ \mathcal{B}(R,P,Q).$$

Budući da time razmatranje neće izgubiti na opštosti, možemo pretpostaviti da je $\mathcal{B}(R,P,Q)$. Tada su A, R, Q tri nekolinearne tačke i BC prava u ravni ARQ, koja ne sadrži A, siječe pravu RQ u tački P takvoj da je $\mathcal{B}(R,P,Q)$, a prave AQ i AR u tačkama C i B takvim da nije ni $\mathcal{B}(Q,C,A)$ ni $\mathcal{B}(A,B,R)$, što protivrječi aksiomu II4. Dakle P, Q, R su nekolinearne tačke. ∎



Teorema 3.2.8. *Između ma kojih dviju tačaka prave postoji beskonačno mnogo drugih njenih tačaka.*

Dokaz Dokaz ove teoreme prati iz prve dvije grupe aksioma. ∎
Odavde direktno slijedi

Teorema 3.2.9. *Svaka prava ima beskonačno mnogo tačaka.*

Definicija 3.2.10. Skup konačnog broja tačaka A, B, $C, \ldots, P$, Q i svih unutrašnjih tačaka duži $AB, BC, \ldots, PQ$ je *izlomljena linija*, a A i Q su njenje *krajnje tačke*. Ako se te krajnje tačke poklapaju, onda se ta izlomljena linija zove *mnogougao*.

Definicija 3.2.11. Ako su O, A, A' i B tačke na pravoj, i to tako da se tačka O nalazi između A i A', ali se ne nalazi između A i B, onda su na datoj pravoj tačke A i A' *sa raznih strana* tačke O, a tačke A i B su *sa iste strane* tačke O.

Definicija 3.2.12. *Poluprava* je skup svih tačaka prave, koje se nalaze sa iste strane uočene tačke te prave.

Definicija 3.2.13. *Poluravan* je skup svih tačaka ravni, koje se nalaze sa iste strane uočene prave te ravni.

Definicija 3.2.14. *Poluprostor* je skup svih tačaka prostora, koje se nalaze sa iste strane uočene ravni tog prostora.

Definicija 3.2.15. Ugao je skup dvije poluprave sa zajedničkom početnom tačkom.

Teorema 3.2.16. *Prava koja prolazi kroz tjeme A trougla ABC i sadrži neku unutrašnju tačku tog trougla, siječe njegovu stranicu BC.*

Teorema 3.2.17. *Ako je C tačka otvorene duži AB, tada tačka D koja nije istovjetna sa C pripada otvorenoj duži AB ako i samo ako pripada tačno jednoj od otvorenih duži AC i CB.*

Teorema 3.2.18. *Neka su A, B, C tri kolinearne tačke. Presjek otvorenih duži AB i BC je prazan ako i samo ako je B između A i C, tj. $\mathcal{B}(A, B, C)$.*

Teorema 3.2.19. *Ako je $\mathcal{B}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, tada tačka X koja je različita od tačaka $A_i, \forall i$, pripada otvorenoj duži A_1A_n, ako i samo ako pripada tačno jednoj od otvorenih duži $A_iAi + 1, i = 1, 2, \ldots, n-1$.*

Teorema 3.2.20. *Ako je $(A_iA_{i+1}), i = 1, 2, \ldots, n-1, n > 3$ konačan niz disjnktnih duži koje pripadaju nekoj pravoj, tada je $\mathcal{B}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.*

Teorema 3.2.21. *Ako je dat ma koji broj tačaka na pravoj one se uvijek mogu označiti sa $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \ldots, A_n$, tako daje tačka A_2 između A_1 sa jedne strane i $A_3, A_4, A_5, \ldots, A_n$ sa druge strane, A_3 između A_1, A_2 sa jedne strane i $A_4, A_5, \ldots, A_n$ itd. Osim ovog načina označavanja postoji još samo jedan, obrnuti, način označavanja, koji ima isto svojstvo.*

Drugim rječima, na pravoj postoje samo dva smjera.

Dokaz Ako imamo tri tačke, tvrđenje je posljedica aksioma II3. Pretpostavimo da je tvrđenje tačno ako je broj tačaka između 3 i $m \in \mathbb{N}$ i dokažimo da je tačno i za $m+1$ tačaka.

Razmotrimo najprije pitanje broja načina na koje se skup

$$\mathcal{A} := \{A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}\}$$

može linearno urediti. Ako pretpostavimo da je $\mathcal{B}(A_1, A_2, \ldots, A_{m+1})$ tada je i $\mathcal{B}(A_{m+1}, A_m, \ldots, A_1)$. Ako je $p_1, p_2, \ldots, p_{m+1}$ permutacija brojeva $1, 2, \ldots, m+1$, iz

$$\mathcal{B}(A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots, A_{p_{m+1}})$$

slijedi da je

$$A_{p_1}, A_{p_{m+1}} = A_1, A_{m+1},$$

jer su A_1 i A_{m+1} jedine tačke skupa $\mathcal{A}$ koje nisu između nekih drugih dvaju tačaka toga skupa. Budući da zbog toga razmatranje neće izgubiti na opštosti, možemo pretpostaviti da je p_1 i da je $p_{m+1} = m+1$. Kako je A_2 jedina tačka skupa $\mathcal{A}$ takva da između A_1 i A_2 nema viče tačaka toga skupa, biće $p_2 = 2$. Ponovivši ovaj postupak, zaključićemo da je $p_i = i, 2 \le i \le m$. Dakle, skup $\mathcal{A}$ se može urediti ili na 0 ili na 2 načina, pa je dovoljno pokazati postojanje jednog tog uređenja.

Neka je $X \in \mathcal{A}$ i neka je $\mathcal{D} = \mathcal{A} \setminus X$. Na osnovu indukcijske hipoteze skup $\mathcal{D} = D_1, D_2, \ldots, D_m$ se može linearno urediti. Neka je $\mathcal{B}(D_1, D_2, \ldots, D_m)$. Tada je ili $\mathcal{B}(X, D_1, D_m)$ ili $\mathcal{B}(D_1, D_m, X)$ ili $\mathcal{B}(D_m, X, D_1)$.

Ako je $\mathcal{B}(X, D_1, D_m)$ tada je na osnovu teoreme 3.2.18, $(XD_1) \cap (D_1D_m) = \emptyset$, pa su zbog toga i na osnovu teoreme 3.2.19, duži $(XD_1), (D_1D_2), \ldots, (D_{m-1}, D_m)$ disjunktne. Kako su time zadovoljeni uslovi teoreme 3.2.20, biće $\mathcal{B}(X, D_1, D_2, \ldots, D_m)$.

Ako je $\mathcal{B}(D_1, D_m, X)$, tada je $\mathcal{B}(X, D_m, D_1)$, pa je na osnovu već dokazanog, $\mathcal{B}(X, D_m, D_{m-1}, \ldots, D_1)$.

Ako je $\mathcal{B}(D_m, X, D_1)$, tj. $\mathcal{B}(D_1, X, D_m)$, tada tačka X, na osnovu teoreme 3.2.19 pripada tačno jednoj duži $(D_i D_{i+1}), i = 1, 2, \ldots, m-1$. Ako je to duž (D_j, D_{j+1}), iz teorema 3.2.17 i 3.2.20 slijedi da je

$$\mathcal{B}(D_1, D_2, \ldots, D_j, X, D_{j+1}, \ldots, D_m).$$

∎

3.3 Aksiomi podudarnosti

Ova grupa aksioma implicitno definiše podudarnost duži i podudarnost uglova.

Aksiom III 3.3.1. Ako su A i B dvije tačke prave a i ako je A' tačka te iste ili neke druge prave a', onda se uvijek na pravoj a' sa date strane tačke A' može naći tačka B', takva da je duž AB podudarna duži $A'B'$, što se označava kao

$$AB \cong A'B'$$

Aksiom III 3.3.2. Ako su duži $A'B'$ i $A''B''$ podudarne jednoj istoj duži AB, onda je i duž $A'B'$ podudarna duži $A''B''$, tj.

$$A'B' \cong AB \wedge A''B'' \cong AB \Rightarrow A'B' \cong A''B''$$

Aksiom III 3.3.3. Neka su AB i BC dvije duži prave a koje nemaju zajedničkih tačaka i neka su, dalje, $A'B'$ i $B'C'$ dvije duži te iste ili neke druge prave a', koje također nemaju zajedničkih tačaka.

Ako je tada $AB \cong A'B'$ i $BC \cong B'C'$,

onda je i $AC \cong A'C'$.

Aksiom III 3.3.4. NEka je dat ugao $\angle hk$ u ravni α, prava a' te iste ili neke druge ravni α' i neka je, u odnosu na pravu a' zadana poluravan ravni α'. Neka je, dalje, h' poluprava prave a' sa početnom tačkom O'. Tada u ravni α', kroz tačku O', u datoj poluravni s obzirom na pravu a', prolazi samo jedna poluprava k' takva da je $\angle hk$ podudaran uglu $\angle h'k'$, što se označava kao

$$\angle hk = \angle h'k'.$$

Svaki ugao je sam sebi podudaran.

Aksiom III 3.3.5. Neka su A, B i C tri tačke koje ne pripadaju istoj pravoj i neka su A', B' i C' takođe tri tačke koje ne pripadaju istoj pravoj. Ako je pri tome

$$AB \cong A'B', \quad AC \cong A'C', \quad \angle BAC \cong \angle B'A'C',$$

onda je i

$$\angle ABC \cong \angle A'B'C'.$$

Na osnovu ovih i aksioma iz prve grupe se mogu dokazati mnoge teoreme iz geometrije na koje ste nailazili u srednjoj skoli. Navest ćemo neke od njih.

Teorema 3.3.6.

- *U jednakokrakom trouglu, uglovi naspram podudarnih stranica su podudarni.*
- *svih pet teorema o podudarnosti trouglova*
- *sve teoreme o podudarnosti trijedara*

Teorema 3.3.7. *Spoljašnji ugao trougla veći je od unutrašnjeg neusporednog ugla istog trougla.*

Teorema 3.3.8. *Spoljašnji ugao trougla veći je od unutrašnjeg neusporednog ugla istog trougla.*

Također možemo definisati pravi ugao pa stoga i normalu prave.

Teorema 3.3.9. *Kroz datu tačku postiji jedna i samo jedna normala date prave.*

Teorema 3.3.10. *Ako prava prolazi kroz tačku presjeka dvije prave i normalna je na svakoj od njih, ona je normalna i na svakoj pravoj u ravni, određenoj dvjema pravama koje se sijeku.*

Teorema 3.3.11. *Kroz datu tačku prolazi jedna i samo jedna normala date ravni.*

Teorema 3.3.12. *Kroz datu tačku prolazi jedna i samo jedna ravan koja je normalna na datoj pravoj.*

Teorema 3.3.13. *Ako se dvije ravni, koje su normalne trećoj, sijeku, prava presjeka siječe treću ravan i normalna je na njoj.*

Teorema 3.3.14. *Kroz svaku pravu, koja nije normalna na datoj ravni, prolazi jedna i samo jedna ravan normalna na datoj ravni.*

Dalje možemo vršiti upoređivanje duži i upoređivanje uglova i definisati sabiranje duži i sabiranje uglova. Možemo takođe definisati transformaciju podudarnosti.

Definicija 3.3.15. Neka je između tačaka figura F i F_1 uspostavljena jednoznačna korespodencija, pri kojoj tačkama A, B figure F odgovaraju, respektivno, tačke A_1, B_1 figure F_1. Za duži AB i A_1B_1 kažemo da odgovaraju jedna drugoj.

Uzajamno jednoznačna korespodencija između tačaka figura F i F_1 je *transformacija podudarnosti*, ako je svaki par odgovarajućih duži tih figura, par podudarnih duži. Za same figure F i F_1 kažemo da su *podudarne*: $F \cong F_1$.

Teorema 3.3.16. *Pri transformaciji podudarnosti, kolinearne tačke se preslikavaju na kolinearne tačke, a komplanarne tačke na komplanarne tačke.*

Pri transformaciji podudarnosti, ugao se preslikava na podudaran ugao.

Teorema 3.3.17. *Neka su A, B, C proizvoljne nekolinearne tačke ravne figure F, A_1 proizvoljna tačka ravni, a_1 proizvoljna poluprava te ravni, sa početnom tačkom A_1.*

Tada uvijek postoji transformacija podudarnosti figure F, koja preslikava A na A_1, B na tačku B_1 poluprave a_1, a C na tačku C_1 koja pripada određenoj poluravni s obzirom na pravu kojoj pripada a_1.

Ili drugačije:

Podudarnost u ravni jednoznačno je određena sa tri para odgovarajućih tačaka: $A, A_1;\ B, B_1;\ C, C_1$ tako da je

$$AB \cong A_1B_1, \quad AC \cong A_1C_1, \quad BC \cong B_1C_1.$$

Teorema 3.3.18. *Podudarnost u ravni je, sa tačnošću do osne simetrije, određena sa dva para odgovarajućih tačaka A, A_1; B, B_1, tako da je $AB \cong A_1B_1$.*

Napomena: Transformacija podudarnosti se zove još i *kretanje*.

Teorema 3.3.19. *Dva trougla su podudarni ako i samo ako su*

1. *dvije ivice i njima zahvaćeni ugao podudarni odgvarajućim ivicama i uglu drugog trougla;*
2. *jedna ivica i na njoj nalegli uglovi jednog trougla podudarni odgovarajućoj ivici i uglovima drugog trougla*
3. *ivice jednog trougla podudarne ivicama drugog trougla*
4. *dvije ivice i ugao naspram jedne od njih jednog trougla podudarni odgovarajućim ivicama i uglu drugog trougla, dok su uglovi naspram dviju međusobmno podudarnih ivica oba oštra, oba prava ili oba tupa*
5. *jedna ivica, na njoj nalegli ugao i njoj naspramni ugao jednog trougla podudarni odgovarajućoj ivici i uglovima drugog trougla.*

Dokaz Lučić str. 90. ∎

3.4 Aksiomi neprekidnosti

Od samih početaka geometrije pa sve do kraja devetnaestoga stoljeća geometrijska neprekidnost se podrazumjevala, kao nešto jasno samo po sebi. Pasch je 1882. godine u svojoj "Novijoj Geometriji" istakao neophodnost zasnivanja geometrijske neprekidnosti polazeći od zasebnih aksioma.

Već je Arhimed primjetio neke nedostatke Euclidske aksiomatike. U cilju zasnivanja teorije mjerenja geometrijskih figura on je u svom djelu "O valjku i lopti", upotpunio Euclidove aksiome - između ostalog Eudoksovim aksiomom prestiživosti na kojem se zasniva tzv. geometrijska neprikidnost "u velikom". Prema tom aksiomu konačnim brojem "prenošenja" zadate duži na zadatu pravu može se "stići i prestići" svaka tačka te prave.

Neprekidnost "u malom" koja omogućava da se dokažu stavovi od presjeku prave i kruga i o presjeku dvaju krugova počiva na Cantorovom aksiomu prema kojem je, grubo rečeno, prava "gusto ispunjena" tačkama.

Aksiomi neprekidnosti su dakle Arhimedov i Cantorov aksiom, tj:

Aksiom IV 3.4.1. Neka su AB i CD proizvoljne duži. Tada na pravoj AB postoji *konačan* broj tačaka $A_1, A_2, \ldots A_n, A_{n+1}$ koje su raspoređene tako da je

$$\mathcal{B}(A, A_1, A_2), \mathcal{B}(A_1, A_2, A_3), \ldots$$

pri čemu su duži $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_nA_{n+1}$ podudarne duži CD, a B se nalazi između A_n i A_{n+1} , tj. $\mathcal{B}(A_n, B, A_{n+1})$.

Aksiom IV 3.4.2. Neka je na bilo kojoj pravoj dat beskrajan niz duži $A_1B_1, A_2B_2, \ldots$ od koje svaka slijedeća pripada unutrašnjosti prethodne; neka dalje, ne postoji duž koja pripada unutrašnjosti svih duži datog niza. Tada na uočenoj pravoj postoji tačka X, koja pripada unutrašnjosti svake duži $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \ldots$.

Navedimo prvo dvije posljedice Arhimedove aksiome, od kojih ćemo dokazati drugu.

Posljedica 3.4.3. *Ako je duž a manja od duži b, tada postoji prirodan broj n, takav da je*

$$(n-1)a \leq b < na.$$

Posljedica 3.4.4. *Ako je duž a manja od duži b, onda za svaku duž c postoje $m, n \in \mathbb{N}$, takvi da*

$$a < \frac{m}{2^n}c < b.$$

Dokaz Kako je $a < b$, na osnovu Arhimedovog aksioma postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da

$$c < 2^n(b-a), \quad tj. \quad \frac{1}{2^n}c < b-a.$$

Ako je $\frac{1}{2^n}c > a$, onda je

$$a < \frac{1}{2^n}c < b-a < b$$

pa je dokaz gotov (m=1).

Ako je $\frac{1}{2^n}c < a$, onda, na osnovu prethodne teoreme, postoji broj m takav da je

$$(m-1)\frac{1}{2^n}c \leq a < m\frac{1}{2^n}c.$$

Tada je

$$a < \frac{m}{2^n}c = \frac{1}{2^n}c + \frac{m-1}{2^n}c < (b-a) + a = b.$$

∎

Definicija 3.4.5. Niz duži $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n, \ldots$ koji zadovoljava aksiom 3.4.2, takav da ne postoji duž koja je sadržana u svim dužima toga niza, zvaćemo *Cantorovim nizom*.

Teorema 3.4.6. *Postoji jedinstvena tačka koja pripada Cantorovom nizu.*

Dokaz Ako bi pored tačke X čije je postojanje pretpostavljeno Cantorovim aksiomom postojala još jedna tačka Y koja pripada svakoj od duži zadatog niza, onda bi i svaka tačka Z duži XY takoe pripadala svakoj od duži tog niza. Tada bi duž XY pripadala svakoj duži Cantorovog niza što nije u skladu sa njegovom definicijom. Stoga je X jedinstvena. ∎

Teorema 3.4.7. *Ne postoji duž koja bi bila manja od svake duži Cantorovog niza.*

Dokaz Lučic str. 160.... ∎

Teorema 3.4.8. Dedekindova teorema/princip za pravu. *Ako su sve tačke neke prave p podijeljene u dva skupa $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ takva da*

1° *svaka tačka prave p pripada samo jednom od skupova $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$,*

2° *skupovi $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ su neprazni,*

3° *između bilo kojih dviju tačaka jednog od tih skupova nema tačaka koje pripadaju drugom,*

tada postoji jedinstvena tačka X na pravoj p takva da su sve ostale tačke skupa $\mathcal{M}$ sa jedne strane te tačke, a sve ostale tačke skupa $\mathcal{N}$ sa druge.

Dokaz Kako su skupovi $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ neprazni, postoje tačke M_1 i N_1 koje, redom, pripadaju tim skupovima. Neka je S_1 središte duži M_1N_1.

Tada S_1 pripada pravoj p, pa stoga, na osnovu uslova 1°, pripada tačno jednom od skupova $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$. Ako tačka S_1 pripada skupu $\mathcal{M}$, označićemo je sa M_2, a tačku N_1 sa N_2, a ako S_1 pripada skupu $\mathcal{N}$, označicemo je sa N_2, a M_1 sa M_2.

Neka je S_2 središte duži M_2N_2. Ponavljajući postupak dobivamo niz $[M_kN_k]_{k=1,2,...}$ zatvorenih duži od kojih svaka duž sadrži slijedeću u tom nizu. Takav niz zvaćemo nizom polovina duži.

Dokažimo da ne postoji duž koja je sadržana u svim dužima konstruisanog niza polovina. Ako bi, naprotiv, postojala takva duž x, onda bi za svako k bilo $x < M_kN_k$, a kako je, prema konstrukciji niza,

$$M_kN_k = (1/2^{k-1})M_1N_1,$$

bilo bi

$$x < (1/2^{k-1})M_1N_1,\ tj.\ 2^{k-1}x < M_1N_1, \forall k,$$

što protivrječi Arhimedovom aksiomu. Dakle niz $[M_kN_k]$ je Cantorov, pa postoji jedinstvena tačka X koja pripada svakoj duži niza polovina duži.

Iz konstrukcije niza polovina duži slijedi da su sve tačke niza $(M_k)_{k=1,2,...}$ sa jedne strane tačke X, a sve tačke niza $(N_k)_{k=1,2,...}$ sa druge. Dokažimo da su i sve ostale tačke skupa $\mathcal{M}$ sa jedne tačke X, a sve ostale tačke skupa $\mathcal{N}$ sa druge.

Tačka X pripada samo jednom od skupova $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, recimo skupu $\mathcal{N}$. Ako je $N \in \mathcal{N}$ proizvoljna tačka različita od X, tada je ona sa strane X sa koje su i tačke niza $(N_k)_{k=1,2,...}$.

Zaista, ako bi bilo $\mathcal{B}(N, X, N_k)$, tačka N bi bila sa one strane X sa koje su i tačke niza $(M_k)_{k=1,2,...}$, pa bi, za dovoljno veliko k, tačka M_k bila izmedju N i X. Dakle, postojala bi tačka skupa $\mathcal{M}$ izmedju dviju tačaka skupa $\mathcal{N}$.

Ako je pak, M proizvoljna tačka skupa $\mathcal{M}$, tada ne može biti $\mathcal{B}(M_k, X, M)$ jer bi postojala tačka skupa $\mathcal{N}$ izmedju dvaju tačaka skupa $\mathcal{M}$.

Dakle, postoji jedinstvena tačka X takva da su sve ostale tačke skupa $\mathcal{M}$ sa jedne strane tačke X, a sve ostale tačke skupa $\mathcal{N}$ sa druge.

Za tačku X kažemo da razdvaja skupove $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$. ∎

Za tačku X kažemo da razdvaja skupove $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$.

Teorema 3.4.9. *Ako se Dedekindov princip za pravu uzme kao aksiom, onda se, pod pretpostavkom da su zadovoljene prve tri grupe aksioma, mogu dokazati Arhimedov i Cantorov aksiom.*

Dokaz Arhimedovog aksioma Pretpostavimo da Arhimedov aksiom nije tačan, tj. da postoji beskonačan niz podudarnih duži $A_1A_2 \cong A_2A_3 \cong \ldots$ koje sve pripadaju duži AB. Izaberimo takav raspored tačaka na pravoj AB da je tačka A ispred B i podijelimo sve tačke prave AB na dva skupa. U prvi skup stavimo onu tačku koja je ispred neke tačke A_n, pa pošto je A_n proizvoljna tačka, to znači da je i ispred tačaka $A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots$, a u drugi skup sve ostale tačke prave AB.

Tada svaka tačka pripada jednom i samo jednom skupu. Svaki skup ima tačaka, tj. nije prazan, i to prvi skup ima tačke $A_1, A_2, A_3, \ldots$ a drugi tačku B.

Dalje, svaka tačka prvog skupa je ispred svake tačke drugog skupa. Prema tome, uslovi Dedekindovog principa su zadovoljeni, što znači da postoji tačka C koja vrši presjek. Jasno je da tačka C ne može pripadati prvom skupu. Ona je dakle tačka koja stoji ispred svih tačaka drugog skupa.

Na osnovu aksioma 3.3.1, postoji tačka D koja je ispred C takva da je

$$CD \cong A_1A_2 \cong A_2A_3 \cong \ldots .$$

Kako je D ispred C, ona ne može pripadati drugom skupu. To pak, prema definiciji prvog skupa, znači da je tačka D ispred neke tačke A_n, pa dakle, i ispred A_{n+1}. Drugim rječima, tačke A_n, A_{n+1} su između C i D, što znači da je $CD > A_nA_{n+1}$. Kontradikcija. ∎

Dokaz Cantorvog aksioma Posmatrajmo niz duži $A_1B_1, A_2B_2, \ldots$ tako da je uvijek duž $A_{n+1}B_{n+1}$ sadržana u duži A_nB_n, a ne postoji duž koja pripada svakoj duži ovog niza. Treba pokazati da postoji tačka koja pripada svakoj duži ovog niza.

Izaberimo na uočenoj pravoj a smjer takav da je uvijek tačka A_n ispred tačke B_n. Podijelimo tačke prave a na dva skupa, tako da tačka pripada prvom skupu ako je ona ispred neke tačke A_n, pa dakle i ispred tačaka $A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots$. U drugi skup stavimo sve ostale tačke. Odmah se vidi da svaka tačka pripada jednom i samo jednom skupu i da prvi skup sadrži tačke $A_1, A_2, \ldots$, a drugi skup $B_1, B_2, \ldots$ tj. svaki skup nije prazan. Isto tako je jasno da su tačke prvog skupa ispred tačaka drugog skupa. Prema tome, svi uslovi Dedekindovog principa su zadovoljeni, pa postoji tačka C koja vrši presjek.

Kako prvi skup nema zadnji element, to je C prva tačka drugog skupa, tj. tačka C je iza svih tačaka $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, a ispred svih tačaka $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$.

Drugim rječima, tačka C pripada svakoj duži A_nB_n. ∎

Na osnovu ovoga slijedi

Teorema 3.4.10. *Aksiomi neprekidnosti Hilbertovog sistema aksioma su ekvivalentni Dedekindovom principu za pravu.*

3.4.1 Posljedice aksioma neprekidnosti

Na osnovu ovih aksioma može se zasnovati mjerenje duži i uglova.

Definicija 3.4.11. *Mjerom* ili *dužinom duži* nazivamo funkciju L koja svakoj duži a dodjeljuje pozitivan realan broj $L(a)$, a zadovoljava slijedeće uslove:

1° postoji duž kojoj je mjera 1,

2° mjere podudarnih duži su međusobno jednake,

3° ako su a, b, c tri duži takve da je $a + b = c$, onda je

$$L(a) + L(b) = L(c).$$

Broj L(a) nazivamo *mjerom duži* a, a duž čija je mjera 1 nazivamo *jediničnom*.

Teorema 3.4.12. *Mjera L duži ima slijedeće osobine*

(a) Duž a je manja od duži b ako i samo ako je $L(a) < L(b)$.

(b) Duži su podudarne ako i samo su im mjere međusobno jednake.

(c) Ako su a, b, c tri duži takve da je $a - b = c$, onda je

$$L(a) - L(b) = L(c).$$

(d) Ako je $k \in \mathbb{N}$ onda je

$$L(ka) = kL(a) \quad i \quad L\left(\frac{1}{2^k}a\right) = \frac{1}{2^k}L(a)$$

Slijedeće tri teoreme nam omogućavaju da uvedemo metriku.

Teorema 3.4.13. *Neka je funkcija L mjera duži. Funkcija L' je takođe mjera duži ako i samo ako postoji pozitivan realan broj λ takav da je $L' = \lambda L$.*

Dokaz Ako je $L' = \lambda L$, lako se dokazuje da je i L' mjera duži. Dokažimo obratno.

Pretpostavimo zato da je L' mjera duži, zatim da je a_0 jednična duž mjere L i $\lambda = L'(a_0)$ i dokažimo da je za svaku duž AB,

$$L'(AB) = \lambda L(AB).$$

Kako je za svaki prirodan broj k

$$AB < AB + \frac{1}{2^k}a_0,$$

tada će na osnovu teoreme 3.4.4 postojati prirodni brojevi m_k i 2^{n_k} koji zavise od broja k takvi da je

$$AB < \frac{m_k}{2^{n_k}}a_0 < AB + \frac{1}{2^k}a_0.$$

Budući da su L i L' mjere, biće

$$L(AB) < \frac{m_k}{2^{n_k}} < L(AB) + \frac{1}{2^k}$$

i

$$L'(AB) < \frac{m_k}{2^{n_k}}L'(a_0) < L'(AB) + \frac{1}{2^k}L'(a_0).$$

Dakle, biće

$$\lim_{k\to\infty} \frac{m_k}{2^{n_k}} = L(AB)$$

pa je

$$L(AB)L'(a_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{m_k}{2^{n_k}}L'(a_0) = L'(AB).$$

Stoga je za svaku duž AB

$$L'(AB) = \lambda L(AB).$$

Dakle, $L' = \lambda L$. ∎

Teorema 3.4.14. *Ako je a_0 proizvoljna duž, onda postoji jedinstvena mjera L takva da je $L(a_0) = 1$.*

Dokaz Lučić str. 169. ∎

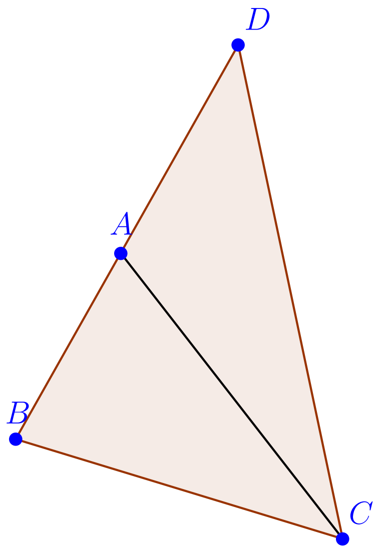
Teorema 3.4.15. *Ako je L zadata mjera, onda za svaki pozitivan realan broj α postoji duž a takva da je $L(a) = \alpha$.*

Dokaz Lučić str. 169. ∎

Ako mjeru duži AB nazovemo *rastojanjem* između tačaka A i B i ako pretpostavimo da je mjera nula duži, nula, onda je na taj način u apsolutni prostor uvedena metrika. Ako sa

$$\rho_L(A, B)$$

obilježimo uvedeno rastojanje između tačaka A i B, onda je



Slika 3.1: Nejednakost trougla

1° $\rho_L(A, B) = 0$ ako i samo ako su tačke A i B istovjetne,

2° $\rho_L(A, B) = \rho_L(B, A)$,

3° $\rho_L(A, B) + \rho_L(B, C) \geq \rho_L(A, C)$.

Prve dvije tvrdnje se dokazuju direktno, a treća slijedi iz teorema 3.4.12 i teorema:

Teorema 3.4.16. *Zbir dvaju ivica trougla je veći od njegove treće ivice, a razlika dvaju ivica trougla je manja od njegove treće ivice*

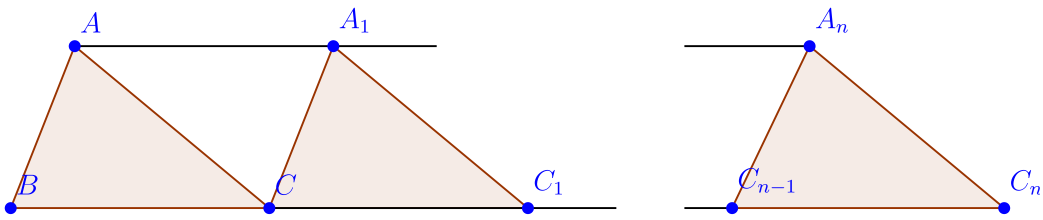
Dokaz Neka je ABC proizvoljan trougao i D tačka poluprave BA takva da je $\mathcal{B}(B, A, D)$ i $AC \cong AD$. Tada je $\angle BCD > \angle BCA$ i $\angle ACD \cong \angle BDC$ odakle slijedi da je $\angle BCD > \angle BDC$, pa je, kako je jedna ivica trougla veća od druge ako i samo ako je naspram nje veći ugao (Lučić str 89), $BD > BC$ i prema tome $AB + AC > BC$.

Da bismo dokazali drugi dio teoreme, pretpostavimo da je $AC > AB$. Budući da je, na osnovu dokazanog dijela teoreme, $AC < AB + BC$, biće $AC - AB < BC$. ∎

U potpunoj analogiji sa pojmom mjere duži se uvodi i pojam *mjere ugla*.

Definicija 3.4.17. Sličnost. Preslikavanje $\mathcal{P}$ lika Φ na lik Φ' zvaćemo *sličnošću* ako postoji pozitivan realan broj k takav da je za bilo koje dvije tačke X i Y lika Φ

$$\rho(\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(Y)) = k\rho(X, Y).$$



Slika 3.2: Zbir unutrašnjih uglova trougla

Drugim riječima tim preslikavanjem se svakim dvjema tačkama X i Y lika Φ dodjeljuju tačke X' i Y' lika Φ' takve da je $X'Y' = kXY$. Broj k se zove *koeficijentom sličnosti* $\mathcal{P}$. Ako postoji sličnost kojom se neki lik Φ preslikava na neki lik Φ', za ta dva lika ćemo reći da su *slični* i pisaćemo

$$\Phi \sim \Phi'.$$

Također možemo dokazati slijedeće teoreme:

Teorema 3.4.18. *Ako prava prolazi kroz tačku u unutrašnjosti kružnice, ona siječe tu kružnicu u dvjema tačkama.*

Teorema 3.4.19. *Ako kružnica prolazi kroz tačku u unutrašnjosti i kroz tački spoljašnjosti druge kružnice, ona siječe tu drugu kružnicu u dvjema tačkama.*

Teorema 3.4.20. *Zbir unutrašnjih uglova trougla ne može biti veći od zbira dva prava ugla.*

Dokaz Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji trougao ABC čiji je zbir unutrašnjih uglova veći od π. Obilježimo sa $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tačke poluprave (BC), takve da je

$$\mathcal{B}(B, C, C_1, C_2, \ldots, C_n) \quad i \quad BC \cong CC_1 \cong \ldots \cong C_{n-1}C_n,$$

a sa $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tačke sa one strane prave BC sa koje je tačka A, takve da je

$$\triangle ABC \cong \triangle A_1CC_1 \cong \triangle A_2C_1C_2 \cong \ldots \cong \triangle A_nC_{n-1}C_n,$$

vidi sliku. Tada je, na osnovu prvog stava o podudarnosti trouglova,

$$\triangle ACA_1 \cong \triangle A_1C_1A_2 \cong \ldots \cong \triangle A_{n-1}C_{n-1}A_n,$$

pa je $AA_1 \cong A_1A_2 \cong \ldots \cong A_{n-1}A_n$. Uz to je i $\angle BAC > \angle A_1CA$ jer je po pretpostavci, zbir uglova u trouglu ABC veći od π, pa je zato, (zbog činjenice da ako su ABC i A’B’C’ dva trougla kod kojih je $AB \cong A'B'$ i $AC \cong A'C'$, tada je $BC > B'C'$ ako i samo ako $\angle A > \angle A'$), $BC > AA_1$. Kako je

$$BA + nAA_1 + AC = BA + AA_1 + \ldots + A_{n-1}A_n + A_nC_n > BC_n = (n+1)BC,$$

za svaki prirodan broj n biće

$$n(BC - AA_1) < BA + AC - BC,$$

što protivrječi Arhimedovom aksiomu budući da je $BC - AA_1 > 0$. Dakle, zbir unutrašnjih uglova trougla ABC ne može biti veći od π. ∎

Teorema 3.4.21. *Ako postoji trougao kome je zbir unutrašnjih uglova π, onda je zbir unutrašnjih uglova svakog trougla takodjer π.*

Dokaz Lučić str. 176. ∎

Teorema 3.4.22. *Postoji trougao kome je zbir unutrašnjih uglova jednak π, ako i samo ako svaka prava upravna na jednom kraku bilo kojeg oštrog ugla siječe drugi krak tog ugla*

Teorema 3.4.23. *Postoji trougao kome je zbir unutrašnjih uglova mjednak π ako i samo ako za svaku tačku B i pravu a koja je ne sadrži, u njima određenoj ravni postoji jedinstvena prava b, koja sadrrži tačku B i sa a nema zajedničkih tačaka.*

Dalje ove četiri grupe aksioma dopuštaju uvođenje koordinatnog principa za pravu, ravan i prostor - dakle dopuštaju zasnivanje *analitičke geometrije*, tj.

Teorema 3.4.24. *Između uređenog skupa svih tačaka prave i uređenog skupa svih realnih brojeva, može se uspostaviti uzajamno jednoznačna korespondencija, tako da se odgovarajući elementi nalaze u istovjetnim odnosima rasporeda.*

3.5 Aksiom paralelnosti

Prije svega potsjetimo se definicije

Definicija 3.5.1. Dvije prave su *paralelne* ako pripadaju istoj ravni, a nemaju zajedničkih tačaka.

Egzistenciju paralelnih pravih je lako dokazati i to koristeći samo prve tri grupe aksioma:

Neka imamo pravu AB i tačku P na njoj. Neka je p prava koja prolazi kroz tačku P i neka su P' i P'' dvije tačke prave p, takve da je P' izmedju P i P'. Na osnovu aksioma podudarnosti, uvijek postoji prava $A'B'$ koja prolazi kroz P', takva da je

$$\angle P''P'B' \cong \angle P'PB.$$

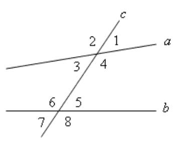
U tom slučaju ne postoji tačke S zajedničke pravim $A'B'$ i AB, jer bi u trouglu SPP' jedan spoljašnji ugao bio podudaran unutrašnjem neuporednom uglu, što je s obzirom na razultate iz Sekcije 3.3, nemoguće.

Ovim smo dokazali slijedeću

Teorema 3.5.2. *Kroz svaku tačku, koja ne pripada datoj pravoj, prolazi prava koja joj je paralelna.*

Dobro su poznati iz srednjoškolskih dana pojmovi naizmjeničnih, suprotnih i saglasnih trouglova. Na osnovu toga, prethodnu teoremu možemo formulisati i na slijedeći način:

Teorema 3.5.3. *Ako dvije prave pri presjeku sa trećom obrazuju podudarne naizmjenične ili podudarne saglasne uglove, ili je pak zbir dva suprotna ugla jednak zbiru dva prava ugla, te dvije prave su paralelne.*



Slika 3.3: Saglasni (1-5,2-6,3-7,4-8),Naizmjenični (1-7,2-8,3-5,4-6),Suprotni (1-8,2-7,3-6,4-5), Naporedni (1-2),(2-3),(3-4),(4-1)

Dakle, egzistencija paralelnih pravih je posljedica prve tri grupe aksioma. Značaj aksioma paralelnosti je u tome što ona zahtjeva

Aksiom V 3.5.4. Kroz tačku van date prave može prolaziti najviše jedna prava paralelna datoj pravoj.

S obzir na već dokazano, imamo slijedeću

Teorema 3.5.5. *Kroz tačku koja ne pripada datoj pravoj, uvijek prolazi jedna i samo jedna prava paralelna datoj pravoj.*

Definicija 3.5.6. Geometrijski sistem, koji se zasniva na 4 već data skupa aksioma i aksiomu paralelnosti 3.5.4, zove se *geometrija Euclida* ili *elementarna geometrija*. Prostor čije tačke, prave i ravni stoje u medjusobnim odnosima, tako da su zadovoljeni zahtjevi svih aksioma Hilbertovog sistema se zove *Euclidski prostor*. Tačke i prave svake ravni tog prostora zadovoljavaju zahtjeve svih navedenih aksioma; Takva ravan se naziva *Euclidska ravan*.

Medju teoremama koje su posljedice aksioma paralelnosti navodimo prije svega

Teorema 3.5.7 (Peti Euclidov postulat)**.** *Ako dvije prave pri presjeku sa trećom obrazuju suprotne uglove, čiji je zbir različit od zbira dva prava ugla, one se sijeku i to sa one strane sječice sa koje je taj zbir manji od zbira dva prava ugla.*

Dokaz Zaista, neka su AB i $A'B'$ dvije prave koje prava p siječe u tačkama P i P' respektivno. Iz aksioma podudarnosti slijedi da kroz tačku P' prolazi jedna prava, $A''B''$ recimo, takva da je zbir suprotnih uglova, koje ona i prava AB obrazuju sa pravom p, jednak zbiru dva prava ugla. S obzirom na naprijed izloženo, prava $A''B''$ je paralelna pravoj AB, a s obzirom na aksiom paralelnosti, to je i jedina prava koja prolazi kroz tačku P' a paralelna je pravoj AB.

Dakle, prava $A'B'$ mora sjeći pravu AB. Da se taj presjek mora nalaziti sa one strane prave p, sa koje je zbir suprotnih uglova manji od zbira dva prava ugla, slijedi iz Teoreme 3.4.20, prema kojoj zbir dva unutrašnja ugla trougla ne može biti veći od zbira dva prava ugla. ∎

Posljedica 3.5.8. *Peti Euclidov postulat nije samo posljedica aksioma paralelnosti, on mu je i* ekvivalentan. *Dakle ne samo da se Euclidov postulat može dokazati na osnovu aksiooma Hilbertovog sistema, nego se i aksiom paralelnosti može dokazati koristeći prve 4 grupe aksioma i V Euclidov postulat.*

Dokaz Zaista, ako se dvije prave AB i $A'B'$ koje u presjeku sa pravom p obrazuju suprotne uglove čiji je zbir različit od zbira dva prava ugla, uvijek sijeku, onda kroz tačku P' prolazi samo jedna prava koja ne siječe pravu AB (koja joj je dakle paralelna) – ona koja sa pravom AB pri presjeku sa pravom p, obrazuje suprotne uglove čiji je zbir jednak zbiru dva prava ugla. ∎

Još neki ekvivalenti aksioma paralelnosti su:

Teorema 3.5.9. *"Zbir uglova svakog trougla jednak je zbiru dva prava ugla" je ekvivalentno aksiomu paralelnosti.*

Dokaz Dokaz teoreme “Zbir uglova svakog trougla jednak je zbiru dva prava ugla” je srednjoškolski materijal, pa ćemo stoga samo dokazati obratno tvrdjenje.

Pretpostavimo dakle da su zadovoljeni svi aksiomi prve četiri grupe Hilbertovih aksioma i tvrdjenje “Zbir uglova svakog trougla jednak je zbiru dva prava ugla”.

Neka imamo pravu p i van nje tačku P. Neka je PP' normala iz P na p, a p' normalna u P na PP'. Prava p' je paralelna pravoj p. Treba dokazati da je ona i jedina takva prava koja prolazi kroz tačku P, tj da svaka druga prava PE siječe pravu p.

U tu svrhu uočimo na pravoj p tačke $A, A_1, A_2, \ldots, A_n$ takve da je

$$PP' \cong P'A, PA \cong AA_1, \ldots, PA_{n-1} \cong A_{n-1}A_n.$$

U trouglu $P'PA$ zbir uglova je $2d$, gdje sa d označavamo pravi ugao. No, taj je trougao pravougli i jednakokrak, što znači da je $\angle PAP' = d/2$.

S druge strane, $\angle PAP'$ je spoljašnji ugao trougla PAA_1. Kako je trougao PAA_1 jednakokrak, a zbir njegovih uglova je $2d$, to je $\angle PA_1A = d/(2^2)$.

Nastavljajući ovaj postupak, dobijamo da je

$$\angle PA_nA_{n-1} = \angle PA_nP' = d/(2^{n+1}).$$

Za dovoljno veliko n, taj ugao je manji od ugla δ koji prava PE zaklapa sa p'. S druge strane, u pravouglom trouglu $PP'A_n$ zbir uglova je $2d$, pa je ugao koji obrazuju prave PA_n i p' podudaran $\angle PA_nP'$. Drugim riječima, ma kako bio mali ugao δ koji prava PE obrazuje sa pravom p', kroz tačku P' uvijek prolazi neka prava koja siječe pravu p u tački G, a sa p obrazuje ugao $\eta < \delta$. Dakle, prava PE ima tačaka u unutrašnjosti trougla $PP'G$ i stoga siječe njegovu suprotnu starnicu $P'G$, tj. pravu p. Dakle, svaka prava koja prolazi kroz tačku P a različita je od prave p' siječe pravu p. QED. ∎

Teorema 3.5.10. *Tvrdjenje “Postoji trougao čiji je zbir uglova jednak zbiru dva prava ugla” je ekvivalentno aksiomu paralelnosti.*

Teorema 3.5.11. *Ako je zbir uglova jednog trougla jednak zbiru dva prava ugla, onda je zbir uglova svakog trougla jednak zbiru dva prava ugla.*

Teorema 3.5.12. *Tvrdjenje “Postoji prost četverougao (n-tougao) čiji je zbir uglova jednak zbiru četiri prava ugla (2d(n-2))” je ekvivalentno aksiomu paralelnosti.*

Teorema 3.5.13. *Tvrdjenje “Kroz svaku unutrašnju tačku oštrog ugla uvijek se može povući prava koja siječe oba kraka tog ugla” je ekvivalentno aksiomu paralelnosti.*

Teorema 3.5.14. *Tvrdjenje "Ako prave a i b sijeku pravu p, tako da je a normalna na p, a b nije, prava a i b se uvijek sijeku" je ekvivalentno aksiomu paralelnosti.*

Teorema 3.5.15. *Tvrdjenje "Kroz ma koje tri nekolinearne tačke prolazi kružnica" je ekvivalentno aksiomu paralelnosti.*

Definicija 3.5.16. Četverougao $ABCD$ se $Sakerijev$ četverougao ako su njegovi uglovi koji naliježi na stranicu AB pravi, a stranice AD i BC, susjedne stranici AB podudarne.

Teorema 3.5.17. *Srednja linija Sakerijevog četverougla je zajednička normala njegovih osnovica, a uglovi nalegli na njegovu gornju osnovicu su podudarni.*

Teorema 3.5.18. *Tvrdjenje "U ravni postoje tri kolinearne tačke koje su podjednako udaljene oda date prave" je ekvivalentno aksiomu paralelnosti.*

Poglavlje 4

Hiperbolična geometrija

Kao što je već spomenuto, Euclidska geometrija je geometrijski sistem koji se zasniva na Hilbertovom sistemu aksioma. Pojavljuje se slijedeći problem: ako se neki od Hilbertovih aksioma zamjeni tvrdjenjem koje je protivrječno uočenom aksiomu, da li tako dobijen skup aksioma obrazuje novi sistem aksioma, tj. da li se na osnovu tog skupa aksioma može izgaditi geometrijski sistem koji je neprotivrječan i potpun?

Ako postoji pozitivno rjšenje problema, novoobrazovani geometrijski sistemi se nazivaju *ne-Euclidske geometrije*.

Mi želimo pokazati da takve geometrije postoje i obratiti posebnu pažnju na neke od njih, počevši of hiperboličnog geometrijskog sistema, koji se od Euclidskog razlikuje u aksiomu paralelnosti.

4.1 Uvod u hiperboličnu geometriju

Od Euclidovih vremena pa sve do 19. vijeka ništa se suštinski nije promijenilo i mnogi pokušaji rješavanja Petog Euclidovog Postulata su ostali bezuspješni. Gauss je 1816. godine rekao :

"Malo je predmeta u području matematike o kojima se toliko pisalo koliko o nedostatku kod utvrdjivanja teorije paralela. Rijetko prodje koja godina da se ne nadje neki novi pokušaj kako bi se ta praznina ispunila. A ipak ako hoćemo da govorimo otvoreno i pošteno, ne možemo reći da sni u suštini te stvari otišli dalje od Euclida prije 2000 godina."

No nije trebalo dugo da se čeka do konačnog rasvjetljenja ovog problema, no ono je bilo u neskladu sa predrasudama koja su stoljećima sputavale generacije Euclidovih sljedbenika. Tridesetih godina 19. vijeka, Nikolaj Lobačevski i Janosz Bolyai, nezavisno jedan od drugoga, predlažu da se teorija paralelnih utemelji na aksiomi koja negira peti Euclidov postulat. Oni su izgradili teoriju koja se poslije pokazala onoliko logički valjana koliko i Euclidska geometrija.

Prvi put je zasnovana neka teorija u kojoj se ne može pozivati na očiglednost, zasnovana je geometrija u kojoj postoje tačka B i prava a koja je ne sadrži, takve da u njima odredjenoj ravni postoji više od jedne prave koja sadrži tačku B, a s pravom a nema zajedničkih tačaka (!).

Nije iznenadjujuće da njihove zamisli nisu za njihova života doživjele priznanje koje zaslužuju. Samo je Gauss razumio dubinu i dalekosežnost njihovih ideja, budući da su se one podudarale sa njegovim zamislima iz ranijih godina. Zanimljivo, Gauss je znao za radove obojice, no nije nijednog ikad upoznao s radom drugog.

4.1.1 Aksiom Lobačevskog

Zamijenimo u Hilbertovom sistemu aksioma aksiom paralelnosti sa:

Aksiom V 4.1.1. U ravni, kroz tačku B van prave a, prolaze najmanje dvije prave koje ne sijeku datu pravu.

Za tačku B i pravu a kažemo da imaju svojstvo Lobačevskog.

Kako je aksiom 4.1.1 protivrječan aksiomu paralelnosti Hilbertovog sistema aksioma, to se geometrijski sistem zasnovan na prve četiri grupe aksioma Hilbertovog sistema aksioma i aksiomu Lobačevskog 4.1.1 razlikuje od Euclidske geometrije.

Definicija 4.1.2. Geometrijski sistem zasnovan na prve četiri grupe aksioma Hilbertovog sistema, izloženih u sekcijama 3.1, 3.2, 3.3 i 3.4, i aksiomu Lobačevskog 4.1.1, naziva se *geometrija Lobačevskog* ili *hiperbolična geometrija*. Prostor čije tačke, prave i ravni stoje u medjusobnim odnosima koji zadovoljavaju zahtjeve aksioma prve četiri grupe aksioma Hilbertovog sistema i aksioma Lobačevskog se zove *hiperbolični prostor*. U svakoj ravni tog prostora tačke i prave zadovoljavaju zahtjeve gore navedeinh aksioma ; takva ravan se zove *hiperbolična ravan*.

Ako bi u hiperboličkom prostoru postojale tačka i prava koje zadovoljavaju aksiom paralelnosti 3.5.4, onda bi na osnovu teoreme 3.5.5 svaka tačka i prava koja je ne sadrži zadovoljavale isti aksiom, što protivrječi aksiomu Lobačevskog 4.1.1. Dakle, važi slijedeće tvrdjenje:

Teorema 4.1.3. *Za svaku tačku hiperboličkog prostora i pravu a koja je ne sadrži, u njima odredjenoj ravni postoje bar dvije prave koje sadrže tačku Bm a sa pravom a nemaju zajedničkih tačaka.*

Drugim rječima, postojanje implicira opštost. Stoga za svaku tačku B hiperboličnog prostora i pravu a koja je ne sadrži, poluprave s tjemenom B koje su paralelne pravoj a nisu komplementne, pa u hiperboličkoj geometriji postoje dvije prave koje sadrže tačku B i paralelne su pravoj a. Zato će i ugao paralelnosti tačke B u odnosu na pravu a biti *oštar*. Štaviše, ovo tvdjenje je ekvivalentno aksiomu Lobačevskog.

Na osnovu Legendreovih teorema 3.4.20 i 3.4.21 neposredno možemo da ustanovimo da je aksiom Lobačevskog ekvivalentan tvrdjenju da je zbir unutraqv snjih uglova bilo kog trougla manji od π. Stoga će u hipeeboličnoj geometriji spoljašnji ugao proizvoljnog trougla biti veći od sume njegovih dvaju unutrašnjih susjednih uglova.

Zbir unutrašnjih uglova bilo kojeg 4-ugla hiperbolične ravni biće manji od 2π, a zbir unutrašnjih uglova bilo kojeg prostog ravnog n-tougla hiperbolične ravni je manji od $(n-2)\pi$. Odatle slijedi i da su uglovi na protivosnovici Sakerijevog četverougla takodjer oštri.

Ovim smo dokazali slijedeću:

Teorema 4.1.4. *Slijedeći iskazi su ekvivalenti aksiome Lobačevskog:*

1. *Ugao paralelnosti je oštar.*

2. *Zbir unutrašnjih uglova svakog trougla je manji od π.*

3. *Zbir unutrašnjih uglova svakog prostog ravnog četverougla je manji od 2π.*

4. *Uglovi na protivosnovici Sakerijevog četverougla su oštri.*

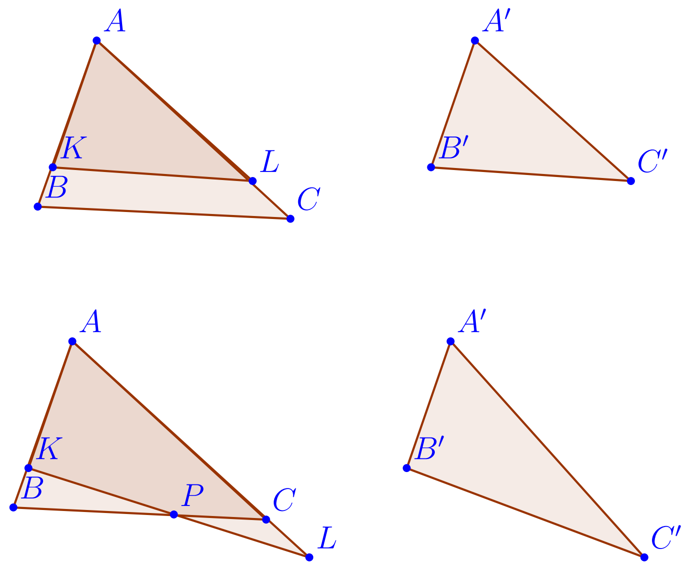
5. *Postoji prava u ravni oštrog ugla koja je upravna na jednom kraku tog ugla, a ne sječe njegov drugi krak.*

Dokaz Sve osim tačke (6) smo već adresirali, a za tačku (6) koristimo Legendreove teoreme - vidi Lučic poglavlje 23. ∎

Podudarnost trouglova

U apsolutnoj geometriji bilo je moguće dokazati pet stavova o podudarnosti trouglova. Pored pet navedenih stavova, u hiperboličkoj geometriji će važiti još jedan, takozvani *šesti stav o podudarnosti trouglova* kojim se karakteriše hiperbolički prostor.

Teorema 4.1.5. *Dva trougla su podudarna ako i samo ako su im odgovarajući uglovi medjusobno podudarni.*



Dokaz Pretpostavimo da su uglovi kod tjemena A, B, C trougla ABC podudarni redom uglovima kod tjemena A', B', C' trougla $A'B'C'$m a da ivice AB i $A'B'$ nisu medjusobno podudarne, već da je jedna od njih veća od druge. Ako je, npr. $AB > A'B'$, tada izmedju tačaka AB postoji tačka K takva da je $AK \cong A'B'$. Neka je L tačka poluprave (AC) takva da je $AL \cong A'C'$. Tada je na osnovu prvog stava o podudarnosti trouglova, $\triangle AKL \cong \triangle A'B'C'$, pa su uglovi kod tjemena K i L trougla AKL podudarni uglovima kod tjemena B i C trougla ABC.

Ako bi tačke A i L bile s iste strane prave BC, onda bi u četverouglu $BCLK$ zbir unutrašnjih uglova bio 2π, što je nemoguće. Ako tačke A i L ne bi bile sa iste strane prave BC, onda bi duž $[KL]$ sjekla duž $[BC]$ u tački P (koja ne mora biti različita od C, dakle ni od L), pa bi u trouglu BPK spoljašnji ugao kod tjemena K bio podudaran unutrašnjem uglu kod tjemena B, što je takodjer nemoguće. Dakle, nije $AB > A'B'$. Na isti način nije ni $AB < A'B'$, pa je $AB \cong A'B'$. Stoga su, na osnovu drugog stava o podudarnosti, trouglovi ABC i $A'B'C'$ medjusobno podudarni. ∎

Pretpostavimo da je $\mathcal{P}$ sličnost kojom se duž AB preslikava na duž $A'B'$. Ako se tom sličnošću tačka C koja ne pripada pravoj AB preslikava u tačku C, tada će uglovi trouglova ABC i $A'B'C'$ biti podudarni, pa će, na osnovu prethodne teoreme, biti $AB \cong A'B'$. Ovim smo dokazali slijedeću

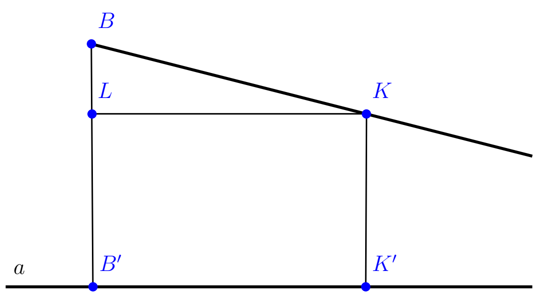
Posljedica 4.1.6. *U hiperboličkoj geometriji svaka sličnost je podudarnost (!).*

4.2 Paralelnost i hiperparalelnost

4.2.1 Paralelne prave

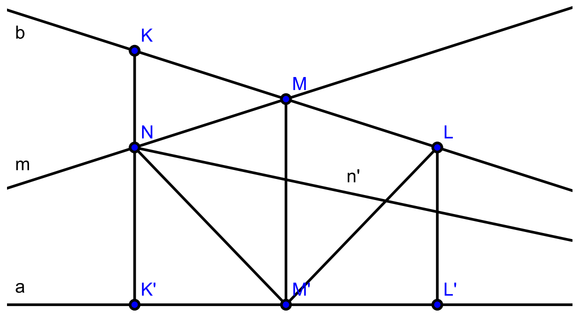
. Već u apsolutnoj geometriji jebilo moguće dokazati osnovne osobine paralelnih pravih, prije svega transmisibilnosti, simetrišnosti i tranzitivnosti relacije paralelnosti. Hiperboličku geometriju karakterišu neke osobine paralelnih pravih kojima se ona bitno razlikuje od Euclidske geometrije. U Euclidskoj geometriji koplanarne prave su bile paralelne ako i samo ako su disjunktne, a svaka ekvidistanta je bila prava. U hiperboličkoj geometriji osobine pravih se suštinski razlikuju od navedenih.

Teorema 4.2.1. *Ako je B tjeme proizvoljne poluprave paralelne nekoj pravoj a, K proizvoljna tačka te poluprave, a B' i K' podnožja upravnih iz B i K na pravoj a, onda je $KK' < BB'$.*



Dokaz Neka je tačka poluprave (B'B) takva da je $LB' \cong KK'$. Budući da su u četverouglu $B'K'KL$ uglovi kod tjemena B' i K' pravi, a ivice LB' i KK' medjusobno podudarne, uglovi kod tjemena K i L biće medjusobno podudarni (teorema 3.5.17) i oštri (teorema 4.1.4). Kako je uz to ugao BKK' tup jer je njemu naporedni ugao oštar, tačka L pripada uglu BKK', dakle i duži BB'. Stoga je $KK' \cong LB' < BB'$. ∎

Teorema 4.2.2. *Ako su a i b medjusobno paralelene prave, a l proizvoljna duž, tada na pravoj b postoji jedinstvena tačka L kojoj je L' podnožje upravne na pravoj a takva da je $LL' \cong l$.*



Dokaz Neka je K proizvoljna tačka prave b, K' njena upravna projekcija na pravoj a a N tačka poluprave $(K'K)$ takva da je $NK' \cong l$. Pretpostavimo da su tačke K i N medjusobno različite, budući da bi u suprotnom, dokaz teoreme bio završen.

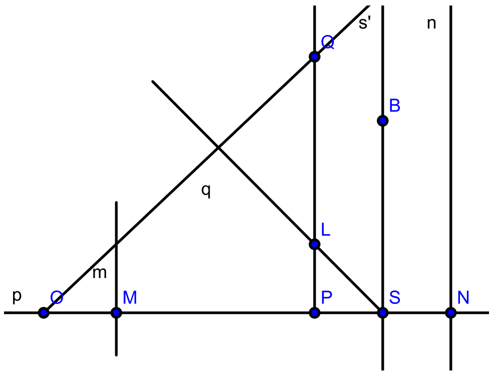
Obilježimo sa n' polupravu čije je tjeme N, paralelnu pravama a i b, a sa m pravu koja ne sadrži n' a paralelna je pravoj a. Prava m siječe b jer je $n'||b$. Ako je M presjek pravih m i b, a M' podnožje upravne iz M na pravoj a, L tačka prave b takva da su $ML \cong MN$, a L' podnožje upravne iz L na a, onda su trouglovi MNM' i MLM' podudarni jer su simetrični u odnosu na pravu MM', pa su i trouglovi $NK'M'$ i $LL'M$ podudarni iz istog razloga. Dakle, $LL' \cong NK' \cong l$.

Jedinstvenost tačke L se dokazuje direktnom primjenom teoreme 4.2.1. ∎

Teorema 4.2.3. *U hiperboličkoj ravni jedistvena prava upravna na jednom kraku, a paralelna sa drugim krakom oštrog ugla.*

Dokaz Ako bi svaka prava upravna na jednom kraku oštrog ugla Opq sjekla drugi krak, onda bi, na osnovu jedne od Legendreove teoreme, u hiperboličkoj ravni postojao trougao kome je zbir uglova π, što je nemoguće. Stoga tačke poluprave p možemo da podijelimo u dva skupa $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, takva da za svaku tačku M skupa $\mathcal{M}$, prava m koja je upravna na p siječe q, a za svaku tačku N skupa $\mathcal{N}$ prava n koja je u tački N upravna na p, nema zajedničkih tačaka sa polupravom q. Primjetimo da su skupovi $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ neprazni i da svaka tačka poluprave p pripada jednom od njih.

Budući da se jednostavno dokazuje da između tačaka jednog od tih skupova nema tačaka drugog, ispunjeni su uslovi Dedekindove teoreme za poluprave, pa postoji jedinstvena tačka S koja razdvaja skupove $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$. Ta tačka pripada skupu $\mathcal{N}$, jer bi u suprotnom, prava s koja je u tački S upravna na p sjekla q u nekoj tački R pa, ako bi T bila tačka takva da je $\mathcal{B}(O, R, T)$, prava t koja sadrži T i upravna je na p, sjekal bi polupravu p u tački T' takvoj da je $\mathcal{B}(O, S, T')$. Odatle bi slijedilo da dačka S ne razdvaja skupove $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$.



Dakle, prava s je upravna na p i nema zajedničkih tačaka sa polupravom q. Obilježimo sa s' onu od polupravih na koje S razlaže pravu s, koja je sa one strane prave OS sa koje je poluprava q, i dokažimo da je $q||s'$. Neka je L proizvoljna tačka u konveksnom uglu čiji su kraci (SO) i s'. Ako je L van oštrog ugla pq, neposredno se dokazuje da (SL) siječe q. Stoga pretpostavimo da L pripada uglu $\angle pq$ i sa P obilježimo podnožje upravne iz L na p. Kako je OSL oštar ugao, tačka P pripada duži OS, pa zato prava PL siječe q u nekoj tački Q. PRava SL pripada ravni trougla OPQ, siječe njegovu PQ, a ne siječe ivicu OP, pa, na osnovu Paschovog aksioma[1], siječe ivicu OQ. Dakle, (SL) siječe q, pa je $q||s'$. ∎

Teorema 4.2.4. *Ako su prave a i b medjusobno paralelne, upravna projekcija jedne na drugu je otvorena poluprava.*

Dokaz Vježba - pomoć koristiti prethodnu teoremu. ∎

4.2.2 Hiperparalelne prave

U hiperboličnoj ravni poluprave p' i q' koje sadrže proizvoljnu tačku A i paralelne su nekoj pravoj a kojoj ne pripada tačka A, nisu komplementne, pa prava a pripada konveksnom uglu $p'q'$. Stoga prave p i q koje sadrže poluprave p' i q' respektivno, razlažu ravan kojoj pripadaju na dva para unakrsnih uglova. Sve prave koje sadrže tačku A i pripadaju onom paru unakrsnih uglova kojem pripada i prava a sijeku tu pravu. One prave koje ne pripadaju tom paru unakrsnih uglova sa pravom a nemaju zajedničkih tačaka. Budući da takvih pravih ima neograničenom mnogo, imamo slijedeće tvrdjenje:

[1]Prisjetimo se - Paschov aksiom je posljednji aksiom rasporeda II6

Teorema 4.2.5. *U hiperboličnoj ravni postoji neograničeno mnogo pravih koje sarže proizvoljnu tačku A, a sa nekom pravom a kojoj ne pripada tačka A nemaju zajedničkih tačaka.*

Za sva prave hiperbolične ravni koje sadrže tačku A, ne sijeku pravu a i nisu paralelne toj pravoj, reći ćemo da je *hiperparalelne* pravoj a. Ako je b' proizvoljna poluprava koja pripada pravoj b i za nju ćemo reći da je hiperparalelna pravoj a.

U hiperboličnoj geometriji važe osobine transmisibilnosti i simetričnosti relacije hiperparalelnosti pravih, odnosno imamo slijedeća sva rezultata:

Teorema 4.2.6. *Ako poluprava m' sadrži polupravu n', tada je jedna od tih polupravih hiperparalelna pravoj a ako i samo ako joj je hiperparalelna i druga.*

Teorema 4.2.7. *Ako je prava c hiperparalelna pravoj b, onda je i prava b hiperparalelna pravoj c.*

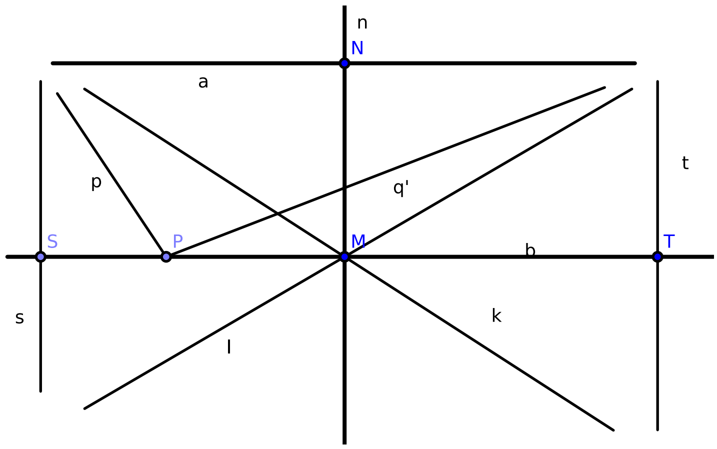
Dakle možemo reći da su dvije prave *medusobno hiperparalelne*.

Neposredno se može provjeriti da tranzitivnost ne vrijedi, jer dvije prave koje sadrže neku tačku B i hiperparalelne su pravoj a nisu medusobno hiperparalelne.

Dvije prave upravne na trćoj medusobo su hiperparalelne. DOkažimo da vrijedi i obratno:

Teorema 4.2.8. *Postoji jedinstvena prava upravna na dvjema medusobno hiperparalelnim pravama.*

Dokaz Neka su a i b medjusobno hiperparalelne prave, P proizvoljna tačka prave b, a p' i q' poluprave sa zajedničkim tjemenom P paralelne pravoj a. Na osnovu teoreme 4.2.3, postoje jedinstvene prave s i t, u tačkama S i T upravne na pravoj b, koje su paralelne polupravama p' i q'.



Neka je M središte duži ST, n prava koje sadži M i upravna je u tački N na pravoj a. Neka su k i l prave koje sadže M, takve da je k paralelna pravama a i s, a l pravama a i t. Centralnom simetrijom $\mathcal{S}_M$ svaka od pravih k i l se preslikava na sebe, prave s i t jedna na drugu. Stoga su prave k i l paralelne i pravoj s i pravoj t, pa je prava b osa refleksije kojom se prave k i l preslikavaju jedna na drugu. Kako se i osnom refleksijom $\mathcal{S}_n$ prave k i l preslikavaju jedna na drugu jer su obje paralelne pravoj a, prave b i n će biti međusobno upravne.

Ako bi pored prave n još neka prava m bila upravna i na pravoj a i na pravoj b, onda bi te dvije prave bile disjunktne jer bi u protivnom iz njihove predječne tačke postojala dvije upravne na pravoj a. Tada bi svaki od uglova četverougla čije ivice pripadaju pravama a, m, b, n bio prav, što je nemoguće.

∎

Iz dokaza prethodne teoreme direktno slijedi da je upravna projekcija prave a na pravoj b otvorena duž ST. Dakle:

Teorema 4.2.9. *Ako su prave a i b hiperparalelne, upravna projekcija jedne na drugu je otvorena duž.*

4.2.3 Izometrije hiperboličke ravni

Već u apsolutnoj geometriji je bilo moguće utvrditi da su osna i klizna refleksija jedine indirektne izometrije ravni. U hiperboličkoj, kao i u Euclidskoj geometriji možemo da klasifikujemo direktne izometrije.

Ako su dvije hiperbolične ravni ne sijeku, onda su one ili međusobno paralelne ili hiperparalelne. Stoga, ako nije ni rotacija ni translacija, direktna izometrije hiperbolične ravni je kompozicija osnih refleksija u odnosu na dvije međusobno paralelne prave. Takvu trasformaciju zovemo *paralelnim pomjeranjem*.

Teorema 4.2.10. *Ako nije identičnost, direktna izometrija hiperbolične ravni je ili rotacija, ili translacija ili paralelno pomjeranje.*

Istaknimo još jednom da su sve izometrije hiperbolične ravni: identičnost, osna refleksija, rotacija, traslacija, paralelno pomjeranje i klizajuća refleksija.

4.2.4 Prave i ravni u hiperboličnom prostoru

Ako prava p sa ravni π nema zajedničkih tačaka, tada je ona paralelne pravoj p' koja sadrži njenu upravnu projekciju na π, ili je sa tom pravom hiperparalelna. Tada isti odnos prava p ima sa ravni π.

Iz definicija i teorema 4.2.4 i 4.2.9 neposredno slijedi da je upravna projekcija prave p koja je paralelna ravni π, na toj ravni otvorena poluprava, a da je njena projekcija na π otvorena duž ako je prava p hiperparalelna ravni π. Ako prava p

ne pripada ravni π već je siječe, njena projekcija na π će biti tačka ako je prava upravna na π, a otvorena duž ako nije.

Teorema 4.2.11. *Postoji jedinstvena prava upravna na dvjema međusobno hiperparalelnim ravnima.*

Dokaz Neka su α i β dvije međusobno hiperparalelne ravni, neka je γ ravan upravna tim dvjema ravnima i neka su a i b prave duž koji γ siječe redom α i β. Kako su ravni α i β međusobno hiperparalelne, takve će biti i prave a i b pa, na osnovu teoreme 4.2.8, postoji jedinstvena prava n koja je u tačkama M i N upravna na pravama a i b. Budući da pripada ravni γ koja je upravna na ravnima α i β i upravna je na pravama a i b duž kojih ravan γ siječe ravni α i β, prava n je upravna i na ravni α i na ravni β.

Ako bi pored n i prava n' bila upravna u tačkama M' i N', na ravnima α i β, svi uglovi ravnog četverougla $MNN'M'$ bi bili pravi, što je u hiperboličkoj geometriji nemoguće. ∎

Primjedba 4.2.12. Svaka ravan γ' koja je upravna i na α i na β će sadržavati pravu n.

Teorema 4.2.13. *Broj pravih neke ravni α koje sadrže neku tačku A te ravni i paralelne su nekoj ravni π, nije veći od dve. Štaviše , taj broj će biti 2, 1 ili 0 ako i samo ako se ravni α i π, redom, sijeku, paralelne su ili su hiperparalelne.*

Dokaz Ako se ravni α i π sijeku duž neke prave p i ako tačka A ne pripada p, tada postoje dvije prave koje sadrže A i paralelne su pravoj p, pa su stoga paralelne i ravni π. Kako je prava koja sadrži A paralelna pravoj p ako i samo ako je paralelna ravni π, postoje samo dvije prave koje sadrže A i paralelne su ravni π. Važi i obratno, ako postoje dvije prave a i b ravni α koje sadrže tačku A te ravni i paralelene su ravni π, tada se ravni α i π sijeku.

Zaista, ako su a' i b' upravne projekcije pravih a i b na ravni π, a p prava te ravni paralelna polupravama a'' i b'' koje pripadaju pravima ai b, a paralelne su pravama a i b, tada prave a, b, p pripadaju jednoj ravni, pa se ravni α i π sijeku duž prave p.

Ako su ravni α i π hiperparalelne i ako je ravan σ koaj sadrži A upravna na objema, tada se prava koja sadrži A i paralelna je π, budući da ne pripada ravni σ, refleksijom u odnosu na tu ravan preslikava na pravu c koja je paralelna ravni π. Stoga postoje dvje prave koje sadrže A i paralelne su sa π, što je nemoguće.

Dakle, ako su ravni α i π hiperparalelne, nema pravih u ravni α koje sadrže A i paralelne su sa π. Obratno, ako u ravni α nema pravih koje sadrže A i paralelne su sa π, tada se te dvije ravni ne mogu sjeći, jer bi tada u ravni α postojale dvije prave paralelne ravni π, a ne mogu biti ni paralelne budući da u svakoj tački jedne od dvaju paralelnih ravni postoji prava koja je paralelna drugoj.

Ako su ravni α i π paralelne, ravan σ koja sadrži A i upravna je na ravnima α i π siječe α i π duž pravih koje su paralelne, pa stoga postoji prava a ravni α, koja sadrži A i paralelna je ravni π. Ako bi postojala još jedna prava b ravni α koja sadrži A i paralelna je ravni π, tada bi se, na osnovu prethodnog, ravni α i π sjekle. Dakle, ako su ravni α i π paralelne, u ravni α postoji jedinstvena prava koja sadrži neku tačku te ravni i paralelna je ravni π. Obratno, ako u ravni α postoji jedinstvena prava koja sadrži tačku A te ravni i paralelna je π, tada se ravni α i π ne sijeku, a nisu ni hiperparalelne, pa su stoga, paralelne. ∎

4.3 Asimptotski poligoni i poliedri

4.3.1 Poligoni sa nesvojstvenim tjemenima

Ako dopustimo da dvije susjedne ivice poligona ne budu duži, već dvije međusobno paralelne poluprave, dobijeni lik ćemo zvati *nesvojstvenim poligonom sa jednim nesvojstvenim tjemenom*. Dopustićemo da poligon ima i više nesvojstvenih tjemena, a nećemo isključiti ni mogućnost da dva susjedna tjemena poligona budu nesvojstvena. Poligon koji ima bar jedno nesvojstveno tjeme zvaćemo *nesvojstvenim* ili *asimptotskim poligonom*. Pretpostavićemo da je mjera ugla kod nesvojstvenog tjemena nula.

Asimptotski trougao može imati jedno, dva ili tri nesvojstvena tjemena. Izdvojićemo nekoliko svojstava takvih trouglova koja su analogna nekim već poznatim stavovima iz geometrije trougla.

Teorema 4.3.1. *Spoljašnji ugao α' kod svojstvenog tjemena A trougla kome je tjeme N nesvojstveno, veći je od unutrašnjeg ugla β kod svojstvenog tjemena B tog trougla.*

Dokaz Ako bi uglovi α' i β bili međusobno podudarni, prava koja sadrži središte duži AB i upravna je na pravoj BN, bila bi upravna i na AN, što je nemoguće, jer bi tada poluprave AN i BN bile hiperparalelne.

Ako bi bilo $\alpha' < \beta$, u uglu β bi postojala poluprava p sa tjemenom B koja sa polupravom BA zahvata ugao podudaran uglu α'. Kako je $(BN)||(AN)$, poluprava p bi sjekla (AN) u nekoj tački P, pa bi u trouglu ABP spoljašnji ugao kod tjemena A bio jednak unutrašnjem uglu kod tjemena B, što je nemoguće. Dakle, $\alpha' > \beta$. ∎

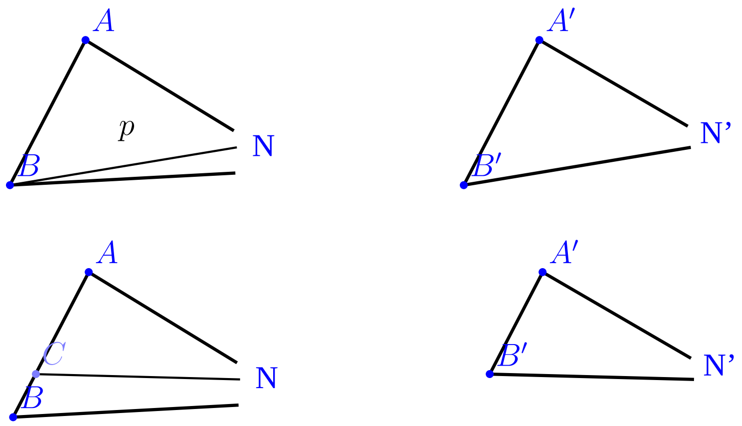
Drugim riječima, zbir unutrašnjih uglova nekog nesvojstvenog trougla je manji od π.

Teorema 4.3.2. *Trouglovi ABN i $A'B'N'$ sa nesvojstvenim tjemenima N i N' su međusobno podudarni ako i samo ako su*

- *(a) međusobno podudarni uglovi A i A' i ivice AB i $A'B'$,*
- *(b) uglovi A i B podudarni uglovima A' i B'.*

Dokaz

- (a) Ako pretpostavimo da trouglovi ABN i $A'B'N'$ nisu međusobno podudarni, već da je jedan od uglova B i B', recimo B, veći od drugoga, tada bi poluprava p sa tjemenom B koja sa polupravom (BA) zahvata ugao podudaran uglu B', bila paralelna polupravoj (AN), pa bi postojale dvije poluprave sa zajedničkim tjemenom B, paralelne polupravoj (AN).



- (b) Ako bi jedna od ivica AB i $A'B'$, recimo ivica AB bila veća od druge, tada bi postojala tačka C duži AB takva da je $AC \cong A'B'$ i jedinstvena poluprava (CN) paralelna svakoj od ivica (AN) i (BN). U tom slučaju bi asimptotski trouglovi ACN i $A'B'N'$ bili podudarni, pa bi u asimptotskom trouglu CBN spoljašnji ugao kod tjemena C bio podudaran unutrašnjem uglu kod tjemena B, što je nemoguće.

∎

Budući da prethodna teorema vrijedi i u posebnom slučaju kad je jedan od asimptotskih trouglova pravougli, neposredno se pokazuje da važi i slijedeće tvrđenje:

Teorema 4.3.3. *Ako su ABN i $A'B'N'$ asimptotski trouglovi sa nesvojstvenim tjemenima N i N' i pravim uglovima kod tjemena B i B', tada su uglovi A i A' toh dvaju trouglova međusobno podudarni ako i samo ako je $AB \cong A'B'$.*

Refleksijom u odnosu na pravu koja sadrži jedino svojstveno tjeme A asimptotskog trougla AMN i upravna je na naspramnoj ivici MN tog trougla, trougao AMN se preslikava na trougao ANM. Stoga, iz prethodne dvije teoreme slijedi:

Teorema 4.3.4. *Dva asimptotska trougla AMN i $A'M'N'$ sa nesvojstvenim tjemenima M, N, M', N', su podudarna ako i samo ako su im uglovi A i A' međusobno podudarni.*

Da bismo dokazali da postoji trougao kome su sva tri tjemena nesvojstvena, pretpostavimo da su a i b dvije međusobno paralelne prave. Iz dokaza teoreme 4.2.4, slijedi da postoji prava n upravna na pravoj b, a paralelna pravoj a. Refleksijom $\mathcal{S}_n$ prava b se preslikava na sebe, a prava a na neku pravu c paralelnu i pravoj a i pravoj b. Prave a, b, c će biti ivice asimptotskog trougla kome su sva tjemena nesvojstvena. Budući da prava n razlaže taj trougao na dva asimptotska trougla, kojima su uglovi kod jedinih tjemena pravi, iz prethodne teoreme slijedi da važi:

Teorema 4.3.5. *Bilo koja dva trougla kojima su sva tjemena nesvojstvena su međusobno podudarni likovi.*

Prave upravne na jednoj, a paralelne drugim dvjema ivicama nekog asimptotskog trougla kome su sva tri tjemena nesvojstvena, sjeku se u nekoj tački S koja se naziva *središtem* tog trougla. Poluprave sa tjemenom S koje su paralelne ivicama tog trougla razlažu ravan kojoj pripadaju na tri međusobno podudarna ugla. Svaki od trouglova ABC kojima su tjemena na trima polupravama takva da je $SA \cong SB \cong SC$ je pravilan.

4.3.2 Funkcija Lobačevskog

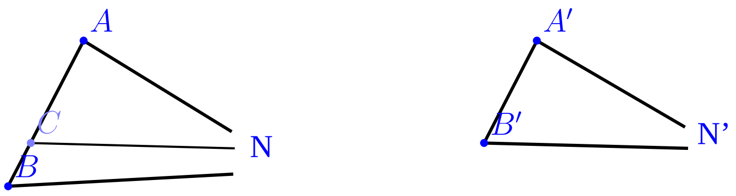
Zahvaljujući teoremi 4.3.3, možemo definisati funkciju kojom svakoj duži AB mjere x dpdjeljujemo ugao A mjere $\Pi(x)$. Tu funkciju koja skup $\mathbb{R}^+$ nenegativnih realnih brojeva preslikava u interval $[0, \pi/2)$, nazivamo *funkcijom Lobačevskog*.

Teorema 4.3.6. *Ako je A' tačka poluprave (BA), onda je $A'B > AB$ ako i samo ako je $\Pi(A'B) < \Pi(AB)$.*

Dokaz Neka je N zajedničko tjeme trougova ABN i $A'BN$ kojima je zajednički ugao B prav. Ako je $A'B > AB$, iz teoreme 4.3.1 primjenjene na asimptotski trougao $AA'N$ slijedi da je $\Pi(A'B) < \Pi(AB)$.

Obratno, ako je $\Pi(A'B) < \Pi(AB)$, onda ne može biti ni $A'B \cong AB$ zbog teoreme 4.3.3, ni $A'B < AB$ zbog teoreme 4.3.1. ∎

Dakle, funkcija $\Pi(x)$ opada od $\pi/2$ do 0 kad x raste od 0 do ∞.



4.3.3 Poliedri sa nesvojstvenim tjemenima

Ako dopustimo da pljosni nekog poliera budu poligonske površi sa nesvojstvenim tjemenima, dobijeni lik ćemo zvati *asimptotskim poliedrom*. Kao i u slučaju poligona ivice asimptotskog poliedra moći će da budu poluprave ili prave u zavisnosti od toga da im je samo jedno tjeme nesvojstveno ili oba.

Pretpostavimo da je S središte nekog pravilnopg poliedra, a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ poluprave sa tjemenom S koje sadrže tjemena tog poliedra. Asimptotski poliedar kome su ivice prave paralelne parovima polupravih skupa $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ koje sadrže susjedna tjemena bilo koje pljosni tog poliedra zvaćemo *pravilnim asimptotskim poliedrom*. Budući da su pravilan tetraedar pravilan heksaedar, pravilan oktaedar, pravila dodekaedar i pravilan ikosaedar jedini pravilni poliedri apsolutnog prostora, svakom od njih će odgovarati jedan pravilan asimptotski poliedar hiperboličkog prostora.

4.4 Modeli hiperboličke ravni i prostora

4.4.1 Poincareov disk model

Neka je zadat prizvoljan krug Euclidske ravni.

Nazovimo taj krug *apsolutom*, njegovu unutrašnjost *h-ravni*, a svaku tačku h-ravni, nazovimo *h-tačkom*.

Ako je proizvoljan krug (ili prava) Euclidske ravni upravan na apsoluti, njegov presjek sa h-ravni nazovimo *h-pravom*.

Tačke u kojima taj krug (ili prava) siječe apsolutu zvaćemo *krajevima* te h-prave.

Svaki segment kruga (ili duž prave) koji je upravan na apsoluti, čija tjemena pripadaju h-ravni, nazvaćemo *h-duži*, a segment toga kruga čije je jedno tjeme na apsoluti, a drugo pripada h-ravni, nazvaćemo *h-polupravom*.

Prvo od tih tjemena zvaćemo $krajem$, a drugo $tjemenom$ h-poluprave.

Neposredno se provjerava da h-prava razlaže h-ravan na dvije oblasti koje zovemo h-poluravnima. Tu h-pravu zvaćemo *rubom poluravni*.

Dvije h-poluprave koje imaju zajedničko tjeme razlažu h-ravan na dvije oblasti koje nazivamo *h-uglovima*, a te dvije poluprave nazivamo *kracima* tog *h-ugla*.

Ako su A, B, C tri h-tačke koje ne pripadaju jednoj h-pravoj, tada skup koji čine duži AB, BC, AC nazivamo *h-trouglom*, a analogno definišemo pojam ugla h-trougla. Ovaj proces možemo produžiti da obuhvati h-poligonske linije, h-poligone, ugao h-poligona, h-poligonske površi, h-triangulacije, itd.

Inverzijom u odnosu na krug k upravan na apsoluti ili refleksijom u odnosu na pravu k upravnu na apsoluti, h-ravan se preslikava na sebe. Restrikciju te inverzije na h-ravan zvaćemo h-refleksijom.

Osom te h-refleksije zvat ćemo h-pravu koja pripada krugu (ili pravoj) k. Svaka poluravan kojoj je rub osa neke h-refleksije tom h-refleksijom se preslikava na njoj komplementnu h-poluravan.

Uvođenju pojma h-podudarnosti prethodi nekoliko rezultata koji se odnose na refleksije

Teorema 4.4.1. *Za dvije razne h-tačke A i B postoji jedinstvena h-refleksija kojom se te dvije tačke preslikavaju jedna na drugu.*

Dokaz Lučić str. 279-280. ∎

Teorema 4.4.2. *Ako se dvije h-prave sijeku, tada postoje dvije h-refleksije kojima se one preslikavaju jedna na drugu, a ako su disjunktne, tada postoji jedinstvena h-refleksija kojom se one preslikavaju jedna na drugu.*

Dokaz Neka su k i k' krugovi koji sadrže zadate h-prave. Ako su zadate prave disjunktne i krugovi k i k' su disjunktni ili se dodiruju u tački koja pripada apsoluti. Stoga postoji inverzija kojom se ti krugovi preslikavaju jedan na drugi.

Kako krug inverzije pripada pramenu kojem pripadaju k i k', on će biti upravan na apsoluti. Dakle, postoji jedinstvena h-refleksija kojom se zadate prave preslikavaju jedna na drugu.

Ako se krugovi k i k' sijeku, tada postoje dvije inverzije kojima se ti krugovi preslikavaju jedan na drugi, pa postoje i dvije h-refleksije kojima se zadate prave preslikavaju jedna na drugu.

Osa jedne od tih dvaju h-refleksija pripada krugu s upravnom na apsoluti, čije je središte presjek zajedničkih tangenti krugova k i k', a osa druge h -refleksije pripada krugu s' koji sadrži presječne tačke krugova k i k' i upravan je na krugu s. ∎

Iz prethodna dva rezultata diketno slijedi

Teorema 4.4.3. *Postoji jedinstvena h-refleksija kojom se dvije h-poluprave sa zajedničkim tjemenom preslikavaju jedna na drugu.*

Za h-tačku koja se razliku od dvaju tačaka A i C reći ćemo da je ***h-između*** tih dviju tačaka i pisaćemo

$$\mathcal{B}_h(A, B, C)$$

ako h-tačka B pripada h-duži AC. Za par tačaka (A, B) reći ćemo da je $h-podudaran$ paru h-tačaka (C, D) i pisaćemo

$$(A, B) \cong^h (C, D)$$

ako postoji niz h-refleksija čiji proizvod preslikava par (A, B) na par (C, D). Proizvod tih h-refleksija zvaćemo ***h-podudarnošću*** ili ***h-izometrijom h-ravni***.

Teorema 4.4.4. *Zbir unutrašnjih uglova proizvoljnog h- trougla je manji od π.*

Dokaz Ako je ABC h-trougao i O središte apsolute, tada postoji h-refleksija kojom se tačka A preslikava na O, a tačke B i C na D i E respektivno.

Tom refleksijom se uglovi h-trougla ABC preslikavaju na njima podudarne uglove h-trougla ODE, a h-duži AB i AC se preslikavaju na h-duži OD i OE koje pripadaju prečnicima apsolute.

Kako su uglovi kod tjemena D i E h-trougla manji od uglova kod istih tjemena (euklidskog) trougla ODE, zbir unutrašnjih uglova h-trougla ODE bit će manji od π. Stoga će i zbir uglova h-trougla ABC biti manji od π. ∎

Teorema 4.4.5. *h-ravan je model hiperboličke ravni.*

Dokaz Dokažimo najprije da pojmovi h-tačke, h-prave, h-između i h-podudarnosti parova tačaka zadovoljavaju sve aksiome apsolutne planimetrije.

Budući da svaki krug sadrži bar dvije tačke i da postoji jedinstven krug upravan na apsoluti koji sadrži dvije razne tačke, biće zadovoljene tri aksioma pripadanja: svaka h-prava sadrži najmanje dvije razne h-tačke; postoji najmanje jedna h-prava koja sadrži dvije h-tačke; postoji najviše jedna h-prava koja sadrži dvije razne h-tačke.

Ako tačke jedne h-prave nazovemo h-kolinearnim, a tačke koje ne pripadaju jednoj h-pravoj h-nekolinearnim, tada h-ravan sadrži najmanje tri h-nekolinearne tačke. Stoga je zadovoljen i posljednji planimetrijski aksiom prve grupe.

Neposredno se provjerava da su zadovoljene i prvi aksiomi rasporeda, jer: ako je $\mathcal{B}_h(A, B, C)$, tada su A, B, C tri razne h-nekolinearne tačke; ako je $\mathcal{B}_h()A, B, C)$, tada je $\mathcal{B}_h(C, B, A)$.

Ako je $\mathcal{B}_h(A, B, C)$, tada nije $\mathcal{B}_h(A, C, B)$.

Ako su A, B dvije razne $h-$tačke, tada postoji h-tačka C takva da je $\mathcal{B}_h(A, B, C)$.

Ako su A, B, C tri razne h-kolinearne tačke, tada je ili $\mathcal{B}_h(A, B, C)$ ili $\mathcal{B}_h(B, C, A)$ ili $\mathcal{B}_h(C, A, B)$.

Nije teško provjeriti da važi i Paschov aksiom: ako su A, B, C tri h-nekolinearne tačke i ako je p h-prava koja ne sadrži h-tačku A i siječe prave BC u tački P takvoj da je $\mathcal{B}_h(B, P, C)$, tada tačka A pripada ili onoj h-poluravni sa rubom p kojoj pripada i tačka B ili onoj h-poluravni kojoj pripada tačka C.

h-prava p će sjeći h-pravu CA u h-tački Q takvoj da je $\mathcal{B}_h(C, Q, A)$ ili h-pravu AB u h-tački R takvoj da je $\mathcal{B}_h(A, R, B)$.

Iz definicije h-podudarnosti neposredno slijedi da važi prvi aksiom treće grupe: ako su A, B, C, D h-tačke takve da je $(A, B) \cong^h (C, D)$ i $A = B$, tada je $C = D$.

Relacija h-podudarnosti zadovoljava drugi aksiom budući da za zadate h-tačke A, B postoji h-refleksija kojom se te dvije h-tačke preslikavaju jedna na drugu (teorema 4.4.1).

Dakle, ako su A i B bilo koje dvije h-tačke, tada je $(A, B) \cong^h (B, A)$. Kako je svaka inverzija involucija, treći aksiom se direktno provjerava: ako su A, B, C, D, E, F h-tačke takve da je $(A, B) \cong^h (C, D)$ i $(A, B) \cong^h (E, F)$, tada je i $(C, D) \cong^h (E, F)$.

Da bismo dokazali da važi peti aksiom podudarnosti, pretpostavimo da su A, B dvije razne h-tačke, a da je C tjeme neke h-poluprave c. Tada, na osnovu teoreme 4.4.1, postoji jedinstvena h-refleksija kojoj se tačka A preslikava u tačku C.

Neka se tom h-refleksijom h-poluprava AB preslikava na neku h-polupravu e, a tačka B u tačku E te poluprave.

Kako postoji h-refleksija kojom se h-poluprave c i e preslikavaju jedna na drugu, tom h-refleksijom se h-tačka E preslikava u neku h-tačku D. Dakle, ako su A i B dvije razne h-tačke i C-tjeme neke h-poluprave, tada na toj h-polupravoj postoji h-tačka D takva da je $(A, B) \cong^h (C, D)$.

Štaviše, tačka D je jedinstvena (vježba).

Dokažimo da važi i šesti aksiom podudarnosti. U tom cilju, pretpostavimo da se uređeni par (A, B) preslikava nekom h-podudarnošću na uređeni par (A', B'). Ako se h-tačka C koja ne pripada h-pravoj AB preslikava tom h-podudarnošću u h-tačku C', tada je $(A, C) \cong^h (A', C')$ i $(B, C) \cong^h (B', C')$.

U h -poluravni sa rubom $A'B'$, kojoj pripada C' postoji jedinstvena h-tačka koja zadovoljava te uslove jer h-podudarnost čuva h-uglove budući da ih čuva svaka inverzija (i refleksija).

Dakle, $(A, B) \cong^h (A', B')$, $(B, C) \cong^h (B', C')$ i $(C, A) \cong^h (C', A')$, tada postoji h-izometrija koja uređenu trojku (A, B, C) preslikava na uređenu trojku (A', B', C'). Štaviše, ta izometrija je jedinstvena.

Da bismo dokazali i sedmi aksiom podudarnosti, pretpostavimo da su A, B, C i A', B', C' dvije trojke h-nekolinearnih tačaka i D i D' tačke h-polupravih BC i $B'C'$ takve da je $(A, B) \cong^h (A', B')$, $(B, C) \cong^h (B', C')$, $(C, A) \cong^h (C', A')$, $(B, D) \cong^h (B', D')$.

Kako postoji jedinstvena h-izometrija koja uređenu trojku (A, B, C) preslikava na uređenu trojku (A', B', C'), tom h-izometrijom se tačka D preslikava u tačku D' jer na h-polupravoj $B'C'$ postoji jedinstvena h-tačka D takva da je $(B, D) \cong^h (B', D')$, pa je stoga i $(A, D) \cong^h (A', D')$.

Konačno, dokažimo i četvrti aksiom podudarnosti: ako su C i C' tačke h-duži AB i $A'B'$ takve da je $(A, C) \cong^h (A', C')$, $(B, C) \cong^h (B', C')$, tada je i $(A, B) \cong^h (A', B')$.

Zaista, budući da na h-polupravoj $A'B'$ postoji jedinstvena h-tačka C' takva da je $(A, C) \cong^h (A', C')$, a da na $h - polupravoj$ $C'B'$ postoji jedinstvena $h-$tačka B, takva da je $(C, B) \cong^h (C', B')$, h-izometrijom kojom se uređeni par (A, C) preslikava na (A', C'), uređeni par (B, C) se preslikava na (B', C'), pa se njome i uređeni par (A, B) preslikava na (A', B').

Budući da važi Dedkindova teorema, te da su Arhimedov i Cantorov aksiom posljedice te teoreme, na h-pravoj su zadovoljena oba aksioma neprekidnosti.

Kako je, na osnovu teoreme 4.4.4, zbir unutrašnjih uglova proizvoljnog h-trougla manji od π, u h-ravni će, na osnovu teoreme 4.1.4, važiti aksiom Lobačevskog.

h-ravan je stoga model hiperboličke ravni. ∎

Upravo konstruisani model hiperboličke ravni naziva se Poincareov disk model.

Iz prethodne teoreme slijedi da je svakom pojmu hiperboličke planimetrije pridružen pojam geometrije h-ravni i da svaka teorema hiperboličke planimetrije ima svoju interpretaciju u geometriji h-ravni. Važi i obrat!

Pojam paralelnosti je jedan od najznačajnijih pojmova apsolutne geometrije, pa je jako bitan i u h-ravni.

Ako dvije h-poluprave sa zajednički tjemenom B imaju iste krajeve kao i neka h-prava a (koja ne sadrži B), tada će proizvoljna h-poluprava sa tjemenom B sjeći h-pravu a ako i samo ako pripada onom od h-uglova na koje zadate h-poluprave razlažu h-ravan, kojem pripada i prava a.

Za dvije prave možemo reći da su međusobno h-paralelne ako imaju jedan zajednički kraj.

Poglavlje 5

Riemannova geometrija

5.1 Mnogostrukosti

Većina skupova na kojima trebamo da radimo analizu nisu linearni prostori. Površina sfere je poznat primjer glatkog skupa koji nema strukturu linearnog prostora!

Sfera nema koordinatnog početka (nula vektora). Također, na sferi ne možemo definisati sabiranje parova tačaka (slobodnih vektora) na način koji je konzistentan sa aksiomima linearnog prostora, niti možemo definisati konstantno vektorsko polje na takovoj površi.

Nelinearni prostori su od kozmološkog interesa su pogotovo 3-sfere i pseudosfere. U ovom poglavlju ćemo razviti osnovne alate koji nam omogućuju da se bavimo i takvim prostorima, što se nazivan *račun na mnogostrukostima*.

Mnogostrukosti koje se pojavljuju u primjenama su dvojake. Prvo, imamo mnogostrukosti kao što je konfiguracijski prostor čvrstog tijela u slobodnom padu. Tačke ove mnogostrukosti su na primjer sve moguće rotacije. Izbor jedinične rotacije je proizvoljan i sve tačke ovog konfiguracijskog prostora su ekvivalentne. Iako će koordinate ovdje biti potrebne kako bi se opisale konkretne situacije, geometrijske strukture neće uključivati koordinate direktno.

Drugo, imamo mnogostrukosti kao što je prostor energije, temperature, entropije, pritiska, zapremina, itd... Ovdje koordinate imaju direktnu fizikalnu interpretaciju. Iznenađujuće, metode bez koordinata koje su razvijene za prvi tip mnogostrukosti su također korisni i efektivni alati za mnogostrukosti sa određenim koordinatama!

Primjer. Iako prostor i vrijeme imaju odvojene fizikalne interpretacije, nedisperzivna talasna jednačina

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

se često izučava u rotiranim koordinatama

$$u = t - x, \quad v = t + x$$

pa postaje

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0.$$

Dobro ‘ponašajući’ skupovi sa dovoljno strukture na sebi da se na njima može raditi diferencijalni račun nazivaju se diferencijabilne mnogo strukosti ili skraćeno mnogostrukosti.

Najmanja struktura koju skup može imati bi nam omogućila da samo damo imena tačkama i da diskutujemo identitet tačaka i njihovo članstvo u raznim drugim skupovima. Minimalna dodatna struktura je topologija, koja daje dovoljno strukture da se može rasprevljati o neprekidnosti krivih i preslikavanja.

Skupovi koji se nazivaju mnogostrukostima imaju još više strukture i glatkost krivih i preslikavanja se također može razmatrati! Glatke krive na mnogostrukostima imaju lokalne linearne aproksimacije koje se nazivaju tangentnim vektorima.

$\mathbb{R}^n$ naravno ima svu ovo strukturu i više. Dodatne strukture u $\mathbb{R}^n$ nam dozvoljavaju da definišemo prave, globalnu paralelnost i posebnu tačku koju nazivamo koordinatnim početkom. Ovo nisu strukture koje obavezno zahtjevamo od mnogostrukosti. Definisat ćemo mnogostrukosti tako da lokalno izgledaju kao $\mathbb{R}^n$, ali da nemaju ovu prekomjernu strukturu.

Primjer. Neka je P skup svih pravih linija koje prolaze kroz koordinatni početak u Euklidskom 3-prostoru. Vidjet ćemo uskoro da je ovaj skup mnogostrukost.

Neka je G skup svih velikih krugova na sferi. Ovaj skup je također mnogostrukost.

Neka je Q skup svih trojki (x, y, z) osim $(0, 0, 0)$, modul relacija ekvivalencije

$$(x, y, z) \equiv (kx, ky, kz)$$

za sve realne brojeve k. Q je mnogostrukost sa esencijalno istom strukturom kao mnogostrukosti P i G.

Zajednička mnogostrukna struktura se naziva P^2, projektivni 2-prostor.

Kako bismo dodali strukturu mnogostukosti skupu, moramo pokazati kako se otvorena regija oko bilo koje tačke preslikava na injektivan i neprekidan način na otvorenu regiju u $\mathbb{R}^n$. Inverzno preslikavanje također mora biti neprekidno. Svako takvo preslikavanje se naziva *kartom*.

Karte zadovoljavaju uslov kompatibilnosti - kad god se dvije karte preklapaju na mnogostrukosti, one definišu preslikavanja iz $\mathbb{R}^n$ na samog sebe. Ako je skup glatka mnogostrukost, onda će i ova preslikavanja biti glatka i imati glatke inverse.

Kolekcija svih kompatibilnih karti naziva se *atlas* mngostrukosti.

Primjer. Svaki linearni vektorski prostor može biti pokriven jednom kartom koja preslikava svaki vektor na brojnu n-torku koja se dobija od njegovih komponenti u nekog bazi. Atlas se sastoji od svih karti koje su izvedene iz ove pomoću glatkih trasformacija, koje se nazivaju koordinatnim transformacijama.

Sve n-dimenzionalne sfere S^n mogu se pokriti dvjema kartama koristeći se stereografskom projekcijom. Ako je n-sfera definisana kao skup svih tačaka u $(n+1)$-dimezionalnom Euklidskom prostoru koje zadovoljavaju

$$w^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1,$$

onda je karta za regiju $w \neq -1$ preslikavanje

$$(w, \vec{x}) \mapsto (\vec{x}/(1+w)).$$

Definicija 5.1.1. Preslikavanje $f : (X, \tau) \mapsto (Y, \tau')$ naziva se *homeomorfizmom* (izomorfizam u kontekstu opće topologije) ako

1. f je bijekcija;

2. f i f^{-1} su neprekidne.

Formalna definicija mnogostrukosti

m-dimezionalna koordinatna karta ($m < \infty$) na topološkom prostoru $\mathcal{M}$ je par (U, ϕ) gdje je ϕ otvoreni podskup $\mathcal{M}$ (domen koordinatne karte) a $\phi : U \mapsto \mathbb{R}^m$ je homemorfizam iz U na otvoreni podskup euklidskog prostora $\mathbb{R}^m$ sa uobičajeno topologijom. Ako je $U = \mathcal{M}$, onda je koordinatna karta globalno definisana; inače je lokalno definisana.

Neka su (U_1, ϕ_1) i (U_2, ϕ_2) par m-dimenzionalnih koordinatnih karti sa $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Onda je *funkcija preklapanja* između dvije koordinatne karte preslikavanje $\phi_2 \circ \phi^{-1}$ iz otvorenog podskupa $\phi_1(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^m$ na otvoreni podskup $\phi_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^m$.

Atlas dimenzije m na $\mathcal{M}$ je porodica m-dimenzionalnih koordinatnih karti $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ t.d.

- $\mathcal{M}$ je pokriveno porodicom u smislu da je $\mathcal{M} = \cup_{i \in I} U_i$;

- svaka funkcija preklapanja $\phi_j \circ \phi_i^{-1}, i, j \in I$ je C^∞ preslikavanje iz $\phi_1(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^m$ na $\phi_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^m$.

Za atlas kažemo da je kompletan ukoliko je maksimalan - tj. nije sadžan niti u jednom drugom atlasu. Za kompletan atlas, porodica $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ naziva se *diferencijalna struktura* na $\mathcal{M}$ dimenzije m. Topološki prostor $\mathcal{M}$ se onda naziva *deiferencijalna mngostrukost* (ili m-mnogostrukost, ako treba navesti dimenziju eksplicitno).

Tačka $p \in U \subset \mathcal{M}$ ima koordinate $(\phi^1(p), \phi^2(p), \ldots, \phi^m(p)) \in \mathbb{R}^m$ u odnosu na kartu (U, ϕ), gdje su koordinatne funkcije $\phi^\mu : U \mapsto \mathbb{R}, \mu = 1, 2, \ldots, m$ definišu se pomoću projektivnih funkcija $u^\mu(x) := x^\mu$ kao

$$\phi^\mu(p) := u^\mu(\phi(p)).$$

Skupovi P i Q definisani ranije mogu dobiti mnogostruknu strukturu na isti način. Euklidske koordinate bilo koje tačke na pravoj liniji u skupu P daju brojnu trojku, dok relacija ekvivalencije skupa Q identifikuje brojne trojke koje pripadaju istoj liniji.

Kako bismo pokazali da je skup Q mnogostukost, pogledajmo tačku $(a, b, c) \in Q$. Pretpostavimo da je c najveći od njih. Onda je karta oko tačke (a, b, c) data sa preslikavanjem

$$(x, y, z) \mapsto (x/y, y/z)$$

za otvoreni skup tačaka koje zadovoljavaju $z \neq 0$.

I karta i ovaj uslov su kompatibilni sa relacijom ekvivalencije i ona preslikava cijeli skup Q osim kruga na cijelu ravan.

Međutim možemo definisati još dvije karte i svaka se tačka Q onda pojavljuje u jednoj od njih. Ako ovima dodamo sve druge kompatibilne karte, imamo atlas za Q.

Primjer. Kružnica S^1: Kružnica S^1 se može smatrati kao podskup $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ Euklidskog prostora $\mathbb{R}^2$. Ako se taj prostor osposobi sa uobičajenom metričkom topologijom, onda je S^1 očito zatvoren i ograničen podskup i stoga, po Heine-Borelovoj teoremi, njegova podprostorna topologija je kompaktna.

Generalno, nije moguće locirati tačku bilo gdje na tipičnoj m-mnogostrukosti sa samo jednom koordinatnom kartom. U slučaju S^1 jedna mogućnost je korištenje para preklapajućih uglovnih koordinata. Još jedna mogućnost je data sa

$$U_1 := \{(x, y) | x > 0\} \quad \phi_1(x, y) := y;$$

$$U_2 := \{(x, y) | x < 0\} \quad \phi_2(x, y) := y;$$

$$U_3 := \{(x, y) | y > 0\} \quad \phi_3(x, y) := x;$$

$$U_4 := \{(x, y) | y < 0\} \quad \phi_4(x, y) := x;$$

Primjetite da iako su koordinatne funkcije napisane kao funkcije i x i y, podrazumjeva se da su ove koordinate pod ograničenjem $x^2 + y^2 = 1$ i da (x, y) predstavlja tačku na kružnici sa ovom ograničenom vrijednošću x i y, tj. kružnica je skup dimenzije 1, a ne 2.

Kako bismo vidjeli da su preklopne funkcije diferencijabilne, posmatrajmo na primjer preklop U_1 i U_3. U $U_1 \cap U_3$ imamo

$$y = \sqrt{1-x^2}, \quad 0 < y < 1 \; i \; 0 < x < 1.$$

Stoga je $\phi_3(x)^{-1} = (x, (1-x^2)^{1/2})$ pa je

$$\phi_1 \circ \phi_3^{-1}(x) = (1-x^2)^{1/2},$$

koja je doista beskonačno diferencijabila za ovaj skup vrijednosti x i y.

Primjetite da ukoliko se $\mathbb{R}^2$ smatra mnogostrukošću, onda je S^1 komapktna jednodimenzionalna mnogostrukost.

Diferencijabilna preslikavanja

Veoma važan koncept u matematici je pojam preslikavanja koje prezervira strukturu između dva skupa koji su osprbljeni sa istom vrstom matematičke strukture. Npr. u teoriji grupa, ovo bi bilo homomorfizmi; U topologiji ovo bi bilo neprekidno preslikavanje koje prezervira strukturu između dva topološka prostora.

U diferencijalnoj geometriji, ulogu preslikavanja koje prezervira strukturu igra C^r-funkcija između dvije mnogostrukosti koju definišemo na slijedeći način

Definicija 5.1.2.

1. Lokalna reprezentacija funkcije f (sa mnogostrukosti $\mathcal{M}$ na mnogostrukost $\mathcal{N}$) u odnosu na koordinatne karte (U, ϕ) i (X, ψ) respektivno na $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ je preslikavanje

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \supset \phi(U) \mapsto \mathbb{R}^n.$$

2. Preslikavanje $f_{\mathcal{M}} \mapsto \mathcal{N}$ je C^r-funkcija ako, za sva pokrivanja $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ pomoću koordinatnih susjedstava, lokalne reprezentacije su C^r funkcije iz standardne realne analize funkcije između topološskih vektorskih prostora $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^n$. Konkretno, diferencijabila funkcija je C^1 funkicija. Funkcija koja je C^∞ se naziva glatkom.

3. Funkcija $f : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{N}$ naziva se C^r-difeomorfizam ako je f bijekcija sa osobinom da su i f i f^{-1} C^r funkcije.

5.1.1 Tangentni prostor i vektori

Jedan od osnovnih koncepta računa na mnogostukostima je pojam *tangentnog prostora*, prostor tangentnih vektora.

Ovaj koncept je zasnovan na intuitivnoj geometrijskoj ideji tangentne ravni na površ. Stoga je tangentni prostor u tački $\vec{x} \in S^n$ izgleda kao da bi trebao biti definisan kao

$$T_{\vec{x}} S^n := \{\vec{v} \in \mathbb{R}^{n+1} | \vec{x} \cdot \vec{v} = 0\}.$$

Međutim, ispostavlja se da je struktura tangentnog prostora također duboko povezana sa lokalnim diferencijabilnim osobinama funkcija na mnogostrukosti i ovo daje mnogo algebarskiji pogled na ideju.

Ključno pitanje je stoga da razumijemo šta bi to trebalo zamijeniti intuitivnu ideju tangentnog vektora kao nečega što je tangentno na površ u uobičajenom smislu? Odgovor je da tangentni vektor treba razumjeti kao nešto što je tangentno na krivu u mnogostrukosti. Ključna stavka ovdje je da kriva leži u mnogostrukosti, ne u okružujućem $\mathbb{R}^{n+1}$ i ova ideja moće biti generalizovana na proizvoljne mnogostrukosti bez potrebe da ih se prvo ubaci u višedimenzionalni vektorski prostor!

Tangentnost dva preslikavanja je lokalno slaganje preslikavanja. Posmatrajmo dva preslikavanja, ϕ i ψ, oba $\mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$. U svakoj tački ona se mogu presdstaviti pomoću Taylorovog reda. Ako se ove ekspanzije slažu do članova do reda p, kažemo da ova preslikavanja imaju tangentnost p-tog reda u toj tački. Mi ćemo ovdje samo koristiti tangentnost prvog reda.

Primjer. Preslikavanja $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$:

$$u \mapsto (u, u^3), \quad u \mapsto (\sin u, 0)$$

su tangentna u $u = 0$.

Tangentnost za preslikavanja između mnogostrukosti se definira pomoću karti koristeći se prethodnom definicijom.

Tangentnost je struktura koju prezerviraju glatka preslikavanja.

Tangentni vektor je abstrakcija koja treba predstavljati strukturu koja je zajednička klasi parametrizovanih krivih tangentnih u tački.

To je lokalna struktura preslikavanja oblika $\mathbb{R} \mapsto M$ u mnogostrukosti M. Tangentni vektor ćemo u stvari definisati da bude klasa ekvivalencije tangentnih krivih. Ovu klasu ekvivalencije možemo predstaviti na razne načine: pomoću nasumično izabranog člana ili pomoću numeričkog algoritma.

Tangenta na krivu $\gamma : s \mapsto \gamma(s)$ u $\gamma(s)$ ćemo označavati sa $\dot{\gamma}(s)$.

Prostor tangentnih vektora u tački p mnogostrukosti M ćemo označavati sa $T_p(M)$.

Definicija 5.1.3. *Kriva* na mnogostrukosti $\mathcal{M}$ je glatko, tj. C^∞, preslikavanje σ sa nekog intervala $(-\epsilon, \epsilon)$ sa realne prave na $\mathcal{M}$.

Dvije krive σ_1 i σ_2 su *tangentne* u tački $p \in \mathcal{M}$ ako

- $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = p$;
- U nekom lokalnom kordinatnom sistemu $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ oko tačke, dvije krive su 'tangentne' u uobičajenom smislu krivih u $\mathbb{R}^m$:

$$\frac{dx^i}{dt}(\sigma_1(t))|_{t=0} = \frac{dx^i}{dt}(\sigma_2(t))|_{t=0}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

- *Tangentni vektor* u $p \in \mathcal{M}$ je klasa ekvivalencije krivih u $\mathcal{M}$ gdje je relacija ekvivalencije između dvije krive ta da su tangentne u tački p. Klasa ekvivalencije konkretne krive σ se označava sa $[\sigma]$.
- *Tangentni prostor* $T_p\mathcal{M}$ mnogostrukosti $\mathcal{M}$ u tački $p \in \mathcal{M}$ je skup svih tangentnih vektora u tački p.

  Tangentni snop $T\mathcal{M}$ je definisan kao $T\mathcal{R} := \cup_{p\in\mathcal{R}} T_p\mathcal{R}$.

  Postoji prirodno projektivno preslikavanje $\pi : T\mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$ koje povezuje svaki tangentni vektor sa pačkom $p \in \mathcal{R}$ u kojoj je tangentan. Inverzna slika (*nit* preko p) bilo koje tačke p pod preslikavanjem π je stoga skup svih vektora koji su tangentni na mnogostrukost u toj tački.

Ova je definicija konzistentna sa intuitivnom geometrijskom slikom. Ova se primjedba također da primjeniti na tangentni snop $T\mathcal{R}$ koji u slučaju sfere recimo izgleda kao

$$TS^n = \{(\vec{x}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} | \vec{x} \cdot \vec{x} = 1 \wedge \vec{x} \cdot \vec{v} = 0\}.$$

Tangentni vektor $v \in T_P\mathcal{R}$ se može koristiti kao izvod u pravcu na funkcijama f mnogostukosti $\mathcal{R}$ pomoću:

$$v(f) := \frac{df(\sigma(t))}{dt}|_{t=0},$$

gdje je σ bilo koja kriva u klasi ekvivalencije koju representira v, tj. $v = [\sigma]$.

Teorema 5.1.4. *Tangenetni prostor $T_p\mathcal{R}$ ima strukturu realnog vektorskog prostora!*

Definicija 5.1.5. Derivacija u tački $p \in \mathcal{R}$ je preslikavanje $v : C^\infty(\mathcal{R}) \mapsto \mathbb{R}$ koje zadovoljava:

1. $v(f + g) = v(f) + v(g) \forall f, g \in C^\infty(\mathcal{R})$
2. $v(rf) = rv(f) \forall f \in C^\infty(\mathcal{R}), r \in \mathbb{R}$

3. $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f) \forall f, g \in C^\infty(\mathcal{R})$

Skup svih derivacija u $p \in \mathcal{R}$ se označava sa $D_p\mathcal{R}$.

Veoma važan primjer derivacije je dat pomoću bilo koje koordinatne karte (U, ϕ) koja sadrži tačku p koja nas interesuje. Specifično, skup derivacija u p je definisan pomoću:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p f := \frac{\partial}{\partial u^\mu} f \circ \phi^{-1}|_{\phi(p)}; \quad \mu = 1, 2, \ldots, \dim \mathcal{R}.$$

Lema 5.1.6. *Neka je (U, ϕ) koordinatna karta oko $p \in \mathcal{R}$ sa asociranim koordinatnim funkcijama $(x^1, x^2, \ldots, x^m)$ i takvim da je $x^\mu(p) = 0$ za svako $\mu = 1, 2, \ldots$ dim $\mathcal{R}$. Onda za svako $f \in C^\infty(\mathcal{R})$ postoji $f_\mu \in C^\infty(\mathcal{R})$ tako da*

1. $f_\mu(p) = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p f$

2. $f(q) = f(p) + \sum_{\nu=1}^{m} x^\nu(q) f_\nu(q)$

za svako q iz nekog otvorenog susjedstva tačke p.

Posljedica 5.1.7. *Ako je $v \in D_p(\mathcal{R})$, onda je*

$$v = \sum_{\mu=1}^{m} v(x^\mu) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p \tag{5.1}$$