PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 10. mart/ožujak 2018. godine
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

I razred

1. Prva cijev napuni bazen za 6 sati, a druga za 9 sati. Za koliko bi sati prva i druga cijev napunile bazen ako bi ga punile istovremeno?

2. Izračunati vrijednost izraza

$$A = \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 3}\right)\left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4}\right)\left(1 + \frac{1}{3 \cdot 5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2015 \cdot 2017}\right)\left(1 + \frac{1}{2016 \cdot 2018}\right).$$

3. Dat je jednakokraki trougao $\triangle ABC$ ($|AC| = |BC|$). Simetrala ugla $\measuredangle ABC$ siječe krak AC u tački D. Prava p sadrži tačku D, normalna je na BD i siječe pravu AB u tački E. Dokazati da je $|BE| = 2\,|AD|$.

4. Naći sve parove (p, q) prostih brojeva p i q takvih da je

$$p^3 - q^5 = (p + q)^2 .$$

5. U jednom gradu, koji ima samo 40000 stanovnika, organiziraju se u dobrotvorne svrhe razne aktivnosti. Gradonačelnik se na kraju godine pohvalio da su održana dva koncerta i lutrija, te da je svaki drugi građanin sudjelovao u dobrotvornim aktivnostima. Poznato je da je na koncertu ozbiljne muzike bilo 2000 posjetilaca, na rock-koncertu 8000, te da je po jedan listić lutrije kupilo 12000 stanovnika. Nadalje, poznato je da je 500 ljudi bilo na oba koncerta, da je 50 ljudi koji su bili na koncertu ozbiljne muzike sudjelovalo u lutriji, te da je 3000 posjetilaca rock-koncerta kupilo lutriju. Nitko nije kupio više od jednog listića lutrije.

Da li je gradonačelnik dao dobru procjenu da je svaki drugi građanin sudjelovao u dobrotvornim aktivnostima ili je pogriješio?

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 10. mart/ožujak 2018. godine
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

II razred

1. Za koje vrijednosti parametra m jedan od korijena (rješenja) jednadžbe

$$2x^2 - (2m + 1)\,x + m^2 - 9m + 39 = 0$$

je jednak dvostrukoj vrijednosti drugog korijena. Za nađene vrijednosti parametra m riješiti jednadžbu.

2. U jednakokrakom trouglu jedan ugao iznosi 108°. Dokazati da je omjer dužina osnovice i kraka tog trougla jednak $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. Odrediti cjelobrojnu vrijednost izraza

$$\sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{16x^2 + 8x + 3}}}$$

ako je x nenegativan cio broj.

4. Odrediti cifre x, y, z tako da bude $\sqrt{\overline{xyz}} = (x + y)\,\sqrt{z}$.

5. U šahovsku tablu 8×8 upisani su brojevi 1, 2, ..., 64. Dokazati da postoje dva susjedna kvadrata (tj. šahovska polja) koji sadrže brojeve koji se razlikuju bar za 5. (Kvadrati su susjedni ako imaju barem jednu stranicu zajedničku.)

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 10. mart/ožujak 2018. godine
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

III razred

1. U skupu realnih brojeva riješiti nejednadžbu

$$25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25.$$

2. Za dužine kateta a i b pravouglog trougla vrijedi

$$\log \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2}\left(\log a + \log b - \log 2\right).$$

Odrediti oštre uglove trougla.

3. Na stranici BC trougla ΔABC odabrana je proizvoljna tačka D, a na stranici AB tačka E takva da je $DE \parallel CA$. Neka su P, P_1 i P_2 redom površine trouglova ΔABC, ΔEBD i ΔABD. Dokazati da je tada $P_2 = \sqrt{P \cdot P_1}$.

4. Dokazati da postoji barem 2018 trojki prirodnih brojeva (m, n, k) za koje vrijedi

$$m^{15} + n^{15} = k^{16}.$$

5. Neka je S podskup skupa $\{1, 2, ..., 2n\}$ koji ima $n+1$ članova.

a) Dokazati da postoje dva relativno prosta elementa skupa S.

b) Dokazati da u S postoje dva elementa od kojih jedan dijeli drugi.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona iz MATEMATIKE
Tuzla, 10. mart/ožujak 2018. godine
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

IV razred

1. Izračunati vrijednosti izraza:

a) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n}$,

b) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-...+(-1)^n\binom{n}{n}$.

2. Ako su $\sin(\beta+\gamma-\alpha)$, $\sin(\gamma+\alpha-\beta)$, $\sin(\alpha+\beta-\gamma)$ uzastopni članovi aritmetičkog niza, dokazati da su i $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$ također uzastopni članovi aritmetičkog niza. Pri tome pretpostavljamo da su uglovi α, β, γ različiti od $(2k+1)\cdot 90^\circ$, $k\in\mathbb{Z}$.

3. Od svih jednakokrakih trapeza kojima je ugao na osnovici 60° i čija je površina jednaka $6\sqrt{3}$, odrediti onaj koji ima minimalan obim.

4. Dokazati da je za svaki prost broj $p>2$ brojnik razlomka

$$\frac{m}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{p-1}\qquad (m,n\in\mathbb{N},\ NZD\,(m,n)=1)$$

djeljiv sa p.

5. Uprava tržnog centra u jednom turističkom mjestu je uočila da među kupcima ima stranih turista i odlučila poslati osoblje na tečajeve stranih jezika. Svaki prodavač treba upisati tečaj jednog jezika, a cilj je da za svaki od 9 za to mjesto bitnih jezika postoji prodavač u tržnom centru koji govori tim jezikom. Na koliko se načina može poslati p prodavača tog tržnog centra na tečajeve?

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

RJEŠENJA ZADATAKA

I razred

Zadatak 1. *Prva cijev napuni bazen za 6 sati, a druga za 9 sati. Za koliko bi sati prva i druga cijev napunile bazen ako bi ga punile istovremeno?*

Rješenje. Prva cijev za 1 sat napuni $\frac{1}{6}$ bazena, a druga $\frac{1}{9}$ bazena. To znači da bi te dvije cijevi, ako bi punile bazen istovremeno, za 1 sat napunile $\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{5}{18}$ bazena. Dakle, da se napuni cio bazen potrebno je x sati, pri čemu je

$$\frac{5}{18}x=1.$$

Odavde je $x=\frac{18}{5}=3\frac{3}{5}$ sati, odnosno 3 sata i 36 minuta.

Zadatak 2. *Izračunati vrijednost izraza*

$$A=\left(1+\frac{1}{1\cdot 3}\right)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4}\right)\left(1+\frac{1}{3\cdot 5}\right)...\left(1+\frac{1}{2015\cdot 2017}\right)\left(1+\frac{1}{2016\cdot 2018}\right).$$

Rješenje. Uočimo da je svaki izraz u zagradi oblika

$$1+\frac{1}{n\left(n+2\right)}=\frac{1+n^2+2n}{n\left(n+2\right)}=\frac{\left(n+1\right)^2}{n\left(n+2\right)},\quad n=1,2,...,2016.$$

Zbog toga je

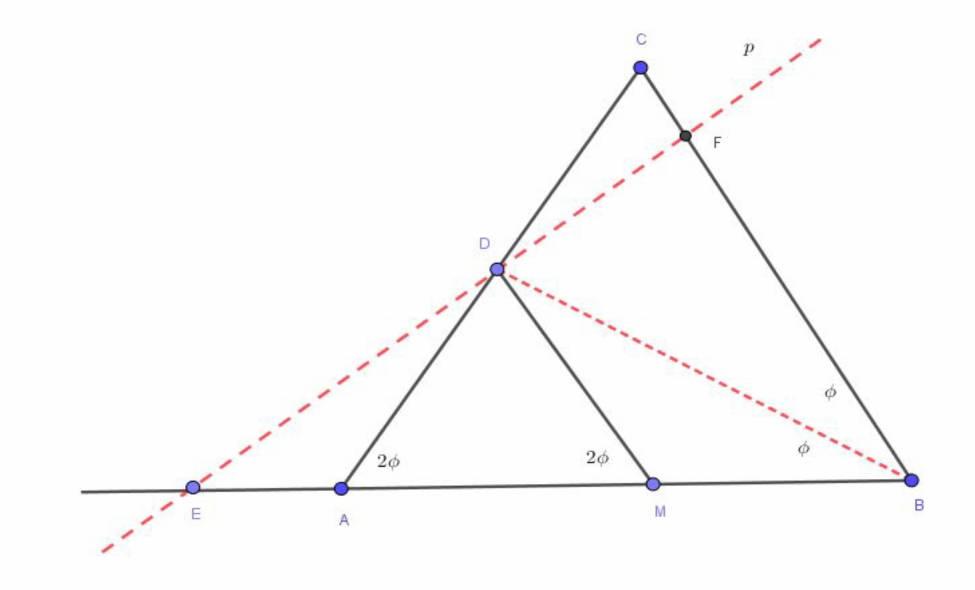
$$\begin{aligned}1+\frac{1}{1\cdot 3} &= \frac{2^2}{1\cdot 3},\ 1+\frac{1}{2\cdot 4}=\frac{3^2}{2\cdot 4},\ 1+\frac{1}{3\cdot 5}=\frac{4^2}{3\cdot 5},\quad 1+\frac{1}{4\cdot 6}=\frac{5^2}{4\cdot 6},\\ 1+\frac{1}{2013\cdot 2015} &= \frac{2014^2}{2013\cdot 2015},\ 1+\frac{1}{2014\cdot 2016}=\frac{2015^2}{2014\cdot 2016},\\ 1+\frac{1}{2015\cdot 2017} &= \frac{2016^2}{2015\cdot 2017},\ 1+\frac{1}{2015\cdot 2017}=\frac{2017^2}{2016\cdot 2018},\end{aligned}$$

što implicira da je

$$\begin{aligned}A &= \frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{5^2}{4\cdot 6}\cdot ...\cdot\frac{2014^2}{2013\cdot 2015}\cdot\frac{2015^2}{2014\cdot 2016}\cdot\frac{2016^2}{2015\cdot 2017}\cdot\frac{2017^2}{2016\cdot 2018}\\ &= \frac{2\cdot 2017}{2018}=\frac{2017}{1009}.\end{aligned}$$

Zadatak 3. *Dat je jednakokraki trougao $\triangle ABC$ ($|AC|=|BC|$). Simetrala ugla $\measuredangle ABC$ siječe krak AC u tački D. Prava p sadrži tačku D, normalna je na BD i siječe pravu AB u tački E. Dokazati da je $|BE|=2\,|AD|$.*

Rješenje. Neka prava p siječe BC u tački F i neka je $DM\|BC$. Trougao BEF je jednakokraki jer je simetrala $\sphericalangle EBF$ normalna na osnovicu EF. Zaključujemo da je $ED=DF$. Kako je $DM\|BC$ to je DM srednja linija ΔBEF, pa je $|EM|=|MB|$. Tada je težišna duž DM pravouglog trougla ΔBDE jednaka polovini duži BE, tj. $|DM|=\frac{1}{2}|BE|$. Kako je $\triangle AMD$ jednakokraki ($\sphericalangle DAM=\sphericalangle DMA=2\phi$) to je $|DM|=|AD|=\frac{1}{2}|BE|$ pa je $|BE|=2\cdot|AD|$.



Zadatak 4. *Naći sve parove* (p,q) *prostih brojeva* p *i* q *takvih da je*

$$p^3 - q^5 = (p+q)^2 .$$

Rješenje. Ako je $p \equiv q \pmod 3$, onda je $p^3 - p^5 \equiv p^2 \pmod 3$, tj. $p^3 \equiv p^2(1+p^3) \pmod 3$.

- Ako nije $p \equiv 0 \pmod 3$, onda je $p \equiv 1 + p^3 \pmod 3$. Odavde je $p^3 - p \equiv -1 \pmod 3$, tj. $3 \nmid (p^3 - p)$. S druge strane je $p^3 - p = (p-1)\,p\,(p+1)$, tj. proizvod tri uzastopna prirodna broja od kojih jedan mora biti djeljiv sa 3, pa $3 \mid (p^3 - p)$. Kontradikcija! Dakle, ne vrijedi: $p \equiv q \pmod 3$ i nije $p \equiv 0 \pmod 3$.

- Ako je $p \equiv q \equiv 0 \pmod 3$, onda je $p = q = 3$, pa je $3^3 - 3^5 = (3+3)^2$, što je nemoguće.

Dakle, nije $p \equiv q \pmod 3$.

Ako je $p \equiv 1 \pmod 3$ i $q \equiv 2 \pmod 3$, tada je $p^3 - q^5 \equiv 1 - 2^3 \equiv 2 \pmod 3$ i $(p+q)^2 \equiv 0 \pmod 3$. Kontradikcija!

Ako je $p \equiv 2 \pmod 3$ i $q \equiv 1 \pmod 3$, tada je $p^3 - q^5 \equiv 8 - 1 \equiv 1 \pmod 3$. S druge strane je $(p+q)^2 \equiv 0 \pmod 3$, pa ne vrijedi $p^3 - q^5 \equiv (p+q)^2 \pmod 3$. Dakle, ni u ovom slučaju nema rješenja.

Ako je $p \equiv 0 \pmod 3$ i nije $q \equiv 0 \pmod 3$, onda je $-q^5 \equiv q^2 \pmod 3$, odnosno $q^3(q^2+1) \equiv 0 \pmod 3$. Kako $q^2 + 1$ nije djeljivo sa 3, to mora biti $q \equiv 0 \pmod 3$. Kontradikcija! Ni u ovom slučaju nemamo rješenje.

Ako je $q \equiv 0 \pmod 3$ i nije $p \equiv 0 \pmod 3$, onda je $q = 3$, pa je $p^3 - 243 = (p+3)^2$, tj.

$$p^3 - p^2 - 6p = 252.$$

Kako je $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, to je $p \in \{2,3,7\}$. Direktnom provjerom utvrđujemo da je $p = 7$. Dakle, jedino rješenje je par $(7,3)$.

Zadatak 5. *U jednom gradu, koji ima samo 40000 stanovnika, organiziraju se u dobrotvorne svrhe razne aktivnosti. Gradonačelnik se na kraju godine pohvalio da su održana dva koncerta i lutrija, te da je svaki drugi građanin sudjelovao u dobrotvornim aktivnostima. Poznato je da je na koncertu ozbiljne muzike bilo 2000 posjetilaca, na rock-koncertu 8000, te da je po jedan listić lutrije kupilo*

12000 stanovnika. Nadalje, poznato je da je 500 ljudi bilo na oba koncerta, da je 50 ljudi koji su bili na koncertu ozbiljne muzike sudjelovalo u lutriji, te da je 3000 posjetilaca rock-koncerta kupilo lutriju. Nitko nije kupio više od jednog listića lutrije.

Da li je gradonačelnik dao dobru procjenu da je svaki drugi građanin sudjelovao u dobrotvornim aktivnostima ili je pogriješio?

Rješenje. Budući da nemamo razloga misliti išta loše o gradonačelniku, jedino što možemo učiniti je provjeriti da li je broj prodanih ulaznica, odnosno listića lutrije u skladu s gradonačelnikovom izjavom o broju građana koji su sudjelovali u dobrotvornim aktivnostima. Označimo s O skup svih ljudi koji su bili na koncertu ozbiljne muzike, sa R skup ljudi koji su bili na rock-koncertu, a sa L skup ljudi koji su kupili listić lutrije. Tada znamo:

$$\begin{gathered} k(O) = 2000, \quad k(R) = 8000, \quad k(L) = 12000, \\ k(O \cap R) = 500, \quad k(O \cap L) = 50, \quad k(R \cap L) = 3000, \\ k(O \cup R \cup L) = 20000. \end{gathered}$$

Nacrtamo li skicu tih skupova ili jednostavno koristimo formulu uključivanja-isključivanja, vidimo da je:

$$k(O \cup R \cup L) = k(O) + k(R) + k(L) - k(O \cap R) - k(O \cap L) - k(R \cap L) + k(O \cap R \cap L).$$

Uvrštavanjem gornjih vrijednosti u posljednju jednakost, dobija se

$$k(O \cap R \cap L) = 1550,$$

što bi trebalo znači da je $O \cap R \cap L$ veći od nekih svojih nadskupova (npr. od $(O \cap R)$), a to je nemoguće.

Lahko se može vidjeti da tome može biti uzrok činjenica da je gradonačelnik izjavio da je u dobrotvornim akcijama sudjelovao veći broj sudionika nego što ih je zaista bilo. (Čak i da je gradonačelnik u sudionike uračunao i organizatore tih aktivnosti, pretjerao je - da bi njegova izjava mogla biti u skladu s ostalim podacima, njih bi trebalo biti najmanje 1500.)

II razred

Zadatak 1. *Za koje vrijednosti parametra m jedan od korijena (rješenja) jednadžbe*

$$2x^2 - (2m+1)\,x + m^2 - 9m + 39 = 0$$

je jednak dvostrukoj vrijednosti drugog korijena. Za nađene vrijednosti parametra m riješiti jednadžbu.

Rješenje. Neka je $x_1 = 2x_2$. Uočimo prvo da korijeni jednadžbe moraju biti realni brojevi, tj. mora da bude

$$D = (2m+1)^2 - 8\left(m^2 - 9m + 39\right) > 0.$$

S druge strane, prema uvjetima zadatka, a koristeći Vièteova pravila, imamo

$$3x_2 = \frac{2m+1}{2}, \quad 2x_2^2 = \frac{m^2 - 9m + 39}{2}.$$

Zamijenimo li x_2 iz prve jednakosti u drugu, dobije se

$$\begin{aligned} \left(\frac{2m+1}{6}\right)^2 &= \frac{m^2-9m+39}{4} \Leftrightarrow \frac{4m^2+4m+1}{36} = \frac{m^2-9m+39}{4} \\ &\Leftrightarrow \; m^2 - 17m + 70 = 0 \Leftrightarrow (m = 7 \vee m = 10)\,. \end{aligned}$$

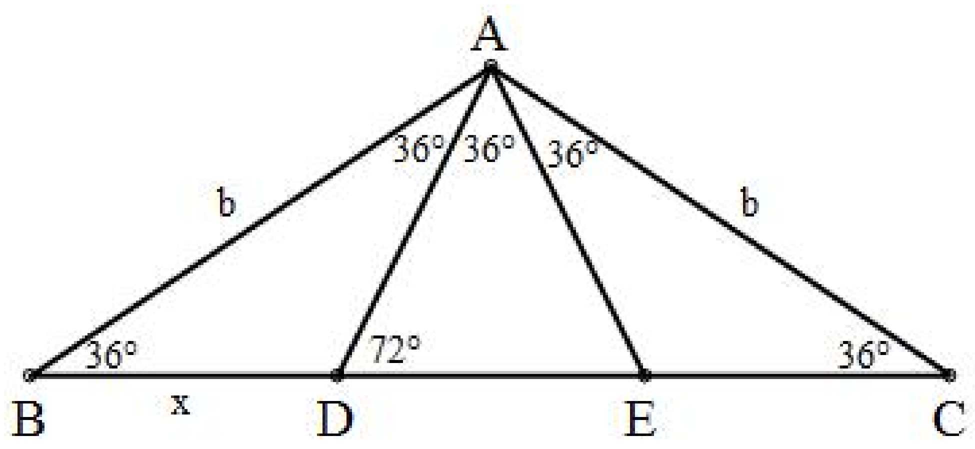
Kako je u oba slučaja $D > 0$, to su tražene vrijednosti za parametar m: 10 ili 7.
U slučaju $m = 7$ dobije se kvadratna jednažba $2x^2 - 15x + 25 = 0$, čija su rješenja $x_1 = 5$ i $x_2 = \frac{5}{2}$, a u slučaju $m = 10$ dobije se kvadratna jednažba $2x^2 - 21x + 49 = 0$, čija su rješenja $x_1 = 7$ i $x_2 = \frac{7}{2}$.

Zadatak 2. *U jednakokrakom trouglu jedan ugao iznosi 108°. Dokazati da je omjer dužina osnovice i kraka tog trougla jednak $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.*

Rješenje. Neka su A, B i C vrhovi trougla. Označimo sa D i E tačke na stranici BC takve da je

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle CAE = 36^\circ.$$

Označimo sa $|BD| = x$, a sa $|BC| = a$. Dakle, $|AB| = |AC| = b$, $|DC| = a - x$.



Trougao ΔABD je jednakokraki pa je $|BD| = |AD|$, ΔADC je jednakokraki pa je $|DC| = |AC| \Leftrightarrow a - x = b$, tj. $x = a - b$. Trouglovi ΔDAB i ΔABC su slični, pa vrijedi:

$$\frac{|DA|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BC|},$$

odnosno

$$\frac{x}{b} = \frac{b}{a},$$

tj.

$$\frac{a-b}{b} = \frac{b}{a},$$

pa imamo

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0.$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe dobijamo

$$\left(\frac{a}{b}\right)_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Kako rješenje s minusom ne dolazi u obzir (negativno je), ostaje

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Zadatak 3. *Odrediti cjelobrojnu vrijednost izraza*

$$\sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{16x^2 + 8x + 3}}}$$

ako je x nenegativan cio broj.

Rješenje. Pošto je x nenegativan cio broj, onda je

$$\begin{aligned}
4x + 1 &< \sqrt{16x^2 + 8x + 3} < 4x + 2 \\
&\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 < 4x^2 + \sqrt{16x^2 + 8x + 3} < 4x^2 + 4x + 2 < 4x^2 + 8x + 4 \\
&\Leftrightarrow (2x+1)^2 < 4x^2 + \sqrt{16x^2 + 8x + 3} < (2x+2)^2 \\
&\Leftrightarrow 2x + 1 < \sqrt{4x^2 + \sqrt{16x^2 + 8x + 3}} < 2x + 2 \\
&\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 < x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{16x^2 + 8x + 3}} < x^2 + 2x + 2 < x^2 + +4x + 4 \\
&\Leftrightarrow (x+1)^2 < x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{16x^2 + 8x + 3}} < (x+2)^2 \\
&\Leftrightarrow x + 1 < \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{16x^2 + 8x + 3}}} < x + 2 \\
&\Leftrightarrow \left\lfloor \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{16x^2 + 8x + 3}}} \right\rfloor = x + 1,
\end{aligned}$$

po definiciji cjelobrojne vrijednosti nenegativnog broja (kao najveći cio broj koji nije veći od tog broja).

Zadatak 4. *Odrediti cifre x, y, z tako da bude $\sqrt{\overline{xyz}} = (x+y)\sqrt{z}$.*

Rješenje. Data jednadžba je ekvivalentna sa

$$10\overline{xy} + z = (x+y)^2 z \Leftrightarrow 10\overline{xy} = z\left[(x+y)^2 - 1\right].$$

Dokažimo da je $\overline{xy} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3)$. Pretpostavimo suprotno, tj. da broj $\overline{xy}$ nije djeljiv sa 3. Tada zbir njegovih cifara pri dijeljenju sa 3 daje ostatak 1 ili 2, odakle je

$$(x+y)^2 \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3) \Leftrightarrow (x+y)^2 - 1 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3),$$

što je kontradikcija, pa $\overline{xy} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3) \Rightarrow x + y \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3)$, zbog čega mora biti

$$z \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3) \quad \text{i} \quad (x+y) \in \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}.$$

i) $x + y = 3 \Rightarrow 10\overline{xy} = 8z$, što je nemoguće jer je

$$0 \leq 8z \leq 72 \wedge 10\overline{xy} \geq 100;$$

ii) $x + y = 6 \Rightarrow 20x + 2y = 7z \Rightarrow 7z = 2(x+y) + 18x = 12 + 18x = 6(2+3x) \Rightarrow z \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 6)$, pa je $z = 6$ i onda je $2 + 3x = 7$, tj. x nije cifra;
iii) $x + y = 9 \Rightarrow \overline{xy} = 8z \Rightarrow 8z = 9x + (x+y) = 9x + 9 = 9(x+1) \Rightarrow z \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 9)$, pa je $z = 9$ i onda je $8 = x + 1 \Rightarrow x = 7$, pa je $y = 2$, što je i rješenje zadatka;
iv) $x + y \in \{12, 15, 18\} \Rightarrow \left[(x+y)^2 - 1\right] \in \{143, 224, 323\}$, što znači da je $10\overline{xy}$ djeljivo sa 143, 224, 323, a to je nemoguće.

Rezultat: $x = 7$, $y = 2$, $z = 9$.

Zadatak 5. *U šahovsku tablu 8×8 upisani su brojevi 1, 2, ..., 64. Dokazati da postoje dva susjedna kvadrata (tj. šahovska polja) koji sadrže brojeve koji se razlikuju bar za 5. (Kvadrati su susjedni ako imaju barem jednu stranicu zajedničku.)*

Rješenje. Definirajmo kao "korak" prelazak iz kvadrata u njemu susjedni kvadrat. Promatrajmo pozicije broja 1 i broja 64. Očito od broja 1 do broja 64 možemo stići u najviše 14 koraka. Neka su brojevi koji su upisani u kvadrate preko kojih prelazimo: a_1, a_2, ... , a_n za $n \leq 14$. Ako bi razlika brojeva u svaka dva kvadrata bila manja od 5, tada bismo imali

$$56 = 4 \cdot 14 \geq |a_1 - 1| + |a_2 - a_1| + ... + |64 - a_n| \geq |a_1 - 1 + a_2 - a_1 + ... + 64 - a_n| = 63,$$

što je kontradikcija. Dakle, postoje dva susjedna kvadrata koji sadrže brojeve koji se razlikuju bar za 5.

(Ova pozicija od maksimalno 14 koraka je u slučaju da su 1 i 64 u uglovima table.)

III razred

Zadatak 1. *U skupu realnih brojeva riješiti nejednadžbu*

$$25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25.$$

Rješenje. Imajući na umu da je $10^x = (2 \cdot 5)^x = 2^x \cdot 5^x$, imamo

$$\begin{aligned}
25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x &> 25 \\
&\Leftrightarrow 25\left(2^x - 1\right) - 5^x\left(2^x - 1\right) > 0 \\
&\Leftrightarrow \left(2^x - 1\right)\left(25 - 5^x\right) > 0 \\
&\Leftrightarrow \left\{\left(2^x - 1 > 0 \wedge 25 - 5^x > 0\right) \vee \left(2^x - 1 < 0 \wedge 25 - 5^x < 0\right)\right\} \\
&\Leftrightarrow \left\{(x > 0 \wedge x < 2) \vee (x < 0 \wedge x > 2)\right\} \\
&\Leftrightarrow (x \in (0,2) \vee x \in \emptyset) \\
&\Leftrightarrow x \in (0,2)\,,
\end{aligned}$$

tj. $0 < x < 2$.

Zadatak 2. *Za dužine kateta a i b pravouglog trougla vrijedi*

$$\log \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2}\left(\log a + \log b - \log 2\right).$$

Odrediti oštre uglove trougla.

Rješenje. Iz jednakosti

$$\log \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2}(\log a + \log b - \log 2)$$

dobijamo niz ekvivalencija

$$\begin{aligned}
& 2\log \frac{a-b}{2} = \log a + \log b - \log 2 \\
\Leftrightarrow\ & \log\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \log \frac{ab}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{ab}{2} \\
\Leftrightarrow\ & a^2 + b^2 = 4ab.
\end{aligned}$$

Ako sada iskoristimo Pitagorin teorem, tj. da je $a^2 + b^2 = c^2$, dobijamo

$$c^2 = 4ab. \tag{1}$$

U pravouglom trouglu je $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$ i $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$, tj. $a = c\sin\alpha$ i $b = c\cos\alpha$, pa je

$$4ab = 4c^2 \sin\alpha\cos\alpha$$

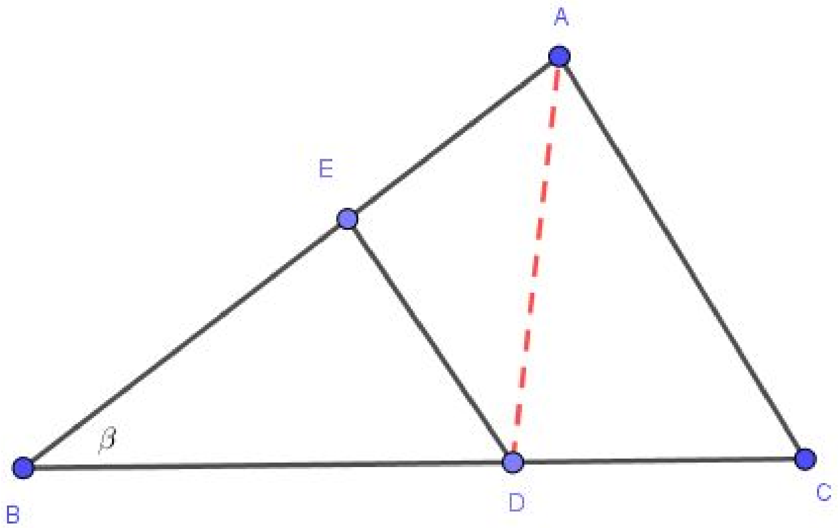
što zajedno sa (1) daje

$$4\sin\alpha\cos\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2}.$$

Odavde je $2\alpha = 30^\circ$ ili $2\alpha = 150^\circ$, odnosno $\alpha = 15^\circ$ ili $\alpha = 75^\circ$. Da bi logaritam iz zadatka bio definiran, mora da vrijedi $a-b>0$, tj. $a>b$, a samim tim i $\alpha > \beta$. Dakle, jedino rješenje je $\alpha = 75^\circ$ i $\beta = 15^\circ$.

Zadatak 3. *Na stranici BC trougla ΔABC odabrana je proizvoljna tačka D, a na stranici AB tačka E takva da je $DE \parallel CA$. Neka su P, P_1 i P_2 redom površine trouglova ΔABC, ΔEBD i ΔABD. Dokazati da je tada $P_2 = \sqrt{P \cdot P_1}$.*

Rješenje. Posmatrajmo datu sliku i sa β označimo ugao pri tjemenu B.



Zbog sličnosti trouglova $\triangle BDE$ i $\triangle ABC$, dobijamo

$$\frac{|BD|}{|BC|} = \frac{|BE|}{|BA|} = k, \;\; k \in (0,1).$$

Površine posmatranih trouglova u zadatku možemo izračunati kao

$$P = \frac{1}{2}|BA||BC|\sin\beta, \quad P_1 = \frac{1}{2}|BE||BD|\sin\beta, \quad P_2 = \frac{1}{2}|BA||BD|\sin\beta.$$

Odavde je

$$\begin{aligned} P \cdot P_1 &= \frac{1}{4}\sin^2\beta|BA||BC||BE||BD| = \frac{1}{4}\sin^2\beta|BA||BC|k\cdot|BA|k\cdot|BC| \\ &= \left(\frac{1}{2}\sin\beta|BA|k\cdot|BC|\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sin\beta|BA||BD|\right)^2 = P_2^2, \end{aligned}$$

odnosno $P_2 = \sqrt{P \cdot P_1}$.

Zadatak 4. *Dokazati da postoji barem 2018 trojki prirodnih brojeva (m,n,k) za koje vrijedi*

$$m^{15} + n^{15} = k^{16}.$$

Rješenje. Označimo sa $u = \dfrac{m}{k}$ i $v = \dfrac{n}{k}$. Tada je jednakost $m^{15} + n^{15} = k^{16}$ ekvivalentna sa $u^{15} + v^{15} = k$. Dakle, imamo

$$\begin{aligned} k &= u^{15} + v^{15}, \\ m &= uk = u(u^{15} + v^{15}), \\ n &= vk = v(u^{15} + v^{15}). \end{aligned}$$

Brojeve u i v možemo odabrati na beskonačno mnogo načina, pa samim time postoji beskonačno mnogo načina kako generirati trojku brojeva (m, n, k). Time postoji i barem 2018 načina.

Zadatak 5. *Neka je S podskup skupa $\{1, 2, ..., 2n\}$ koji ima $n + 1$ članova.*
a) Dokazati da postoje dva relativno prosta elementa skupa S.
b) Dokazati da u S postoje dva elementa od kojih jedan dijeli drugi.

Rješenje. a) Promatrajmo n parova: $(1, 2), (3, 4), ..., (2n - 1, 2n)$. Kako skup S sadrži $n + 1$ elemenata, to po Dirichletovom principu S sadrži komponente barem jednog od navedenih parova, tj. neka dva uzastopna prirodna broja k i $k + 1$ iz skupa $\{1, 2, ..., 2n\}$. No, kako je $NZD(k, k + 1)$, tj. oni su relativno prosti, te je tvrdnja a) dokazana.

b) Promatrajmo broj $a = 2k - 1$, $k \geq 1$. Neka je

$$C_a = \left\{x \mid x = 2^i \cdot a, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\} \cap \{1, 2, ..., 2n\}.$$

Ako sada promatramo skupove C_1, C_3,..., C_{2n-1}, uočavamo da su oni disjunktni i da je njihova unija upravo skup $\{1, 2, ..., 2n\}$. Kako skup S sadrži $n + 1$ elemenata, to on sadrži barem dva elementa iz nekog skupa C_j, $j \in \{1, 3, ..., 2n - 1\}$. Budući da za dva elementa p i q iz skupa C_j vrijedi $p \mid q$ ili $q \mid p$, to je time i tvrdnja b) dokazana.

IV razred

Zadatak 1. *Izračunati vrijednosti izraza:*

1. *a)* $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n}$,

   b) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-...+(-1)^n\binom{n}{n}$.

Rješenje. Koristimo Newtonovu binomnu formulu

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k. \tag{2}$$

a) Ako u formuli (2) stavimo $a=b=1$, dobije se

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=(1+1)^n=2^n.$$

b) Stavimo li sada $a=1$ i $b=-1$ u formuli (2), dobit ćemo

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-...+(-1)^n\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=(1-1)^n=0^n=0.$$

Zadatak 2. *Ako su* $\sin(\beta+\gamma-\alpha)$, $\sin(\gamma+\alpha-\beta)$, $\sin(\alpha+\beta-\gamma)$ *uzastopni članovi aritmetičkog niza, dokazati da su i* $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$ *također uzastopni članovi aritmetičkog niza. Pri tome pretpostavljamo da su uglovi* α, β, γ *različiti od* $(2k+1)\cdot 90^\circ$, $k\in\mathbb{Z}$.

Rješenje. Kako su $\sin(\beta+\gamma-\alpha)$, $\sin(\gamma+\alpha-\beta)$ i $\sin(\alpha+\beta-\gamma)$ uzastopni članovi aritmetičkog niza, to vrijedi jednakost

$$\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\beta+\gamma-\alpha)=\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\gamma+\alpha-\beta),$$

odnosno

$$\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)=2\sin(\gamma+\alpha-\beta).$$

Koristeći formulu za pretvaranje sume sinusa u proizvod i adicione formule za sinus zbira, dobijamo

$$2\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha+\alpha+\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha-\alpha-\beta+\gamma}{2}=2[\sin(\gamma+\alpha)\cos\beta-\sin\beta\cos(\alpha+\gamma)].$$

Dakle,

$$\sin\beta\cos(\gamma-\alpha)=\sin(\gamma+\alpha)\cos\beta-\cos(\alpha+\gamma)\sin\beta,$$

$$\sin\beta[\cos(\gamma-\alpha)+\cos(\alpha+\gamma)]=\sin(\gamma+\alpha)\cos\beta,$$

pa je

$$2\sin\beta\cos\gamma\cos\alpha=(\sin\gamma\cos\alpha+\sin\alpha\cos\gamma)\cos\beta.$$

Dijeljenjem posljednje jednakosti proizvodom $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ (što je dozvoljeno zbog pretpostavke u zadatku), dolazimo do jednakosti

$$2\tan\beta = \tan\alpha + \tan\gamma,$$

čime je dokazano da su $\tan\alpha$, $\tan\beta$ i $\tan\gamma$ uzastopni članovi aritmetičkog niza.

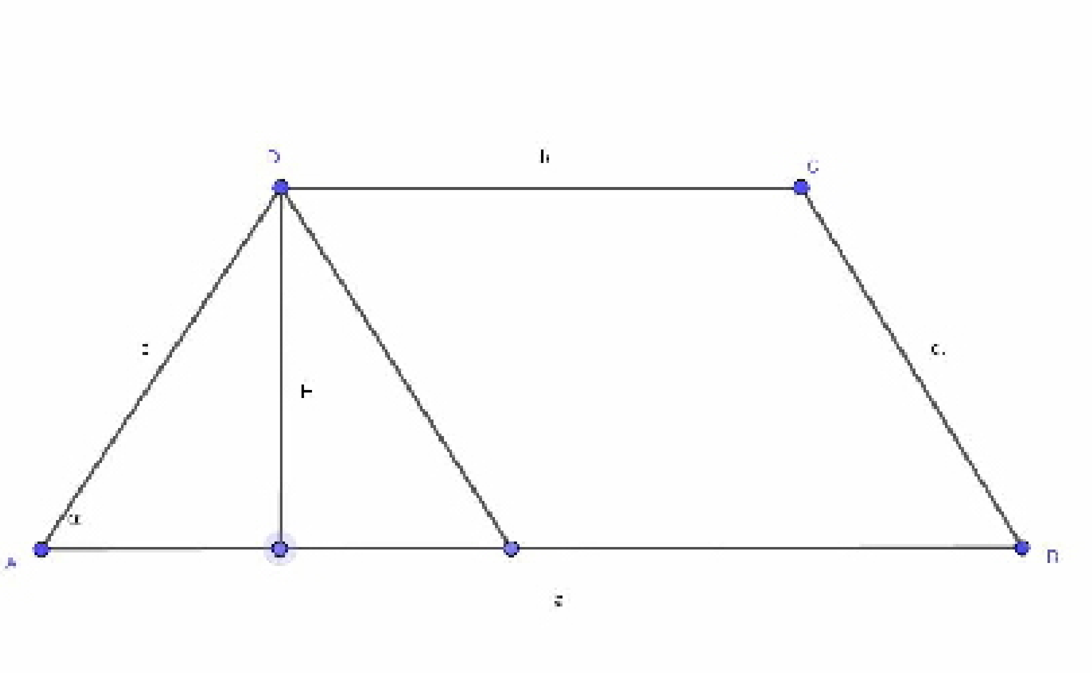
Zadatak 3. *Od svih jednakokrakih trapeza kojima je ugao na osnovici* 60° *i čija je površina jednaka* $6\sqrt{3}$, *odrediti onaj koji ima minimalan obim.*

Rješenje. Neka su a i b veća i manja osnovica trapeza, H njegov visina, α ugao na osnovici, a P i O površina i obim trapeza, respektivno. Kako je $\alpha = 60^\circ$, uočavanjem jednakostraničnog trougla na jednom kraku trapeza, dobijamo da je $a = b + c$ i $H = \dfrac{c\sqrt{3}}{2}$. Na osnovu toga zaključujemo da je

$$6\sqrt{3} = P = \frac{c\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a+b}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}c(2b+c),$$

odnosno

$$c(2b+c) = 24. \tag{3}$$



Kako je $O = a + b + 2c = 2b + 3c$, koristeći nejednakosti između geometrijske i aritmetičke sredine, dobijamo

$$\frac{2b+3c}{2} = \frac{(2b+c)+2c}{2} \geq \sqrt{(2b+c)(2c)} = \sqrt{48},$$

to jest $O \geq 2\sqrt{48} = 8\sqrt{3}$. Jednakost u prethodnoj nejednakosti se zaista dostiže za

$$2b + c = 2c,$$

odnosno $2b = c$. Dakle, minimalna vrijednost obima je $8\sqrt{3}$.

Napomena. Zadatak se mogao riješiti i upotrebom diferencijalnog računa. Naime, iz (3) slijedi da je $b = \frac{12}{c} - \frac{c}{2}$, pa zamjenom u formulu obima dobijamo

$$O = O(c) = 2\left(\frac{12}{c} - \frac{c}{2}\right) + 3c = \frac{24}{c} + 2c.$$

Odavde je

$$O'(c) = -\frac{24}{c^2} + 2 = 0 \Rightarrow c = 2\sqrt{3}.$$

Kako je $O''(c) = \frac{48}{c^3}$ to je $O''\left(2\sqrt{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} > 0$, tj. funkcija $O(c)$ dostiže minimalnu vrijednost za $c = 2\sqrt{3}$ (kada je $b = \sqrt{3}$) i ona je $O_{\min} = 8\sqrt{3}$.

Zadatak 4. *Dokazati da je za svaki prost broj $p > 2$ brojnik razlomka*

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{p-1} \quad \left(m, n \in \mathbb{N},\ NZD(m,n) = 1\right)$$

djeljiv sa p.

Rješenje. I način Pošto je prema uvjetu zadatka prost broj $p > 2$, on je neparan, pa je $p \pm 1$ paran, a onda je

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p-1} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{p-1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p-2}\right) + ... + \left(\frac{1}{\frac{p-1}{2}} + \frac{1}{\frac{p+1}{2}}\right) \\ &= \frac{p}{p-1} + \frac{p}{2(p-2)} + ... + \frac{p}{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2}} = p\left[\frac{1}{p-1} + \frac{1}{2(p-2)} + ... + \frac{1}{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2}}\right]. \end{aligned}$$

Zajednički nazivnik za sve razlomke u uglastoj zagradi je

$$1 \cdot (p-1) \cdot 2 \cdot (p-2) \cdot ... \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2} = (p-1)!,$$

pa je

$$\left(\frac{m}{n} = p \cdot \frac{q}{(p-1)!} \wedge q \in \mathbb{N}\right) \Leftrightarrow \frac{m(p-1)!}{np} = q. \tag{4}$$

Kako je $q \in \mathbb{N}$, iz jednakosti (4) slijedi da je

$$m(p-1)! \equiv 0 \pmod{np}. \tag{5}$$

Međutim, svaki prost broj p uzajamno je prost sa svim prirodnim brojevima koji su manji od njega, pa je, prema tome, uzajamno prost sa svim faktorima broja $(p-1)!$, tj.

$$NZD(p, (p-1)!) = 1. \tag{6}$$

Najzad, iz relacija (5) i (6) slijedi da mora biti $m \equiv 0 \pmod{p}$.

II način Kako je broj p neparan, to je broj $p-1$ paran, pa ga možemo napisati u obliku $p-1=2k$ $(k \in \mathbb{N})$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
\frac{m}{n} &= \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{p-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}\right)+...+\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right) \\
&= p\left[\frac{1}{p-1}+\frac{1}{2(p-2)}+...+\frac{1}{k(k+1)}\right] \\
&= \frac{p\cdot q}{1\cdot 2\cdot (p-2)(p-1)}=\frac{pq}{(p-1)!}.
\end{aligned}$$

Prema Wilsonovom teoremu je $(p-1)! \equiv -1 \,(\bmod p)$, pa se nazivnik ne može kratiti brojem p. Dakle, brojnik je djeljiv sa p.

Zadatak 5. *Uprava tržnog centra u jednom turističkom mjestu je uočila da među kupcima ima stranih turista i odlučila poslati osoblje na tečajeve stranih jezika. Svaki prodavač treba upisati tečaj jednog jezika, a cilj je da za svaki od 9 za to mjesto bitnih jezika postoji prodavač u tržnom centru koji govori tim jezikom. Na koliko se načina može poslati p prodavača tog tržnog centra na tečajeve?*

Rješenje. Kad bi prodavači mogli slobodno birati, bilo bi 9^p raznih izbora tečajeva. No tada bi se moglo dogoditi da neki od bitnih jezika ne bude zastupljen u tom tržnom centru. Nas zanimaju samo takvi izbori u kojima su zastupljeni svi jezici. Uočavamo da je lahko izračunati broj izbora tečajeva pri kojima neki od jezika nisu zastupljeni, pa je to razlog za odluku da se krene formulom uključivanja-isključivanja: ako su $A_1, A_2, ..., A_n$ podskupovi konačnog skupa S, tada je:

$$\begin{aligned}
k\left(A_1^c \cap A_2^c \cap ... \cap A_n^c\right) &= k(S)-\sum_{1\le i\le n} k(A_i)+\sum_{1\le i<j\le n} k(A_i \cap A_j)-\sum_{1\le i<j<k\le n} k(A_i\cap A_j\cap A_k)+... \\
&\quad +(-1)^n k(A_1\cap A_2\cap ...\cap A_n).
\end{aligned}$$

Označimo jezike brojevima od 1 do 9 te sa I_i skup izbora tečajeva pri kojima nije zastupljen jezik i. Treba odrediti veličinu skupa $I_1^c \cap I_2^c \cap ... \cap I_9^c$. Kako smo odlučili upotrijebiti formulu uključivanja-isključivanja, izračunajmo potrebne činjenice:

$$\begin{aligned}
k(I) &= 9^p, \\
k(I_i) &= 8^p, \quad \text{za svako } i, \\
k(I_i \cap I_j) &= 7^p, \quad \text{za sve } i,j,\ i\neq j, \\
&\vdots \\
k(I_1\cap I_2\cap ...\cap I_9) &= 0^p.
\end{aligned}$$

Ukupan broj dobrih izbora jednak je

$$k\left(I_1^c \cap I_2^c \cap ... \cap I_9^c\right)=9^p-\binom{9}{1}8^p+\binom{9}{2}7^p-...+\binom{9}{8}1^p.$$