PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 10. mart/ožujak 2018. godine
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

I razred

1. Prva cijev napuni bazen za 6 sati, a druga za 9 sati. Za koliko bi sati prva i druga cijev napunile bazen ako bi ga punile istovremeno?

2. Izračunati vrijednost izraza

$$A = \left(1+\frac{1}{1\cdot 3}\right)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4}\right)\left(1+\frac{1}{3\cdot 5}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2015\cdot 2017}\right)\left(1+\frac{1}{2016\cdot 2018}\right).$$

3. Dat je jednakokraki trougao $\triangle ABC$ ($|AC| = |BC|$). Simetrala ugla $\measuredangle ABC$ siječe krak AC u tački D. Prava p sadrži tačku D, normalna je na BD i siječe pravu AB u tački E. Dokazati da je $|BE| = 2\,|AD|$.

4. Naći sve parove (p, q) prostih brojeva p i q takvih da je

$$p^3 - q^5 = (p+q)^2\,.$$

5. U jednom gradu, koji ima samo 40000 stanovnika, organiziraju se u dobrotvorne svrhe razne aktivnosti. Gradonačelnik se na kraju godine pohvalio da su održana dva koncerta i lutrija, te da je svaki drugi građanin sudjelovao u dobrotvornim aktivnostima. Poznato je da je na koncertu ozbiljne muzike bilo 2000 posjetilaca, na rock-koncertu 8000, te da je po jedan listić lutrije kupilo 12000 stanovnika. Nadalje, poznato je da je 500 ljudi bilo na oba koncerta, da je 50 ljudi koji su bili na koncertu ozbiljne muzike sudjelovalo u lutriji, te da je 3000 posjetilaca rock-koncerta kupilo lutriju. Nitko nije kupio više od jednog listića lutrije.

Da li je gradonačelnik dao dobru procjenu da je svaki drugi građanin sudjelovao u dobrotvornim aktivnostima ili je pogriješio?

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 10. mart/ožujak 2018. godine
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

II razred

1. Za koje vrijednosti parametra m jedan od korijena (rješenja) jednadžbe

$$2x^2-(2m+1)\,x+m^2-9m+39=0$$

je jednak dvostrukoj vrijednosti drugog korijena. Za nađene vrijednosti parametra m riješiti jednadžbu.

2. U jednakokrakom trouglu jedan ugao iznosi 108°. Dokazati da je omjer dužina osnovice i kraka tog trougla jednak $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. Odrediti cjelobrojnu vrijednost izraza

$$\sqrt{x^2+\sqrt{4x^2+\sqrt{16x^2+8x+3}}}$$

ako je x nenegativan cio broj.

4. Odrediti cifre x, y, z tako da bude $\sqrt{\overline{xyz}}=(x+y)\sqrt{z}$.

5. U šahovsku tablu 8×8 upisani su brojevi 1, 2, ..., 64. Dokazati da postoje dva susjedna kvadrata (tj. šahovska polja) koji sadrže brojeve koji se razlikuju bar za 5. (Kvadrati su susjedni ako imaju barem jednu stranicu zajedničku.)

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 10. mart/ožujak 2018. godine
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

III razred

1. U skupu realnih brojeva riješiti nejednadžbu

$$25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25.$$

2. Za dužine kateta a i b pravouglog trougla vrijedi

$$\log \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2} (\log a + \log b - \log 2)\,.$$

Odrediti oštre uglove trougla.

3. Na stranici BC trougla ΔABC odabrana je proizvoljna tačka D, a na stranici AB tačka E takva da je $DE \parallel CA$. Neka su P, P_1 i P_2 redom površine trouglova ΔABC, ΔEBD i ΔABD. Dokazati da je tada $P_2 = \sqrt{P \cdot P_1}$.

4. Dokazati da postoji barem 2018 trojki prirodnih brojeva (m, n, k) za koje vrijedi

$$m^{15} + n^{15} = k^{16}.$$

5. Neka je S podskup skupa $\{1, 2, ..., 2n\}$ koji ima $n+1$ članova.

a) Dokazati da postoje dva relativno prosta elementa skupa S.

b) Dokazati da u S postoje dva elementa od kojih jedan dijeli drugi.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 10. mart/ožujak 2018. godine
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

IV razred

1. Izračunati vrijednosti izraza:

a) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$,

b) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}$.

2. Ako su $\sin(\beta+\gamma-\alpha)$, $\sin(\gamma+\alpha-\beta)$, $\sin(\alpha+\beta-\gamma)$ uzastopni članovi aritmetičkog niza, dokazati da su i $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$ također uzastopni članovi aritmetičkog niza. Pri tome pretpostavljamo da su uglovi α, β, γ različiti od $(2k+1)\cdot 90^\circ$, $k\in\mathbb{Z}$.

3. Od svih jednakokrakih trapeza kojima je ugao na osnovici 60° i čija je površina jednaka $6\sqrt{3}$, odrediti onaj koji ima minimalan obim.

4. Dokazati da je za svaki prost broj $p>2$ brojnik razlomka

$$\frac{m}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p-1}\quad (m,n\in\mathbb{N},\ NZD\,(m,n)=1)$$

djeljiv sa p.

5. Uprava tržnog centra u jednom turističkom mjestu je uočila da među kupcima ima stranih turista i odlučila poslati osoblje na tečajeve stranih jezika. Svaki prodavač treba upisati tečaj jednog jezika, a cilj je da za svaki od 9 za to mjesto bitnih jezika postoji prodavač u tržnom centru koji govori tim jezikom. Na koliko se načina može poslati p prodavača tog tržnog centra na tečajeve?

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.