



PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

**Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE**

Tuzla, 23. mart/ožujak 2019. godine

Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

I razred

1. Riješiti nejednadžbu

$$\frac{1}{3x+2} \geq \frac{1}{2x-3}$$

2. U rombu $ABCD$ oštri ugao je 60° . Date su tačke M na stranici AB i N na stranici BC , takve da je $|MB| + |BN| = |AB|$. Dokazati da je trougao $\triangle MND$ jednakostranični.
3. Koliki je ostatak pri dijeljenju broja

$$9 \cdot 99 \cdot \dots \cdot \underbrace{99 \dots 99}_{2019 \text{ devetki}}$$

brojem 1000?

4. Neka za realne brojeve x, y, z ($x \neq 1, y \neq 1, x \neq y$) vrijedi jednakost

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{xz - y^2}{1 - y}$$

Dokazati da je tada

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = x + y + z.$$

5. Na takmičenju je 200 učenika rješavalo 6 zadataka. Svaki zadatak je riješilo bar 120 učenika. Dokazati da postoje dva učenika takva da je svaki zadatak riješio bar jedan od njih.

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.

Izrada zadataka traje 210 minuta.



PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

**Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE**

Tuzla, 23. mart/ožujak 2019. godine
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

II razred

1. Za koje vrijednosti realnog parametra k su oba rješenja jednačbe

$$(k - 1)x^2 - 2kx + (k + 3) = 0$$

pozitivna?

2. Odrediti racionalne brojeve p i q takve da vrijedi jednakost

$$\sqrt{2\sqrt{3} - 3} = \sqrt[4]{p} - \sqrt[4]{q}.$$

3. Neka je Q proizvoljna tačka stranice BC jednakostraničnog trougla $\triangle ABC$. Ako duž AQ produžimo do presjeka P s kružnicom opisanom oko tog trougla, dokazati da je

$$\frac{1}{|PB|} + \frac{1}{|PC|} = \frac{1}{|PQ|}.$$

4. Odrediti prirodne brojeve $x_1, x_2, \dots, x_{2002}$ takve da vrijedi

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2002}^2 = 2019.$$

5. Na tabli su napisani brojevi $0, 1, \sqrt{2}$. U jednom koraku dozvoljeno je dodati jednom od tih brojeva razliku druga dva pomnoženu nekim racionalnim brojem. Mogu li se ovakvim operacijama dobiti brojevi $0, 2, \sqrt{2}$?

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.



PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

**Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE**

Tuzla, 23. mart/ožujak 2019. godine
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

III razred

1. Riješiti nejednadžbu

$$\frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2 x - 1} < 1.$$

2. Odrediti vrijednost $\alpha \in [0, 2\pi]$ za koje je kvadratni trinom $y = (2 \cos \alpha - 1)x^2 - 2x + \cos \alpha$ negativan za svako $x \in \mathbb{R}$.
3. Dokazati da ako visine h_a , h_b i h_c i poluprečnik r upisane kružnice nekog trougla zadovoljavaju jednakost $h_a + h_b + h_c = 9r$, onda je taj trougao jednakostranični.
4. U skupu prirodnih brojeva riješiti jednađbu

$$3^{2x-1} - 2^{x-1} = y^2.$$

5. Dato je $2n$ različitih tačaka u ravni, od kojih nikoje 3 nisu kolinearne. Među njima je n crvenih i n plavih. Dokazati da se može povući n duži, svaka sa po jednim crvenim i jednim plavim krajem, tako da nikoje dvije nemaju zajedničkih tačaka.

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.



PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

**Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE**

Tuzla, 23. mart/ožujak 2019. godine
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

IV razred

1. Mogu li tri broja (uzeti u istom poretku) istovremeno činiti i aritmetički i geometrijski niz?
2. Četverougao $\square ABCD$ je tetivni četverougao. Prave AB i CD sijeku se u tački E , a prave AD i BC u tački F . Tangente na kružnicu opisanu oko četverougla $\square ABCD$ iz tačaka E i F dodiruju kružnicu, redom, u tačkama G i H . Ako je $a = |GE|$, $b = |HF|$ i $c = |EF|$, dokazati da je

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

3. Dokazati da za $a, b, c > 1$ vrijedi nejednakost

$$\log_a \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \log_b \frac{a^2 + c^2}{a + c} + \log_c \frac{a^2 + b^2}{a + b} \geq 3.$$

4. Neka je broj $2^n + n^2$ prost, $n \geq 2$. Dokazati da je tada broj $n - 3$ djeljiv sa 6.
5. U početku su na tabli ispisani brojevi $1, 2, \dots, 2019$. U jednom koraku je dozvoljeno zamijeniti neka dva broja a i b brojem $ab + a + b$. Da li je moguće na ovaj način dobiti $2^{2020} - 1$?

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.