



PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

**Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE**

Tuzla, 20. mart/ožujak 2021. godine

Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

I razred

1. Odrediti najmanju moguću vrijednost izraza

$$a^2 + 5b^2 + 8c^2 - 4ab - 4bc - 8c + 24$$

pri čemu su $a, b, c \in \mathbb{R}$, te odrediti a, b, c za koje se ta vrijednost dostiže.

2. U skupu \mathbb{N} riješiti jednažbu

$$y^2 = x^2 - 4px + 3p^2,$$

gdje je p prost broj.

3. U pravouglom trouglu $\triangle ABC$ dužina hipotenuze $|AB| = c$, a katete $|AC| = \frac{3}{5}c$. Naći udaljenost vrha C od kružnice upisane tom trouglu.
4. Zadano je 2021 cijelih brojeva $a_1, a_2, \dots, a_{2021}$. Dokazati da se može odabrati nekoliko od njih čiji je zbir kvadrata djeljiv sa 2021.

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadatka traje 210 minuta.



PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

**Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE**

Tuzla, 20. mart/ožujak 2021. godine
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

II razred

1. Date su kvadratne funkcije

$$y = x^2 - mx + m - 1,$$

$$y = x^2 - 2x + m.$$

- a. Odrediti one realne vrijednosti parametra m za koje ove funkcije imaju jednake minimume.
- b. Za nađenu vrijednost parametra m riješiti sistem nejednadžbi

$$x^2 - mx + m - 1 < 0,$$

$$x^2 - 2x + m > 0.$$

2. Koliko rješenja ima jednačina

$$x - 2021\{x\} = 2021$$

u skupu \mathbb{R} , gdje je $\{x\} = x - [x]$, a $[x]$ najveći cijeli broj koji nije veći od x ?

3. Duž \overline{AB} je duža stranica pravougaonika $ABCD$. Okomica iz vrha B na dijagonalu AC siječe pravac AD u tački E , a kružnica sa centrom A koja prolazi kroz tačku B siječe duž \overline{CD} u tački F . Dokaži da su pravci AF i EF međusobno okomiti.
4. Na list papira oblika pravougaonika $21 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$, Nespretnjaković je prolio tuš tako da je ukupna površina svih mrlja jednaka $100\pi \text{ cm}^2$. Dokazati da postoje dvije tačke u čistom dijelu pravougaonika koje su simetrične u odnosu na jednu osu simetrije pravougaonika.

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.

Izrada zadatka traje 210 minuta.



PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

**Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE**

Tuzla, 20. mart/ožujak 2021. godine

Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

III razred

1. Riješiti jednačinu

$$25^{\log_{0,2}(\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 5)} = \frac{1}{9}.$$

2. Odrediti tri zadnje cifre broja 29^{2021} .

3. U četverouglu $ABCD$ date su stranice $|AD| = a$ i $|BC| = b$ ($a > b$), kao i dijagonale $|AC| = |BD| = \sqrt{a^2 + ab + b^2}$. Izraziti u funkciji od a i b dužine stranica $|AB|$ i $|CD|$ i odrediti uglove nalegle na stranicu AB ako se zna da su oni jednaki.

4. Dokazati da svaki konveksni 21-ougao ima dvije dijagonale koje zaklapaju ugao ne veći od 1° .

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadatka traje 210 minuta.



PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

**Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE**

Tuzla, 20. mart/ožujak 2021. godine

Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

IV razred

1. Uglovi trougla α , β i γ su tri uzastopna člana aritmetičkog niza. Izračunati njihove vrijednosti ako je

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}.$$

2. Dokazati da je broj $\frac{5^{10105}-1}{5^{2021}-1}$ složen.
3. Ako je neki četverougao i tangentni i tetivni dokazati da je njegova površina jednaka kvadratnom korijenu iz proizvoda njegovih stranica.
4. Na okruglom stolu radijusa 25 se nalazi manje od 144 okruglih novčića radijusa 1. Dokaži da se na sto može postaviti bar još jedan novčić, tako da on ne pokriva ni djelimično nijedan od prethodnih novčića.

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.