**PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA**
u saradnji s
**UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA**

**Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona**
**iz MATEMATIKE**
*Tuzla, 20. mart/ožujak 2021. godine*
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

## I razred

**1.** Odrediti najmanju moguću vrijednost izraza

$$a^2 + 5b^2 + 8c^2 - 4ab - 4bc - 8c + 24$$

pri čemu su $a, b, c \in \mathbb{R}$, te odrediti $a, b, c$ za koje se ta vrijednost dostiže.

**2.** U skupu $\mathbb{N}$ riješiti jednadžbu

$$y^2 = x^2 - 4px + 3p^2,$$

gdje je $p$ prost broj.

**3.** U pravouglom trouglu $\triangle ABC$ dužina hipotenuze $|AB| = c$, a katete $|AC| = \frac{3}{5}c$. Naći udaljenost vrha $C$ od kružnice upisane tom trouglu.

**4.** Zadano je 2021 cijelih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_{2021}$. Dokazati da se može odabrati nekoliko od njih čiji je zbir kvadrata djeljiv sa 2021.

*****************************************************

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET UNIVERZITET U TUZLI

**PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA**
u saradnji s
**UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA**

**Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona**
**iz MATEMATIKE**
*Tuzla, 20. mart/ožujak 2021. godine*
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

## II razred

**1.** Date su kvadratne funkcije

$$y = x^2 - mx + m - 1,$$
$$y = x^2 - 2x + m.$$

a. Odrediti one realne vrijednosti parametra $m$ za koje ove funkcije imaju jednake minimume.

b. Za nađenu vrijednost parametra $m$ riješiti sistem nejednadžbi

$$x^2 - mx + m - 1 < 0,$$
$$x^2 - 2x + m > 0.$$

**2.** Koliko rješenja ima jednadžba

$$x - 2021\{x\} = 2021$$

u skupu $\mathbb{R}$, gdje je $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, a $\lfloor x \rfloor$ najveći cijeli broj koji nije veći od $x$?

**3.** Duž $\overline{AB}$ je duža stranica pravougaonika $ABCD$. Okomica iz vrha $B$ na dijagonalu $AC$ siječe pravac $AD$ u tački $E$, a kružnica sa centrom $A$ koja prolazi kroz tačku $B$ siječe duž $\overline{CD}$ u tački $F$. Dokaži da su pravci $AF$ i $EF$ međusobno okomiti.

**4.** Na list papira oblika pravougaonika $21\,\text{cm} \times 30\,\text{cm}$, Nespretnjaković je prolio tuš tako da je ukupna površina svih mrlja jednaka $100\pi\,\text{cm}^2$. Dokazati da postoje dvije tačke u čistom dijelu pravougaonika koje su simetrične u odnosu na jednu osu simetrije pravougaonika.

*********************************************************

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET UNIVERZITET U TUZLI

**PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA**
u saradnji s
**UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA**

**Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona**
**iz MATEMATIKE**
*Tuzla, 20. mart/ožujak 2021. godine*
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

## III razred

**1.** Riješiti jednadžbu

$$25^{\log_{0,2}\left(\sin^2 x+5\sin x\cos x+5\right)}=\frac{1}{9}.$$

**2.** Odrediti tri zadnje cifre broja $29^{2021}$.

**3.** U četvreouglu $ABCD$ date su stranice $|AD|=a$ i $|BC|=b$ $(a>b)$, kao i dijagonale $|AC|=|BD|=\sqrt{a^2+ab+b^2}$. Izraziti u funkciji od $a$ i $b$ dužine stranica $|AB|$ i $|CD|$ i odrediti uglove nalegle na stranicu $AB$ ako se zna da su oni jednaki.

**4.** Dokazati da svaki konveksni 21-ougao ima dvije dijagonale koje zaklapaju ugao ne veći od $1^\circ$.

*********************************************************

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET UNIVERZITET U TUZLI

**PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA**
u saradnji s
**UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA**

**Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona**
**iz MATEMATIKE**
*Tuzla, 20. mart/ožujak 2021. godine*
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

## IV razred

**1.** Uglovi trougla $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ su tri uzastopna člana aritmetičkog niza. Izračunati njihove vrijednosti ako je

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{3+\sqrt{3}}{2}.$$

**2.** Dokazati da je broj $\frac{5^{10105}-1}{5^{2021}-1}$ složen.

**3.** Ako je neki četverougao i tangentni i tetivni dokazati da je njegova površina jednaka kvadratnom korijenu iz proizvoda njegovih stranica.

**4.** Na okruglom stolu radijusa 25 se nalazi manje od 144 okruglih novčića radijusa 1. Dokaži da se na sto može postaviti bar još jedan novčić, tako da on ne pokriva ni djelimično nijedan od prethodnih novčića.

*****************************************************

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

# RJEŠENJA ZADATAKA

## I razred

**Zadatak 1.** *Odrediti najmanju moguću vrijednost izraza*

$$a^2 + 5b^2 + 8c^2 - 4ab - 4bc - 8c + 24$$

*pri čemu su $a, b, c \in \mathbb{R}$, te odrediti $a, b, c$ za koje se ta vrijednost dostiže.*

**Rješenje.** Uočimo da zadani izraz možemo transformirati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
a^2 + 5b^2 + 8c^2 - 4ab - 4bc - 8c + 24 &= (a^2 - 4ab + 4b^2) + b^2 + 8c^2 - 4bc - 8c + 24 \\
&= (a - 2b)^2 + b^2 + 8c^2 - 4bc - 8c + 24 \\
&= (a - 2b)^2 + (b^2 - 4bc + 4c^2) + (4c^2 - 8c + 4) + 20 \\
&= (a - 2b)^2 + (b - 2c)^2 + (2c - 2)^2 + 20.
\end{aligned}$$

Zbog $(a - 2b)^2 \geq 0$, $(b - 2c)^2 \geq 0$ i $(2c - 2)^2 \geq 0$, slijedi

$$(a - 2b)^2 + (b - 2c)^2 + (2c - 2)^2 + 20 \geq 20,$$

što znači da je najmanja moguća vrijednost zadanog izraza 20.
Izraz poprima vrijednost 20 u slučaju da su svi kvadrati jednaki nuli, odnosno

$$a - 2b = b - 2c = 2c - 2 = 0$$

to jest $a = 4, b = 2, c = 1$.

*Napomena*: Umjesto nadopunjavanja na potpun kvadrat, može se koristiti $A - G$ nejednakost:

$$a^2 + 4b^2 > 4ab, b^2 + 4c^2 > 4bc, 4c^2 + 4 > 8c,$$

odnosno

$$a^2 + 5b^2 + +8c^2 - 4ab - 4bc - 8c + 24 > 4ab + 4bc + 8c - 4ab - 4bc - 8c + 20 = 20.$$

**Zadatak 2.** *U skupu* $\mathbb{N}$ *riješiti jednadžbu*

$$y^2 = x^2 - 4px + 3p^2,$$

*gdje je* $p$ *prost broj.*

**Rješenje.** Datu jednadžbu možemo napisati u obliku $(x-2p)^2 - y^2 = p^2$, a zatim

$$(x-2p-y)(x-2p+y) = p^2.$$

S obzirom da je $p$ prost broj imamo faktorizaciju $p^2 = 1 \cdot p \cdot p$, što nam daje sljedeće tri mogućnosti:

1. $(x-2p-y=1) \wedge (x-2p+y=p^2)$
2. $(x-2p-y=p^2) \wedge (x-2p+y=1)$
3. $(x-2p-y=p) \wedge (x-2p+y=p)$.

Rješavanjem prvog sistema jednadžbi dobijamo

$$x = \frac{p^2+4p+1}{2}, \qquad y = \frac{p^2-1}{2}. \tag{1}$$

Za $p \neq 2$ su $p^2+4p+1$ i $p^2-1$ parni brojevi, te dobijamo prirodne brojeve $x$ i $y$. Dakle imamo ova rješenja u skupu prirodnih brojeva

$$(x,y) = \left(\frac{p^2+4p+1}{2}, \frac{p^2-1}{2}\right), \qquad p \neq 2. \tag{2}$$

Iz drugog sistema jednadžbi dobijamo $2y = 1-p^2$, ali $1-p^2 < 0$, pa $y$ nije prirodan broj. To znači da drugi sistem nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

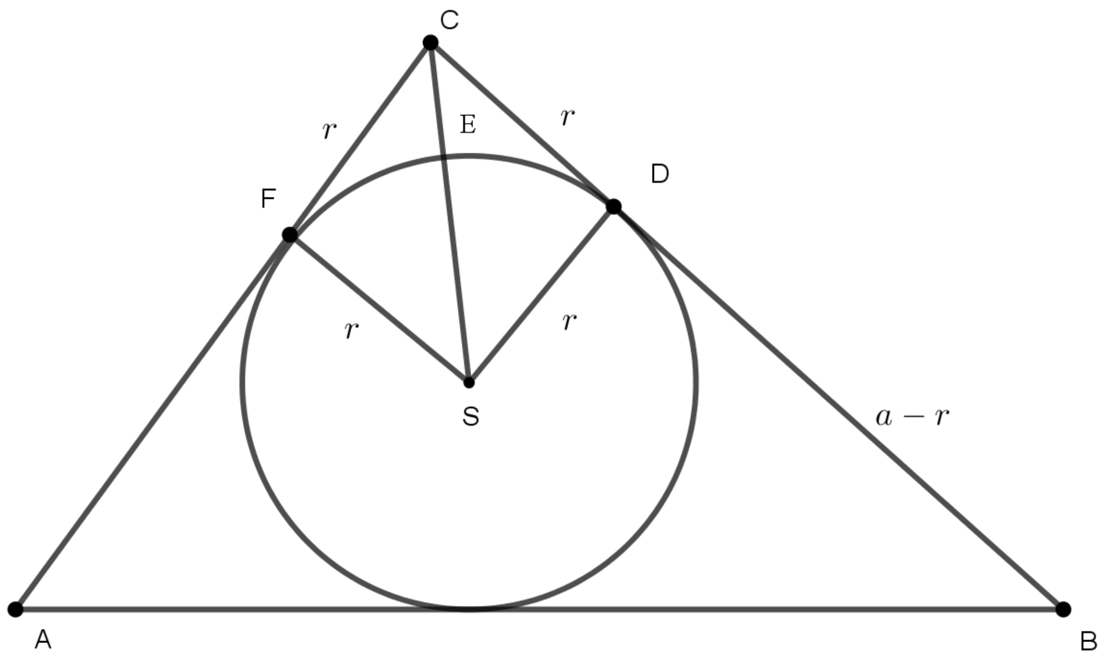
Iz trećeg sistema jednadžbi dobijamo $x = 3p$, $y = 0$, pa s obzirom da 0 nije prirodan broj, ni ovaj sistem nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

Na osnovu svega ovoga zaključujemo da je rješenje polazne jednadžbe dato sa (2), tj.

$(x,y) = \left(\frac{p^2+4p+1}{2}, \frac{p^2-1}{2}\right)$, gdje je $p$ prost broj i $p \neq 2$.

**Zadatak 3.** *U pravouglom trouglu $\triangle ABC$ dužina hipotenuze $|AB| = c$, a katete $|AC| = \frac{3}{5}c$. Naći udaljenost vrha $C$ od kružnice upisane tom trouglu.*

**Rješenje.**




Udaljenost vrha $C$ od kružnice upisane u trougao $ABC$ je jednaka udaljenosti vrha $C$ od tačke $E$ koja je presjek upisane kružnice i simetrale ugla $\sphericalangle BCA = 90°$. Ako su $D$ i $F$ dodirne tačke kružnice i katete, onda je četverougao $CFSD$ kvadrat. (Dužine tangenti iz jedne tačke na istu kružnicu su jednake.)
Dijagonala kvadrata je duž $\overline{SC}$ i vrijedi

$$|SC| = r\sqrt{2}\ ,$$

$$|CE| = r\sqrt{2} - r = r(\sqrt{2} - 1)\ .$$

Dužina katete $a = \overline{BC}$ je

$$|BC| = c^2 - b^2 = c^2 - (\frac{3}{5}c)^2 = c^2 - \frac{9}{25}c^2 = \frac{16}{25}c^2\ ,$$

pa je $a = \dfrac{4}{5}c$.
Poluprečnik upisane kružnice u pravouglom trouglu je dat sa $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, pa je

$$r = \frac{\frac{4}{5}c + \frac{3}{5}c - c}{2} = \frac{\frac{2}{5}c}{2} = \frac{1}{5}c\ ,$$

to jest $r = \dfrac{1}{5}c$. Dakle,

$$|CE| = \frac{1}{5}(\sqrt{2} - 1)c\ .$$

**Zadatak 4.** *Zadano je* 2021 *cijelih brojeva* $a_1, a_2, \ldots, a_{2021}$. *Dokazati da se može odabrati nekoliko od njih čiji je zbir kvadrata djeljiv sa* 2021.

**Rješenje.** Posmatrajmo sume

$$a_1^2, \quad a_1^2 + a_2^2, \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \quad \ldots \quad a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_{2021}^2.$$

Ovakvih suma ukupno ima 2021. Ukoliko neka od njih daje ostatak 0 pri dijeljenju sa 2021, dovoljno je uzeti tu sumu i zadatak je riješen. Ukoliko niti jedna gornja suma nije djeljiva sa 2021, onda one daju neke od ostataka: $1, 2, \ldots, 2020$, kojih ima 2020. No, gornjih suma ima 2021, tako da neke dvije daju isti ostatak $k \in \{1, 2, \ldots, 2020\}$ pri dijeljenju sa 2021. Pretpostavimo da su $m, n \in \{1, 2, \ldots, 2021\}$ takvi da je

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2 &\equiv k (\text{mod } 2021) \\ a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2 &\equiv k (\text{mod } 2021). \end{aligned}$$

Bez umanjenja općenitosti pretpostavimo da je $m < n$. Tada je

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right) - \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2\right) = a_{m+1}^2 + a_{n+2}^2 + \ldots + a_n^2$$

djeljivo sa 2021, i to je tražena suma.

## II razred

**Zadatak 1.** *Date su kvadratne funkcije*

$$y = x^2 - mx + m - 1,$$
$$y = x^2 - 2x + m.$$

*a. Odrediti one realne vrijednosti parametra $m$ za koje ove funkcije imaju jednake minimume.*

*b. Za nađenu vrijednost parametra $m$ riješiti sistem nejednadžbi*

$$\begin{aligned} x^2 - mx + m - 1 &< 0, \\ x^2 - 2x + m &> 0. \end{aligned}$$

**Rješenje.**

a. Uočimo da su obje kvadratne funkcije, zbog $a = 1 > 0$, konveksne. Dakle, svoju minimalnu vrijednost doživljavaju u tjemenu parabole kojeg nalazimo pomoću formule $T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$. Diskriminanta prvog kvadratnog trinoma je

$$D_1 = b_1^2 - 4a_1c_1 = m^2 - 4(m-1) = m^2 - 4m + 4,$$

a drugog

$$D_2 = b_2^2 - 4a_2c_2 = 4 - 4m.$$

Realne vrijednosti parametra za koje funkcije imaju jednake minimume, prema tome, dobijamo iz uvjeta

$$-\frac{D_1}{4a_1} = -\frac{D_2}{4a_2} \Leftrightarrow D_1 = D_2 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 = 4 - 4m \Leftrightarrow m = 0.$$

b. Sistem nejednadžbi:

$$\begin{aligned} x^2 - mx + m - 1 &< 0, \\ x^2 - 2x + m &> 0, \end{aligned}$$

za vrijednost parametra $m = 0$ poprima formu:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &< 0, \\ x^2 - 2x &> 0. \end{aligned}$$

Nule odgovarajuće jednadžbe pridružene prvoj nejednadžbi su $x_{1,2} = \pm 1$, $a = 1 > 0$, pa je rješenje prve nejednadžbe $R_1 : x \in (-1, 1)$. Analogno, nule odgovarajuće jednadžbe pridružene drugoj nejednadžbi su $x_1 = 0, x_2 = 2$, $a = 1 > 0$, pa je rješenje druge nejednadžbe $R_2 : x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Konačno rješenje dobijamo kao presjek rješenja $R_1$ i $R_2$

$$R = R_1 \cap R_2 : x \in (-1, 0).$$

**Zadatak 2.** *Koliko rješenja ima jednadžba*

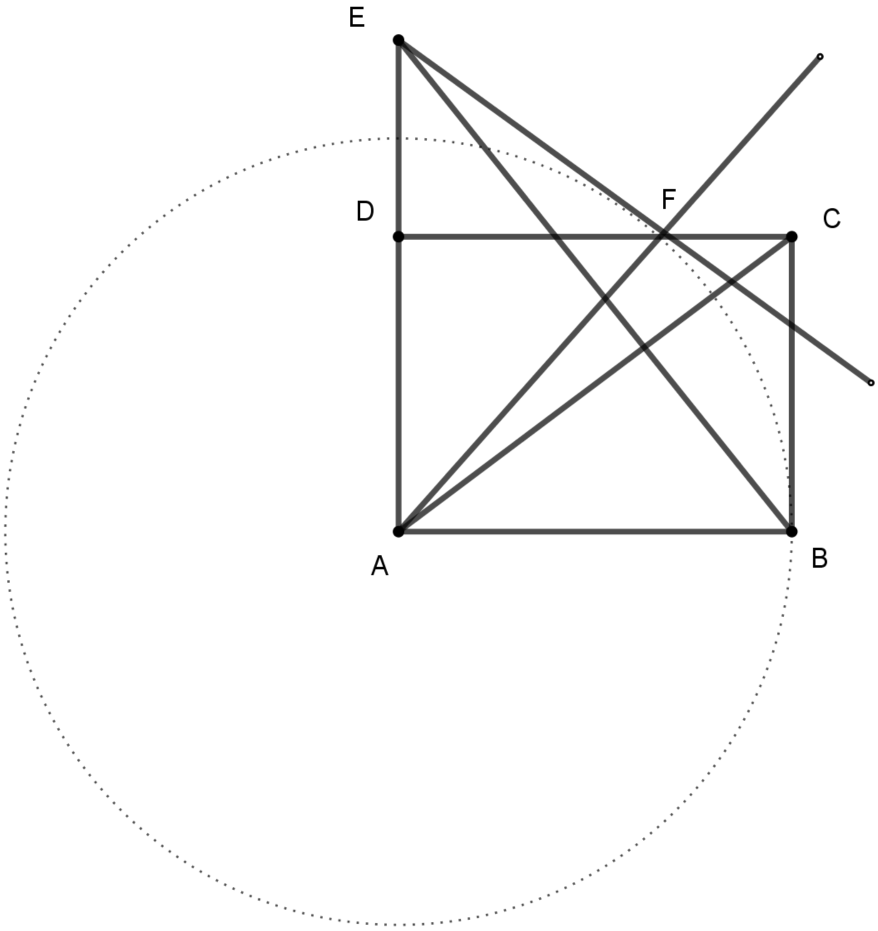
$$x - 2021\{x\} = 2021$$

*u skupu* $\mathbb{R}$, *gdje je* $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, *a* $\lfloor x \rfloor$ *najveći cijeli broj koji nije veći od* $x$*?*

**Rješenje.** Zbog $0 \leq \{x\} < 1$ jasno je da sva rješenja $x$ mogu biti samo u intervalu $[2021, 4042)$. Uvedimo smjenu $x = 2021 + t$. Tada važi $\{x\} = \{t\}$, pa se početna jednadžba svodi na $t = 2021\{t\}$, gdje $t \in [0, 2021)$. Iz zapisa $t = \lfloor t \rfloor + \{t\}$ dobijamo $\lfloor t \rfloor = 2020\{t\}$, tj. $\{t\} = \frac{\lfloor t \rfloor}{2020}$. Kako $\lfloor t \rfloor$ može uzimati vrijednosti $0, 1, 2, \ldots, 2020$, za svaku od ovih mogućnosti dobit ćemo jednoznačno određenu vrijednost $\{t\}$, sa izuzetkom slučaja $\lfloor t \rfloor = 2020$. Naime, tada bi slijedilo $\{t\} = \frac{2020}{2020} = 1$, što je nemoguće zbog zahtjeva $0 \leq \{t\} < 1$. Prema tome, zaključujemo da dobijena jednadžba ima ukupno 2020 rješenja po $t$ (to su: $0, 1 + \frac{1}{2020}, 2 + \frac{1}{2020}, 3 + \frac{1}{2020}, \ldots, 2019 + \frac{2019}{2020}$), pa i polazna jednadžba ima ukupno 2020 rješenja.

**Zadatak 3.** *Duž $\overline{AB}$ je duža stranica pravougaonika $ABCD$. Okomica iz vrha $B$ na dijagonalu $AC$ siječe pravac $AD$ u tački $E$, a kružnica sa centrom $A$ koja prolazi kroz tačku $B$ siječe duž $\overline{CD}$ u tački $F$. Dokaži da su pravci $AF$ i $EF$ međusobno okomiti.*

**Rješenje.**




Neka je $|AB| = a$ i $|AD| = b$. Trouglovi $EAB$ i $ABC$ su slični pa vrijedi

$$|EA| : |AB| = |AB| : |CB| \ ,$$

to jest

$$|EA| = \frac{|AB|^2}{|BC|} = \frac{a^2}{b} \ .$$

Kako je $|AF| = |AB| = a$, iz pravouglog trougla $AFD$ imamo

$$|DF|^2 = |AF|^2 - |AD|^2 = a^2 - b^2 \ .$$

Iz pravouglog trougla $EDF$ imamo da je

$$|EF|^2 = |ED|^2 + |DF|^2 = (|EA| - |AD|)^2 + |DF|^2 = (\frac{a^2}{b} - b)^2 + a^2 - b^2 \ ,$$

odakle nakon sređivanja dobijamo da je

$$|EF|^2 = \frac{a^4}{b^2} - a^2 \ .$$

Dakle, $|EF|^2 + |AF|^2 = \dfrac{a^4}{b^2} - a^2 + a^2 = \dfrac{a^4}{b^2} = |EA|^2$. Prema tome, trougao $EAF$ je pravougli, pa je $AF \perp EF$.

**Zadatak 4.** *Na list papira oblika pravougaonika* $21\,cm \times 30\,cm$*, Nespretnjaković je prolio tuš tako da je ukupna površina svih mrlja jednaka* $100\pi\ cm^2$*. Dokazati da postoje dvije tačke u čistom dijelu pravougaonika koje su simetrične u odnosu na jednu osu simetrije pravougaonika.*

**Rješenje.** Odaberimo jednu osu simetrije pravougaonika i preslikajmo sve mrlje simetrično u odnosu na tu osu. Površina zamrljanog dijela će se povećati, ali neće biti veća od $2 \cdot 100\pi\ \mathrm{cm}^2 < 628,32\ \mathrm{cm}^2$. Budući da je površina pravougaonika jednaka

$$P = 21 \cdot 30 = 630\ \mathrm{cm}^2,$$

to će uvijek ostati bar $1,68\ \mathrm{cm}^2$ čiste površine. Taj dio je simetričan u odnosu na posmatranu osu simetrije, pa u njoj postoje dvije tačke koje su simetrične u odnosu na tu osu simetrije.

## III razred

**Zadatak 1.** *Riješiti jednadžbu*

$$25^{\log_{0,2}\left(\sin^2 x+5\sin x\cos x+5\right)}=\frac{1}{9}.$$

**Rješenje.** Iz

$$\log_a b=\log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{b},\ 0<a\neq 1,\ b>0,$$

vrijedi

$$25^{\log_{0.2}\left(\sin^2 x+5\sin x\cos x+5\right)}=\frac{1}{9}\Leftrightarrow 5^{2\log_{\frac{1}{5}}\left(\sin^2 x+5\sin x\cos x+5\right)}=\frac{1}{9}\Leftrightarrow$$
$$5^{\log_{\frac{1}{5}}\left(\sin^2 x+5\sin x\cos x+5\right)^2}=\frac{1}{9}\Leftrightarrow 5^{\log_5\frac{1}{\left(\sin^2 x+5\sin x\cos x+5\right)^2}}=\frac{1}{9},$$

pa je

$$\frac{1}{\sin^2 x+5\sin x\cos x+5}=\pm\frac{1}{3}.$$

Prvi slučaj

$$\sin^2 x+5\sin x\cos x+5=-3\Leftrightarrow \sin^2 x+5\sin\cos x+8=0\Leftrightarrow 9\sin^2+5\sin x\cos x+8\cos^2 x=0,$$

posljednju jednačinu podijelimo sa $\cos^2 x$, dobijamo

$$9\tan^2 x+5\tan x+8=0,$$

uvodimo smjenu $\tan x=t$, pa je $9t^2+5t+8=0$, jednačina nema realnih rješenja.
Drugi slučaj

$$\sin^2 x+5\sin x\cos x+5=3\Leftrightarrow \sin^2 x+5\sin\cos x+2=0\Leftrightarrow 3\sin^2+5\sin x\cos x+2\cos^2 x=0,$$

posljednju jednačinu podijelimo sa $\cos^2 x$, dobijamo

$$3\tan^2 x+5\tan x+2=0,$$

uvodimo smjenu $\tan x=t$, pa je

$$3t^2+5t+2=0,$$

i

$$t_{1/2}=\frac{-5\pm 1}{6}.$$

Sada je

I $\tan x=-1$ i $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

II $\tan x=-\frac{2}{3}$ i $x=\arctan\frac{-2}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

**Zadatak 2.** *Odrediti tri zadnje cifre broja* $29^{2021}$.

**Rješenje.**
**PRVI NAČIN** Posljednje tri cifre dobit ćemo kad nađemo ostatak pri djeljenju datog broja sa 1000. To možemo odrediti koristeći račun kongruencija po modulu 1000.

$$\begin{aligned}
29^2 &= 841 (\mathrm{mod}\ 1000)\\
29^4 &= (29^2)^2 \equiv 841^2 \equiv 281 (\mathrm{mod}\ 1000)\\
29^5 &= 29^4 \cdot 29 \equiv 281 \cdot 29 \equiv 149 (\mathrm{mod}\ 1000)\\
29^{10} &= (29^5)^2 \equiv (149)^2 \equiv 201 (\mathrm{mod}\ 1000)\\
29^{20} &= (29^{10})^2 \equiv (201)^2 \equiv 401 (\mathrm{mod}\ 1000)\\
29^{40} &= (29^{20})^2 \equiv (401)^2 \equiv 801 (\mathrm{mod}\ 1000)\\
29^{50} &= (29^{40}) \cdot 29^{10} \equiv 801 \cdot 201 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 1000).
\end{aligned}$$

Dakle $29^{50} - 1$ je djeljivo sa 1000.
Do tog zaključka se moglo doći i na drugi način, koristeći rastavljanje izraza $x^{50} - 1$ na faktore (gdje je $x = 29$).

$$\begin{aligned}
x^{50} - 1 &= (x^{25} + 1)(x^{25} - 1)\\
&= (x^{25} + 1)(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^{20} + x^{15} + x^{10} + x^5 + 1).
\end{aligned}$$

Dalje vrijedi $29^{2021} = 29^{50\cdot 40+21} = (29^{50})^{40} \cdot 29^{21}$, pa imamo

$$29^{2021} = (29^{50})^{40} \cdot 29^{21} \equiv 1^{40} \cdot 29^{21} (\mathrm{mod}\ 1000),$$

tj.

$$29^{2021} \equiv 29^{21} (\mathrm{mod}\ 1000).$$

Ostaje još da odredimo $29^{21} = 29^{20} \cdot 29 \equiv 401 \cdot 29 \equiv 629\ (\mathrm{mod}\ 1000)$.
Prema tome dobili smo $29^{2021} \equiv 629\ (\mathrm{mod}\ 1000)$, pa su posljenje tri cifre 629.

Napomena: Može se pozvati i na Eulerovu teoremu, na osnovu koje je $29^{\varphi(1000)} \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 1000)$. S obzirom da je $\varphi(1000) = 400$, to nas dovodi do zaključka $29^{2021} = (29^{400})^5 \cdot 29^{21} \equiv 29^{21}\ (\mathrm{mod}\ 1000)$.

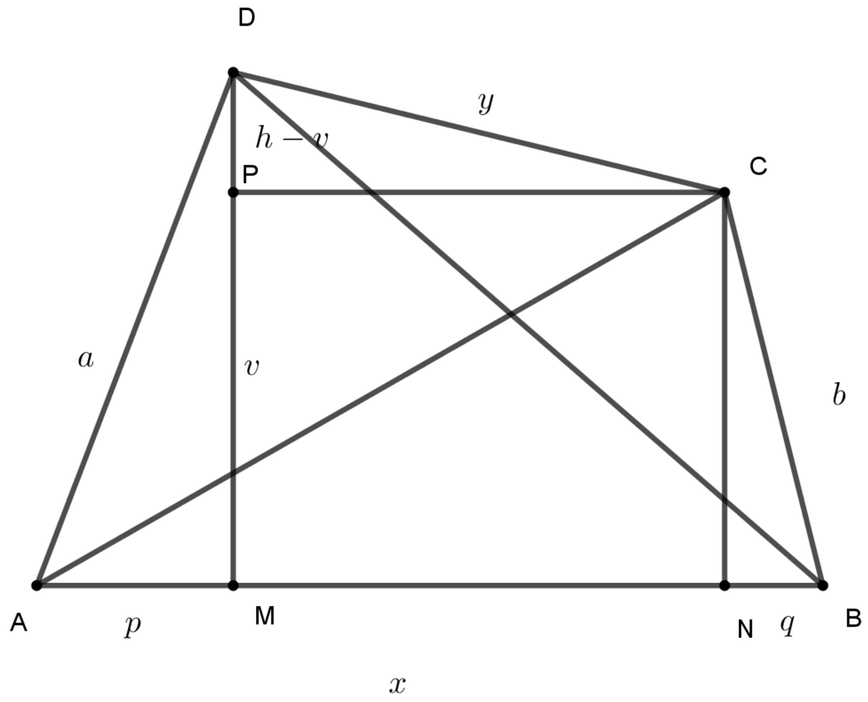
**DRUGI NAČIN** Koristeći binomni obrazac dobijamo

$$\begin{aligned}
29^{2021} = (-1 + 30)^{2021} &= \sum_{k=0}^{2021} \binom{2021}{k} (-1)^{2021-k} \cdot 30^k\\
&= -1 + 30 \cdot 2021 - 900 \cdot 2021 \cdot 1010 + \cdots + 30^{2021}\\
&= -1 + 60630 + 1000 \cdot N = 60629 + 1000 \cdot N,
\end{aligned}$$

za neki prirodan broj $N$, a svi neispisani sabirci sadrže faktor $30^k$, gdje je $k \geq 3$, pa su sigurno djeljivi sa 1000.
Prema tome zaključujemo da su posljenje tri cifre 629.

**Zadatak 3.** *U četvreouglu $ABCD$ date su stranice $|AD| = a$ i $|BC| = b$ $(a > b)$, kao i dijagonale $|AC| = |BD| = \sqrt{a^2 + ab + b^2}$. Izraziti u funkciji od $a$ i $b$ dužine stranica $|AB|$ i $|CD|$ i odrediti uglove nalegle na stranicu $AB$ ako se zna da su oni jednaki.*

**Rješenje.**




Neka je $|AB| = x$ i $|CD| = y$. Po pretpostavci zadatka je $|AC| = |BD| = \sqrt{a^2 + ab - b^2}$. Neka je tačka $M$ podnožje visine $h$ spuštene iz tjemena $D$ na stranicu $AB$ i neka je tačka $N$ podnožje visine spuštene iz tjemena $C$ na stranicu $AB$. Neka je $\overline{AM} = p$ i $\overline{NB} = q$. Koristeći jednakost dijagonala i kosinusnu teoremu primijenjenu na trouglove $ABC$ i $ABD$ dobijamo da je

$$d = |AC| = |BD| = \sqrt{a^2 + ab + b^2},$$

$$d^2 = x^2 + b^2 - 2xb\cos\alpha,$$

$$d^2 = a^2 + x^2 - 2ax\cos\alpha\ .$$

Dakle, $a^2 - b^2 = 2x(a - b)\cos\alpha$, odnosno

$$a + b = 2x\cos\alpha \Leftrightarrow x = \frac{a + b}{2\cos\alpha}\ .$$

Kako je iz trougla AMD jasno da je $p = a\cos\alpha$ i $h = a\sin\alpha$, to iz trougla $BDM$ primjenom Pitagorine teoreme dobijamo

$$(x - p)^2 + h^2 = d^2,$$

odnosno

$$\left(\frac{a + b}{2\cos\alpha} - a\cos\alpha\right)^2 + (a\sin\alpha)^2 = a^2 + ab + b^2,$$

$$\frac{(a+b)^2}{4\cos^2\alpha} = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{4} \ .$$

Dakle, $\cos\alpha = \pm\frac{1}{2}$. Dolazi u obzir samo rješenje $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, jer bi za drugo rješenje imali da je $x = -(a+b)$ što je nemoguće. Prema tome, $\alpha = 60^\circ$. Dalje je

$$x = \frac{a+b}{2\cos 60^\circ} \Rightarrow x = a+b \ ,$$

$$h = a\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$v = \frac{b\sqrt{3}}{2}, \quad p = \frac{a}{2}, \quad q = \frac{b}{2} \ .$$

Konstruišimo duž $\overline{PC}|$ paralelno sa $\overline{AB}$. Tada je

$$|PC| = |MN| = x - p - q \Leftrightarrow |PC| = \frac{a+b}{2}, \quad |PD| = h - v = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-b) \ .$$

Iz trougla $PCD$ je

$$y^2 = (h-v)^2 + |PC|^2,$$

$$y^2 = \frac{1}{4}(4a^2 - 4ab + 4b^2) = a^2 - ab + b^2 \ .$$

Dakle, $y = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

**Zadatak 4.** *Dokazati da svaki konveksni* 21*-ougao ima dvije dijagonale koje zaklapaju ugao ne veći od* $1^\circ$.

**Rješenje.** Broj dijagonala u 21-ouglu je jednak

$$\frac{21 \cdot (21-3)}{2} = \frac{21 \cdot 18}{2} = 189.$$

Ukoliko su neke od tih dijagonala paralelne, tada one grade ugao od $0^\circ$, pa je tvrdnja zadatka trivijalno zadovoljena. Pretpostavimo da nikoje dvije dijagonale nisu paralelne. Dijagonale 21-ougla možemo paralelno pomijerati tako da sve one prolaze istom tačkom. U tom slučaju one dijele ravan na $189 \cdot 2 = 378$ uglova, pa je nemoguće da niti jedan od njih nije manji od $1^\circ$, jer bi tada puni ugao iznosio više od $360^\circ$.

## IV razred

**Zadatak 1.** *Uglovi trougla $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ su tri uzastopna člana aritmetičkog niza. Izračunati njihove vrijednosti ako je*

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{3+\sqrt{3}}{2}.$$

**Rješenje.** Kako su $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ tri uzastopna člana aritmetičkog niza to vrijedi $\beta - \alpha = \gamma - \beta \Leftrightarrow 2\beta = \gamma + \alpha$, pa je

$$\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

Imajući u vidu posljednju jednakost i $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, dobijamo

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0 \Leftrightarrow \alpha + \frac{\alpha+\gamma}{2} + \gamma = 180^0 \Leftrightarrow 3\alpha + 3\gamma = 360^0 \Leftrightarrow \alpha + \gamma = 120^0,$$

pa je $\beta = 60^0$.
Iz uslova zadatka $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ i $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, dobijamo

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} + \sin\beta = \frac{3+\sqrt{3}}{2}.$$

Kako je $\sin\beta = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ te $\alpha + \gamma = 120^0$, $\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, vrijedi dalje

$$2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} + \sin\beta = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{\alpha-\gamma}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

pa je

$$\frac{\alpha-\gamma}{2} = \pm 30^0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

medjutim imajući u vidu da su $\alpha$ i $\gamma$ uglovi trougla, te da vrijedi $\beta = 60^0$ imamo $\alpha - \gamma = \pm 60^0$. Pošto je $\alpha + \gamma = 120^0$, dobijamo sisteme

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 120^0 \\ \alpha - \gamma = 60 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} \alpha + \gamma = 120^0 \\ \alpha - \gamma = -60 \end{cases}$$

čija su rješenja:
prvo $\alpha_1 = 90^0$, $\beta_1 = 60^0$, $\gamma_1 = 30^0$ i drugo $\alpha_2 = 30^0$, $\beta_2 = 60^0$, $\gamma_2 = 90^0$.

**Zadatak 2.** *Dokazati da je broj* $\frac{5^{10105}-1}{5^{2021}-1}$ *složen.*

**Rješenje.** S obzirom da je

$$5^{10105}-1=\left(5^{2021}\right)^5-1=\left(5^{2021}-1\right)\cdot\left(5^{8084}+5^{6063}+5^{4042}+5^{2021}+1\right)$$

imamo

$$a=\frac{5^{10105}-1}{5^{2021}-1}=5^{8084}+5^{6063}+5^{4042}+5^{2021}+1.$$

Ako stavimo $5^{2021}=x$, dobijamo

$$\begin{aligned} a&=x^4+x^3+x^2+x+1=\left(x^2+3x+1\right)^2-5x\left(x^2+2x+1\right)\\ &=\left(x^2+3x+1\right)^2-5\cdot 5^{2021}\left(x+1\right)^2\\ &=\left(x^2+3x+1\right)^2-5^{2022}\left(x+1\right)^2\\ &=\left(x^2+3x+1\right)^2-\left(5^{1011}(x+1)\right)^2\\ &=\left(x^2+3x+1-5^{1011}(x+1)\right)\cdot\left(x^2+3x+1+5^{1011}(x+1)\right).\end{aligned}$$

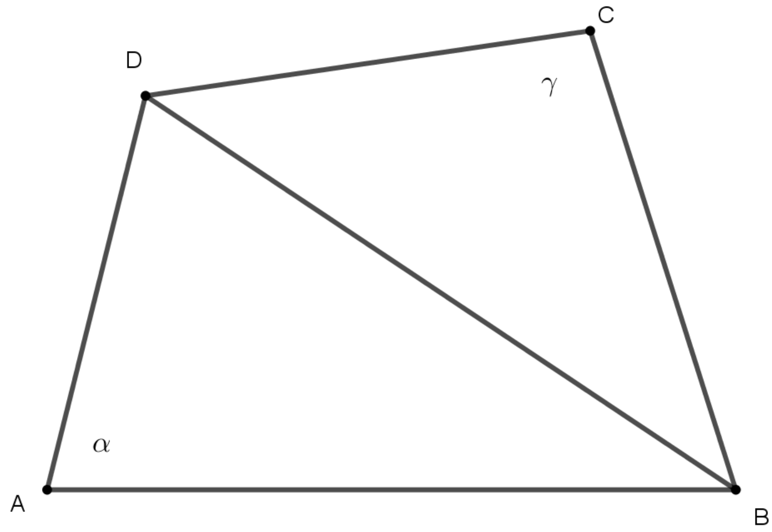
Otuda slijedi da je

$$a=\left(5^{4042}+3\cdot 5^{2021}+1-5^{3032}-5^{1011}\right)\cdot\left(5^{4042}+3\cdot 5^{2021}+1+5^{3032}+5^{1011}\right)$$

složen broj.

**Zadatak 3.** *Ako je neki četverougao i tangentni i tetivni dokazati da je njegova površina jednaka kvadratnom korijenu iz proizvoda njegovih stranica.*

**Rješenje.**




Neka je četverougao $ABCD$ i tetivni i tangentni. Tada je

$$\alpha + \gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{\alpha+\gamma}{2} = 90^\circ$$

i

$$a + c = b + d \Leftrightarrow a - d = b - c \Leftrightarrow (a-d)^2 - (b-c)^2 = 0 \ .$$

Na osnovu kosinusne teoreme primijenjene na trouglove $ABD$ i $BCD$ imamo da je

$$|BD|^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha$$
$$|BD|^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma \ ,$$

pa je

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2ad\cos\alpha - 2bc\cos\gamma$$
$$(a-d)^2 - (b-c)^2 + 2ad + 2bc = 2(ad\cos\alpha - bc\cos\gamma)$$
$$ad - bc = ad\cos\alpha - bc\cos\gamma \ .$$

Kako je

$$P_{\square ABCD} = P = \frac{1}{2}ad\sin\alpha + \frac{1}{2}bc\sin\gamma \ ,$$

odnosno $2P = ad\sin\alpha + bc\sin\gamma$, to je

$$4P^2 + a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd = a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd\cos(\gamma+\alpha),$$
$$4P^2 = 2abcd[1 - \cos(\alpha+\gamma)],$$
$$P^2 = abcd\sin^2\frac{\alpha+\gamma}{2} \ .$$

Kako je $\dfrac{\alpha+\gamma}{2} = 90^\circ$, to je $P^2 = abcd$, odnosno

$$P = \sqrt{abcd} \ .$$

**Zadatak 4.** *Na okruglom stolu radijusa 25 se nalazi manje od 144 okruglih novčića radijusa 1. Dokaži da se na sto može postaviti bar još jedan novčić, tako da on ne pokriva ni djelimično nijedan od prethodnih novčića.*

**Rješenje.** Neka je broj novčića $n$ ($n < 144$). Centri novčića se nalaze u krugu radijusa 24 (tako da dijelovi novčića ne bi prelazili preko stola). Oko svakog novčića opišimo "pojas" dužine 1 (tako da sa novčićem zajedno čine krug radijusa 2). Površina svih takvih krugova je

$$P_u = n \cdot 2^2 \pi < 144 \cdot 4\pi = 576\pi.$$

Površina kruga poluprečnika 24 je jednaka

$$P_k = 24^2 \cdot \pi = 576\pi.$$

Imamo dakle da je $P_u < P_k$, tako da postoji tačka koja ne pripada niti jednom krugu oko novčića. U tu tačku možemo staviti centar novog novčića, i ovo neće dovesti do preklapanja, jer novi novčić može maksimalno da siječe zamišljeni pojas oko novčića. Taj novčić također neće prelaziti preko stola, jer se njegov centar nalazi u dijelu stola poluprečnika 24.