UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona iz MATEMATIKE

Tuzla, 19. mart/ožujak 2022. godine

Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

I razred

1. Neka su x i y različiti realni brojevi takvi da je $2xy + 1 \neq 0$ i neka su

$$A = \frac{6x^2y^2 + xy - 1}{2xy + 1} \quad \text{i} \quad B = \frac{x(x^2 - 1) - y(y^2 - 1)}{x - y}.$$

Koji je broj veći, A ili B?

2. U skupu cijelih brojeva riješiti jednačinu

$$6x^2 + 14y^2 = x^4 + y^4 + 48.$$

3. Nad stranicama jednakostraničnog trougla ABC stranice a nacrtani su sa spoljašnje strane kvadrati $ABLK$, $BCNM$ i $CAQP$. Odrediti površinu i obim šestougla $KLMNPQ$.

4. Neboder ima 101 sprat numerisani od 1 do 101. Pretpostavimo da je lift stao 51 puta dok se spuštao sa najvišeg sprata. Dokazati da je stao na dva sprata čiji je zbir jednak 101.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 150 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA
TUZLANSKOG KANTONA

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 19. mart/ožujak 2022. godine
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

II razred

1. Dokazati da rješenja x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0$, $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ zadovoljavaju nejednakost
$$x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}.$$

2. Odredi sve proste brojeve p za koje vrijedi da je $14p^2 + 1$ prost broj.

3. Dvije kružnice jednakih poluprečnika dužine ρ upisane su u trougao ABC tako da se međusobno dodiruju, te jedna od njih dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, a druga stranice $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$. Dokazati da vrijedi
$$\frac{2}{|AB|} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}$$
gdje je r poluprečnik upisane kružnice u trougao ABC.

4. Dokazati da za bilo koji skup $X \subset \{1, 2, 3, \ldots, 25\}$ od 10 elemenata, uvijek postoje četiri različita broja a, b, c, d iz X, takvi da vrijedi $a + b = c + d$.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 150 minuta.

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 19. mart/ožujak 2022. godine
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

III razred

1. Riješiti jednadžbu:

$$x^{\log^2 x+3\log x+3}=\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}}.$$

2. Odrediti sve prirodne brojeve n takve da je $3248+n+n^2$ djeljiv sa 2022.

3. Ako za stranice a, b i redom njihove naspramne uglove α, β trougla ABC vrijedi

$$(a^2+b^2)\sin(\alpha-\beta)=(a^2-b^2)\sin(\alpha+\beta)\ ,$$

onda je trougao ABC jednakokraki ili pravougli. Dokazati!

4. Da li je moguće konstruisati šemu od n vrsta i n kolona sa elementima $\{-1,0,1\}$ takvu da sume elemenata vrsta, kolona i obje dijagonale budu međusobno različiti brojevi?

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 150 minuta.

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 19. mart/ožujak 2022. godine
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

IV razred

1. Odrediti sve $x \in \mathbb{R}$ i sve $a \in \mathbb{R}$ za koje su brojevi

$$1 - \sqrt{1 - \log_a x}, 2\log_a x, 1 + \sqrt{1 - \log_a x}$$

tri uzastopna člana rastućeg geometrijskog niza.

2. Dat je niz $5, 10, 11, 13, 17, 25, \ldots$ u kojem je svaki sljedeći broj jednak zbiru prethodnog broja i zbira njegovih cifara, tj. $a_1 = 5$ i $a_n = a_{n-1} + S(a_{n-1})$ za $n > 1$, gdje je $S(x)$ zbir cifara broja x. Da li se u tom nizu pojavljuje broj 2022?

3. Na stranici $\overline{BC}$ trougla ABC redom leže tačke N, L, M pri čemu je $\overline{AN}$ visina, $\overline{AL}$ simetrala ugla $\angle CAB$ i $\overline{AM}$ težišnica. Ako je

$$\angle NAB = \angle LAN = \angle MAL = \angle CAM \ ,$$

odredite uglove trougla ABC.

4. Neka je segment AB dužine 2 i neka na AB imamo disjunktne segmente koji su obojeni, tako da udaljenost između bilo koje dvije obojene tačke nije jednaka 1. Pokazati da zbir dužina obojenih segmenata nije veći od 1.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 150 minuta.