PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 18. mart/ožujak 2023. godine

I razred

1. Nekom trocifrenom broju dopiše se 8, i to jednom na početku, a drugi put na kraju. Razlika tako dobijenih brojeva iznosi 1107. Koji je taj trocifreni broj?

2. Brojevi a, b, c su takvi da je

$$\frac{a^2 - bc}{a(1-bc)} = \frac{b^2 - ac}{b(1-ac)}, \qquad abc(1-bc)(1-ac) \neq 0.$$

Ako je $a \neq b$, dokažite da je

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

3. U četverouglu $\square ABCD$ vrijedi $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 90^\circ$, $|AB| = |BC|$, $|CD| + |DA| = 2$. Odrediti površinu četverougla $\square ABCD$.

4. Odrediti sve prirodne brojeve x,y i z za koje vrijedi jednakost

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2023}.$$

5. Na koliko načina se mogu odabrati tri broja iz skupa $\{1, 2, \ldots, 100\}$ tako da je jedan od njih aritmetička sredina preostala dva?

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA
TUZLANSKOG KANTONA

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 18. mart/ožujak 2023. godine

II razred

1. Neka je

$$A = \frac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1} - b^{-1}}, B = \left(\frac{a^{-1}}{a^{-1} - b^{-1}} - \frac{b^{-1}}{a^{-1} + b^{-1}} \right) (a^{-1} - b^{-1})(a^{-2} + b^{-2})^{-1},$$

gdje je $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq \pm b$. Izračunati $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

2. Dokazati da jednadžba $x^2 - (a + c)x + ac - b^2 = 0$ ima realna rješenja x_1 i x_2 za bilo koje realne koeficijente a, b, c, te da su a i c rješenja jednadžbe $(y - x_1)(y - x_2) + b^2 = 0$.

3. U pravouglom trouglu iz vrha pravog ugla povučene su visina i težišnica. Omjer njihovih dužina iznosi $12 : 13$. Odrediti u kojem omjeru su katete tog trougla.

4. Neka je a prirodan broj takav da ima 2023 cifre i djeljiv je sa 9. Neka je b zbir cifara broja a, neka je c zbir cifara broja b i neka je d zbir cifara broja c. Odrediti broj d.

5. U n kutija koje su numerisane nekim od brojeva 00,01,. . .,99 potrebno je raspodijeliti hiljadu karata, numerisanih sa 000,001,. . .,999 po sljedećem pravilu: kartu sa brojem x možemo staviti u kutiju ako broj te kutije možemo dobiti brisanjem jedne od tri cifre broja x. Odrediti najmanji broj kutija n tako da bi sve karte bile raspoređene u kutije.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 18. mart/ožujak 2023. godine

III razred

1. Riješiti jednadžbu
$$\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3$$
u skupu $\mathbb{R}$.

2. Neka su $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n \geq 0$ realni brojevi koji zadovoljavaju jednakosti
$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$$
i
$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = x_1,$$
pri čemu je n prirodan broj. Odrediti sve moguće vrijednosti broja x_1.

3. Neka je α oštri ugao romba. Pod kojim uglom se vidi stranica romba iz sredine naspramne stranice? Za koji romb je taj ugao najveći?

4. Odrediti posljednje dvije cifre broja 2021^{2023}.

5. Na traci papira je ispisan broj od 80 cifara, od kojih ni jedna nije 0. Tu traku papira možemo isjeći na nekoliko dijelova, koji sadrže po bar dvije cifre. Saberimo brojeve koji su dobiveni od cifara na tim dijelovima trake, čuvajući početni redoslijed cifara (kako su cifre i bile poredane na traci). Pokazati da postoji broj koji se može dobiti na 11 različitih načina.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA
TUZLANSKOG KANTONA

PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA
u saradnji s
UDRUŽENJEM MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Tuzla, 18. mart/ožujak 2023. godine

IV razred

1. Riješiti nejednadžbu

$$1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{x-1} + a^x \geq (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)(1 + a^8)$$

u skupu $\mathbb{N}$ za sve vrijednosti $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

2. Naći sve realne brojeve x za koje vrijede nejednakosti

$$-1 < \frac{\sqrt{3}\sin x}{2 + \cos x} < 1.$$

3. Tačka P nalazi se unutar $\triangle ABC$, tako da je $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PCA = \varphi$. Ako su α, β, γ uglovi $\triangle ABC$, dokazati da vrijedi

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma}.$$

4. Dokazati da broj 1049^{2023} ima više od 6071 cifre.

5. U staklenoj kocki ivice 1 metar nalaze se 2023 muhe. Dokazati da postoji sfera radijusa $\frac{1}{11}m$ unutar koje se u svakom momentu neovisno od rasporeda, nalaze barem tri muhe.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.